

# ラゲールガウスビームの生成と応用

電気通信学研究科電子物性工学専攻  
清水和子研究室  
茂泉 純

## 1 研究目的

ビーム強度が中心で最大値をとる Gauss 分布型の光ビームを光ピンセットの光源として用いるより、その最大強度が中心からある距離はなれたところで最大値をとるドーナツ型のビーム形状を持つ Laguerre-Gauss モードビームを光源として用いた方が、より弱いレーザーパワーで対象物を捕獲することができると考えられる。また、この Laguerre-Gauss モードビームを用いて、金属微粒子等の屈折率が周辺媒質よりも低いものを対象物として用いたときもマイクロ操作が実現できる可能性がある。

本研究では、1次から高次の Laguerre-Gauss モードを生成するために必要な高次に渡る Hermite-Gauss モードを、ピエゾ素子を取り付けた Fabry-Perot 共振器を用いて生成させ、シリンドリカルレンズペアで構成されるモードコンバータを使い Laguerre-Gauss モードに変換する。選択したモードが他のモードにシフトしないようにレーザー周波数の安定化を行う。Laguerre-Gauss ビームは位相の特異点を持つことや軌道角運動量を持つという特性があるので、これらの特性を理解するために確認実験を行なう。

## 2 Laguerre-Gauss モード

### 2.1 Laguerre-Gauss モード

波動光学において、一般に媒質のスケールが波長より大きいとき光はほぼ完全な横波なる。そのときベクトルの1成分だけを取り扱う波動方程式を用いることができる。それをヘルムホルツ波動方程式という。これを光ビームの進む軸の周りについて直交座標系で解くとそのスカラー振幅は Hermite-Gauss モードで近似的に展開でき、(2.2) 式となり、円筒座標系でとくと Laguerre 多項式を含む (2.3) 式となる。

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.1)$$

$$u_{N-k,k}^{\text{HG}}(x, y, z) = C_{nm}^{\text{HG}} \frac{1}{w} H_n(x\sqrt{2}/w) H_m(y\sqrt{2}/w) \times e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2R_c}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} e^{-i(n+m+1)\psi} \quad (2.2)$$

$$u_{N-k,k}^{\text{LG}}(r, \phi, z) = (-1)^{\min(n,m)} C_{nm}^{\text{LG}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{|n-m|} L_{\min(n,m)}^{|n-m|}(2r^2/w^2) \times e^{-\frac{ikr^2}{2R_c}} e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{-i(n-m)\phi} e^{-i(n+m+1)\psi} \quad (2.3)$$

ここで  $R_c$ 、 $w$ 、 $\psi$  は任意の  $z$  における曲率半径、ビーム半径、Gouy 位相である。 $C_{nm}^{\text{HG}}$ 、 $C_{nm}^{\text{LG}}$  は Hermite-Gauss、

Laguerre-Gauss の規格化定数である。

### 2.2 モード分解

Laguerre-Gauss モードも Hermite-Gauss モードもともに直交性をもつ関数であるので Laguerre-Gauss モードを Hermite-Gauss モードの重ね合わせで表わすことができる。

$$u_{nm}^{\text{LG}}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N i^k b(n, m, k) u_{N-k,k}^{\text{HG}}(x, y, z) \quad (2.4)$$

ここで  $b(n, m, k)$  は展開係数で以下のような関数で表わす。

$$b(n, m, k) = \left(\frac{(N-k)! k!}{2^N n! m!}\right)^{1/2} \frac{1}{k} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^n (1+t)^m] \Big|_{t=0} \quad (2.5)$$

対角方向の Hermite-Gauss モードは  $x$  軸にモードの対称軸がある場合と  $y$  軸に対称軸がある場合の Hermite-Gauss モードの重ね合わせで表わすことができる。

$$u_{nm}^{\text{HG}}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{k=0}^N b(n, m, k) u_{N-k,k}^{\text{HG}}(x, y, z) \quad (2.6)$$

