# 整数比の共振振動数を持つ振動子の作成 森永研究室 樋口 明 2023年2月24日

#### 1 目的

整数比の複数の振動周波数で共振する振動 子の作成を目的とする。その振動子を使っ てその上に置かれた物体の運動を観察する。

#### 2 原理

2.1 非対称振動する台の上の物体の運動 水平な台の上に質量mの物体を置く。台と 物体間の動摩擦係数をμ'とする。

台を図1のノコギリ波のように振動させる。 右向きを正とする。

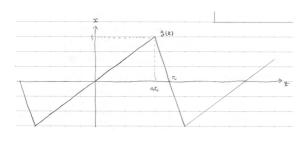


図1 ノコギリ波

台はゆっくり右に動き速い速度で左に戻る。 すなわち、台は長い時間、右向きの遅い速 度 $v_R$ で、短い時間、左むきの早い速度 $v_L$ で 移動する。

台の振動が十分に速く、物体はそれに追随 しないとすると、台が右向きに動いている とき、物体は右向きに力 $F = mg\mu'$ を受け、 逆に台が左向きに動いているとき、物体は 左向きに力 $F = mg\mu'$ を受ける。

物体の速度が $v_R$ を超えない範囲では、物体の受ける力は速度の大きさに関係なく、物体は力Fを受ける時間が長い右向きに加速する。

ノコギリ波の向きを逆にすると運動の向き も逆になる。

## 2.2 フーリエ級数

図1のノコギリ波は正弦波を合成すること で近似することができる。

関数 g(t)のフーリエ級数を求める。

位置g(t)は

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin ka\pi}{a(1-a)\pi^2 k^2} \sin kt$$

速度*f*(t)は

$$f(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin ka\pi}{a(1-a)\pi^2 k} \cos kt$$

a = 0.7 とし、k が 2 次 と 1 0 次 ま で の g(t), f(t) を計算し、 2 次 ま で で 十分 な ノ コ ギリ 波 が 作れること が わかったの で、 今回 は k が 2 次 ま で の g(t) を 考える。

#### 2.3 固有振動数

前節では非対称振動を台に加えることによりその上に置かれた物体を移送できることを示した。この原理を用いて基板(台)上に付着した微小物体(将来的には量子的物体)の輸送を行いたい。

しかし質量mが小さくなると物体と台の分子間力などが無視できなくなり、より強い振動をしなければ物体が動かなくなる。そのために質量が小さい物体が効率よく振動を起こすために共振現象を利用する。

図 2 のような水平に 2 質点がバネで繋がっている時の連成振動を考える。バネ定数はそれぞれ $k_1,k_2,k_1$ である。

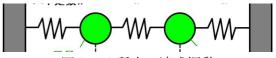


図2 2質点の連成振動

質量mの質点について、つり合いの位置か

らの変位をそれぞれ $u_1,u_2$ として運動方程式を立てると、

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = -k_1u_1 + k_2(u_2 - u_1)$$

$$m\frac{d^2u_2}{dt^2} = -k_2(u_2 - u_1) - k_1u_2$$

ここでこの連成振動の固有振動数は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$$

である。

### 3 実験方法

#### 3.1 振動子の作成

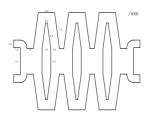


図3 振動子

図 3 のようなバネの代わりとして機能する 振動子を作成し、これの固有振動数 $\omega_1, \omega_2$ が  $2\omega_1 = \omega_2$ となるような振動子を調べる。 振動子のたわみ量 $\delta$ は振動子の幅Lの 3 乗に 比例する。 $k_1, k_2$ のたわみ量とバネの幅をそ れぞれ $\delta_1, \delta_2$ と $L_1, L_2$ とすると、

$$F = k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2$$

よって

$$k_1 L_1^3 = k_2 L_2^3$$
$$2L_1^3 = 3L_2^3$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.14471 \dots = 1.145$$

となる。真ん中の振動子の幅を変えて $L_1=17\ mm, L_2=17+2x\ mm$  として計算する

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{17}{17 + 2x}\right)^3}$$

と求められる。

 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ となるには

$$\left(\frac{17}{17+2x}\right)^3 = \frac{3}{2}$$

 $x = -1.07456 \dots = -1.075 \, mm$ 

となる。

外側の振動子の幅を変えて、 $L_1 = 17 + 2x mm, L_2 = 17 mm$  として計算すると

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{17 + 2x}{17}\right)^3}$$

 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ となるには

$$\left(\frac{17+2x}{17}\right)^3 = \frac{3}{2}$$

x = 1.23007 ... = 1.230 mm となる。

## 3.2 圧電素子

石英やトルマリンのような一部の誘電体には、圧力を加えると電圧が発生する「圧電効果」と呼ばれる現象がある。逆にこれらの誘電体に電圧をかけると変形する(逆圧電効果)。圧電効果を利用した受動素子を「圧電素子(ピエゾ、PZT)」という。