例として、2次 ( $N=2$ ) のモードの対角方向の Hermite-Gauss モード (2.6) 式と Laguerre-Gauss モード (2.4) 式をそれぞれ展開してみると、

$$u_{20}^{\text{HG}}(\text{dia}) = \frac{1}{2} u_{20}^{\text{HG}} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_{11}^{\text{HG}} + \frac{1}{2} u_{02}^{\text{HG}} \\ u_{20}^{\text{LG}} = \frac{1}{2} u_{20}^{\text{HG}} - \frac{i}{\sqrt{2}} u_{11}^{\text{HG}} - \frac{1}{2} u_{02}^{\text{HG}}$$

となる。図 2.1 にモード分解のイメージ図を示す。

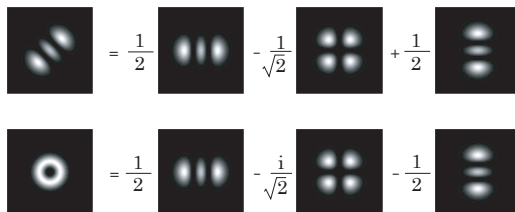


図 2.1 モード分解のイメージ図

これからわかるように Laguerre-Gauss モードは対角方向の Hermite-Gauss モードの隣接項に  $\pi/2$  の位相差を加えた形で表わせる。

### 2.3 モードコンバータ

限られた領域で astigmatic ビームを作るには以下の条件を満足する必要がある。

- 異なる Rayleigh Range ( $z_{R_x}, z_{R_y}$ ) を持った astigmatic ビームのウェストを合わせる。

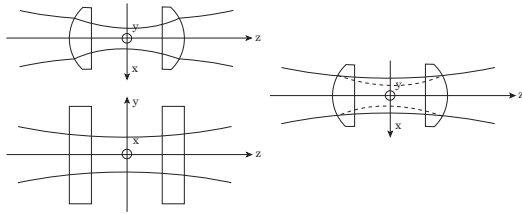


図 2.2  $x, y$  方向から見た光線と重ねた光線図

- これらのビームサイズが同じになったときの距離を  $\pm d$  とし、そこに焦点距離  $f$  のシリンドリカルレンズを入れる。図 2.2 を参照。 $x$  面での波面が距離  $\pm d$  にあるレンズで変換されて距離  $\pm d$  での  $y$  面の波面と等しくなる。

図 2.2 から 2 枚のシリンドリカルレンズで挟まれた領域にだけ astigmatic ビームをつくり、それ以外はビーム半径、曲率半径が  $x, y$  方向どちらも同じ等方的なビームになっていることがわかる。このことから、 $f$  の焦点距離をもったシリンドリカルレンズの位置  $d$  を決定することで、限られた領域のみに astigmatic ビームを作ることができる。シリンドリカルレンズの焦点距離  $f$  と位置  $d$  は次のような関係式になる。

$$d = f/\sqrt{2}, \quad 2 \times d = \sqrt{2} f \quad (2.7)$$

このことを考慮して、シリンドリカルレンズペアを用いたモードコンバータを作製した。図 2.3 に作製したモードコンバータを示す。

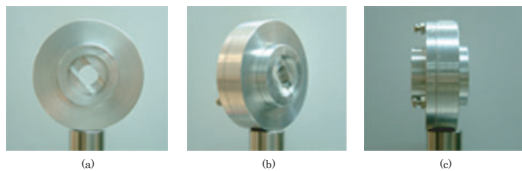


図 2.3 作製したコンバータ

### 3 レーザー周波数安定化

レーザーの周波数が揺らぐのを防ぐために、選択したモードの共振周波数を基準とした周波数安定化を行った。ピエゾ素子付の Fabry-Perot 共振器と共振器の前に置いた鏡 2 枚を用いて Hermite-Gauss モードを生成する。このとき、ピエゾ素子には微小な変調電圧を加えておく。共振器からの透過光強度を PD で検出し、その信号を Lock-in-Amp に入れ、その入力した信号の微分波形を取り出す。これを色素レーザーのコントローラにエラーシグナルとしてフィードバックし、安定化を行った。色素レーザー CR599 では 1MHz 以下で 3 時間以上の周波数安定化に成功した。レーザーパワーのでるリングレーザー CR899 を用いたときには 4MHz 以下で 20 分程度の周波数安定化に成功した。

### 4 Laguerre-Gauss モードの生成

生成した Hermite-Gauss モードに対してモードマッチングをしてモードコンバータに入射させて、Laguerre-Gauss

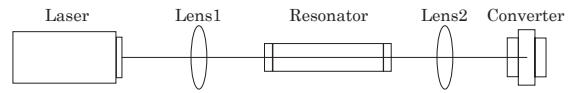


図 4.1 Laguerre-Gauss モード生成の光学系

モードビームを生成した。図 4.1 に Laguerre-Gauss モードビーム生成の光学系を示す。図中のレンズ 1 はレーザーを共振器に対するモードマッチレンズであり、レンズ 2 は共振器とモードコンバータに対するモードマッチレンズである。図 4.2 に 1 次、4.3 に 2 次、7 次、15 次の生成した Hermite-Gauss モードと Laguerre-Gauss モードの強度分布を示す。ビーム径は次数が増えると大きくなる。1 次の Laguerre-Gauss モードの対称性は良いが高次のモードになると対称性が悪くなる。強度分布のピークを一周してそのときの強度の min と max の差を調べると、1 次の場合には 15 % 程度の差であったが、高次になると 60% 以上の差があった。

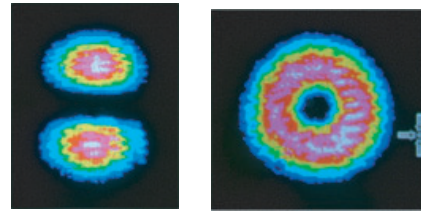


図 4.2 1 次の Hermite-Gauss モードと Laguerre-Gauss モードの強度分布

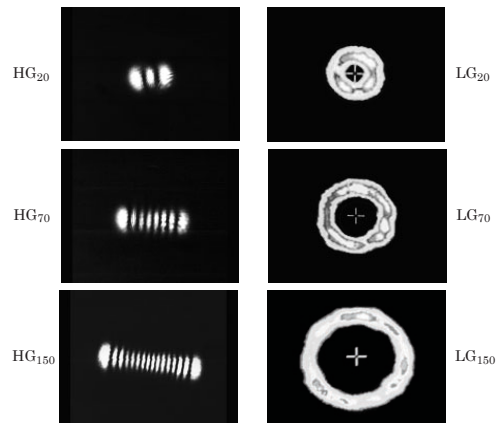


図 4.3 2,7,15 次の Hermite-Gauss モードと Laguerre-Gauss モードの強度分布

## 5 実験

### 5.1 干渉

干渉計を組み、Laguerre-Gauss モードビームがそのビーム中心に特異点をもつことの確認実験を行った。参照光として Gauss モードビーム、対象光として Laguerre-Gauss モードビームを用いた。

位相項は (2.2) 式と (2.3) 式に  $z$  方向に伝播する項を加

えたものとして、

$$\exp [ i \Phi ] = \exp \left[ i \left\{ \left( -\frac{kr^2}{2R_c} \right) - l\phi - (n+m+1)\psi - kz \right\} \right]^{\text{Gauss}}$$

となる。exp の肩にある  $i$  以外の項を  $\Phi$  とし、参照光の曲率半径を  $R_0$ 、対象光の曲率半径を  $R_z$  とすると、参照光と対象光の  $\Phi$  をそれぞれ  $\Phi_{\text{ref}} = -k r^2/2R_0$ 、 $\Phi_{\text{obj}} = -l\phi - k r^2/2R_z$  とすれば、横方向の位相は  $r$  と  $\phi$  のみに依存する。参照光と対象光が同軸に存在し、干渉するときの干渉縞の明は、以下のように表わすことができる。

$$\cos \left[ -l\phi - \frac{kr^2}{2R_z} + \frac{kr^2}{2R_0} \right] = 1 \quad (5.1)$$

また、参照光と対象光をわずかに傾けたときの干渉縞の明は次のように表わせる。

$$\cos \left[ -l\phi - \frac{kr^2}{2R_z} - (n+m+1)\psi + kr \cos \phi \sin \theta - 2kz \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = 1 \quad (5.2)$$