本実験では振動子を挟むような形で圧電素 子を二つ使用する。

本実験では図4のように発振器から駆動 用圧電素子に増幅させた電圧をかけ変形して、与えられた圧力でモニタ用圧電素子から発生する電圧をオシロスコープで読み取る。その読み取った値を PC に表示させるために、ラズベリーパイピコ(micropython) を用いる。

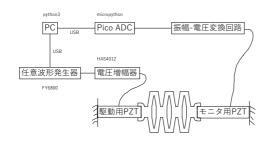
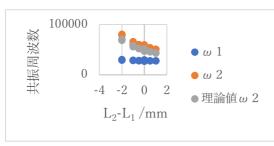
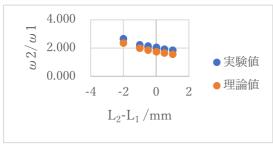


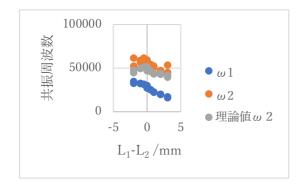
図4 回路図

## 4 結果

図5のようにいくつかの振動子を作成し、 共振周波数を測定した。







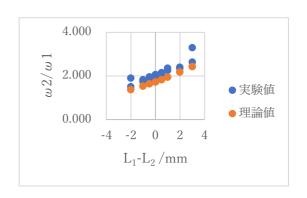


図5 共振周波数の測定

実験値と理論値を比較すると近い値になっ たと考えられる。

 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ に一番近い値になったのは x = 0 の

時であった。

## 5 結論・考察

### 5.1 結論

4の結果より 1:2 の振動周波数で共振する 振動子を作成することができた。

5.2 実験値と理論値の比較

 $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ に一番近い値になったのは x = 0の

時であった理由、すなわち実験値が理論値 より大きくなった理由として、振動子を固 定する部分もばね(ばね定数はk)として機 能して実際のばね定数 $k_1$ 'は理論値 $k_1$ より

小さくなる。よって $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1+2\frac{k_2}{k_1}}$ の実験値が理論値より大きくなったと考えられる。 5.3 物体の運動の観察

結果より、幅の変更なしの振動子が $\frac{\omega_2}{\omega_1}=2$ に一番近い値になったので、実際にこれを用いてビーズを乗せて、運動を観察してみた。



図6 発振器の値



図7 オシロスコープ

図 6 のように振幅 0.1V、オフセット 0.0V、CH1 の周波数を 4740Hz、位相差を 120°、 CH2 の周波数を 9480Hz、位相差を 0°に 設定し、振動させてみる。

オシロスコープに図7のような黄色の振動を振動子に加え、紫の振動が観察された。 左側に乗せるとビーズは左に移動し、右側に乗せると右側に移動した。

これは $\omega 1\omega 2$ での振動の重ね合わせが起こり、振動子の右側では右向きの非対称振動、 左側では左向きの非対称振動が起こったからだと考えられる。

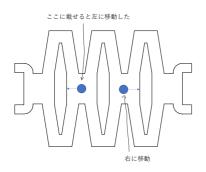


図8 物体の運動

## 6 まとめ・展望

まとめとして

 $L_1=L_2$  の振動子が最も $\omega_1$ : $\omega_2=1:2$ に最も近い値になった。

振動子の固定方法で振動スペクトルは変わったので安定した固定方法を考える。

今後の展望は、位相を逆にした時にビーズ の移動は起こらなかったのでそれについて 調べることが挙げられる。

## 7 参考文献

Excel で学ぶフーリエ変換、渋谷道雄・渡邊八一、オーム社(2003)

水平に置かれた2質点の連成振動

https://batapara.com/archives/coupled-oscillation1.html/

共振

https://ja.wikipedia.org/wiki/共振

たわみ量算出の公式

http://www.mokushin.com/kinoie-

seminar/section/section2-5-1.html

圧電(ピエゾ)素子について

https://www.matsusada.co.jp/column/whats\_piezo.html

Raspberry Pi の使い方

https://fabcross.jp/topics/beginner\_guide/ 20200917\_raspberrypi\_guide.html?fm=sid e\_ranking#midashi06