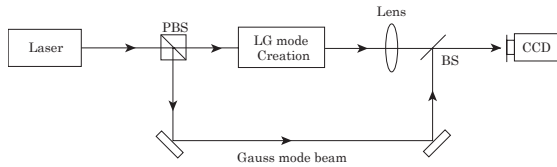


図 5.1 干渉計

0 次モード ( Gauss モードビーム ) と 0 次から 2 次までの Laguerre-Gauss モードビームを干渉させ、その干渉縞を観察するため図 5.1 のような干渉計を組んだ。ビームスプリッター ( BS ) を調節することで同軸干渉と 2 つのビームをわずかに傾けたときの干渉の 2 通りの場合をつくり、各々の干渉縞を CCD カメラで観察した。図 5.1 の Lens は Laguerre-Gauss モードビームを平行光にするために挿入している。従って、Gauss モードビームの曲率半径より Laguerre-Gauss モードビームの曲率半径の方を大きくしている。

### 5.1.1 ティルト干渉

参照光である Gauss モードビームを Laguerre-Gauss モードビームに対してわずかに傾け干渉させた干渉縞を図 5.2 の左列に示す。1,2 次は干渉縞の途中で縞が分岐しているのがわかる。これは Laguerre-Gauss モードビーム ( 1 次について ) がその中心で位相が  $2\pi$  ( 明から明まで位相は  $2\pi$  である。 ) 変化していることに他ならない。2 次の Laguerre-Gauss モードビームはその中心で位相が  $4\pi$  だけ変化していることになる。このビームの等位相面は螺旋状になっており ( 図 5.2 の右列を参照 ) ビーム中心では位相を記述できない。このことから、このビームは位相の特異点を持っていると理解できる。1 次のモードの位相は 1 つの螺旋から成っている。2 次の場合の等位相面は、2 重螺旋からなっている。

### 5.1.2 同軸干渉

図 5.2 の中列からは参照光の曲率半径を Laguerre-Gauss モードビームの曲率半径より大きくするか小さくするかを

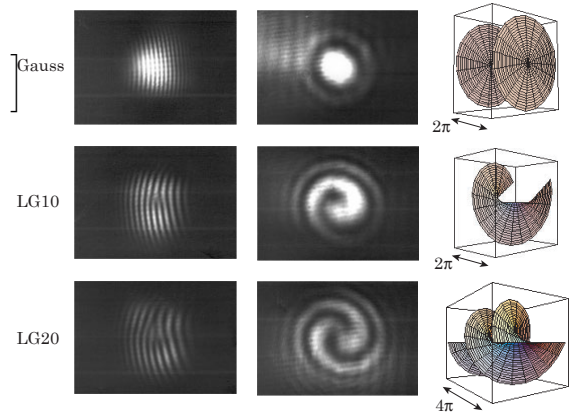


図 5.2 参照光である Gauss モードビームと生成した Laguerre-Gauss モードビームの干渉縞 : 左列は参照光の軸を対象光に対してわずかに傾けたときの干渉縞であり、中列は同軸に干渉させた干渉縞である。右列は位相の形状を表わす。

決定しておく、干渉縞の渦巻きの向きにより Laguerre-Gauss モードビームの次数である  $l$  の符号がわかる。( 本実験では、Gauss モードビームより Laguerre-Gauss モードビームの曲率半径を大きくしている。 ) ここで、この次数  $l$  を topological charge と呼ぶことにする。

topological charge の符号によって干渉縞の渦の向きが変化する。ある生成した Hermite-Gauss モードに対してモードコンバータを回転させることで、topological charge の符号を変えた。図 5.3 からわかるようにモードコンバータに入射したモードは 2 次の Hermite-Gauss であり、出てきたモードは 2 次の Laguerre-Gauss である。図の ( a ) , ( b ) 共にモードコンバータを出てきたビームの見た目は全く変わらない。しかしながら、干渉させてその干渉縞を観察すると違いが現われてくる。Hermite-Gauss モードの対称軸に対してモードコンバータのシリンドリカルレンズのペアを  $45^\circ$  傾ける ( 図 5.3 ( a ) を参照 ) と生成したモードは  $n=2, m=0$  の Laguerre-Gauss モードであり、干渉縞の渦の向きは図 5.4 ( a1 ) になる。この波面は 2 つの螺旋から成っており、ビームの進行方向に対して時計回り ( 右ネジ ) の螺旋を描く ( a2 ) 。このときの topological charge である  $l$  は  $n-m$  で表わされるので  $+2$  となる。モードコンバータをその状態から  $90^\circ$  回転させ対称軸から  $-45^\circ$  傾ける ( 図 5.3 ( b ) を参照 ) と生成したモードは  $n=0, m=2$  の Laguerre-Gauss モードとなり topological charge は  $-2$  となる。干渉縞の渦の向きは図 5.4 ( b1 ) のように逆回りになる。このビームの波面も 2 つの螺旋から成っており、ビームの進行方向に対して反時計回り ( 左ネジ ) の螺旋を描く ( b2 ) 。この ( a1 ) , ( b1 ) の明である 2 つの帯の位相差は  $2\pi$  であり、軸の周りに 1 周させたとき、位相は  $4\pi$  ずれている。

## 5.2 軌道角運動量を持つ光

光子の運動量密度  $\mathbf{p}$  はエネルギー密度の流れである Poyning vector の時間平均  $\langle \mathbf{S} \rangle$  を光速の 2 乗で割ったも



にトラップされ、そのビームの散乱力（ビームの伝播方向に働く力）により粒子の質量（浮力を考慮した質量）×重力とその力が等しくなる位置まで持ち上げられる。そうして、リング上の強度分布が一様であれば方位方向には束縛する力がないため、そのビームから軌道角運動量を受け取った粒子はそのリング上で回転する。図 5.6 (i) は、15 次

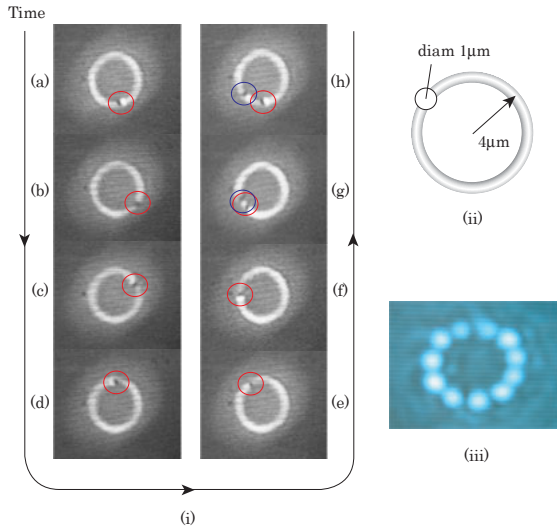


図 5.6 15 次の LG を用いた微粒子の軌道

Laguerre-Gauss モードビームを  $1\mu\text{m}$  の粒子に照射したときの粒子の位置を時間の経過とともに観察した写真である。ビームのパワーは  $9\text{mW}$  程度であり、粒子の回転半径は約  $4\mu\text{m}$  である。ピントがずれて見えにくくなっているが、粒子の縁が影になって見えている。図 (ii) は図 (i) に対しての粒子とビーム径の大きさを示す。粒子は反時計回りに回転している。初めは 1 つの粒子だけがトラップされ回転していたが、(g) と (h) の写真では 2 つ粒子が写っている。これは、観察していたピントよりも下の方で勾配力によりトラップされ散乱力によって浮上してきた粒子 (g) が、初めに回転していた粒子を追うようにして回転し始めた (h)。粒子が 1 つの場合、ビームのリング上にトラップされた粒子は滑らかに回転せず、止まったり動いたりした。この理由は、生成した Laguerre-Gauss モードの強度分布が一様でないため強度の弱いところでは回転せずに止まってしまうが、 $1\mu\text{m}$  の粒子は水中でブラウン運動をしているので、その運動方向が回転方向と一致したときに、再び動き出すと推測される。また、粒子が強度の大きいところに密集している場合（数珠のようになっているとき図 (iii) を参照：4 次のモード、ビーム径は約  $4\mu\text{m}$  である。）滑らかに回転した。これは、強度の強いところで軌道角運動量を受け取る粒子が常にいるため、それぞれの粒子が押しやりながら回転すると考えられる。

この topological charge の符号の変化によって対象物の回転方向も変化する。

$$J_z = \hbar l \begin{cases} l > 0 & (\text{時計回り}) \\ l < 0 & (\text{反時計回り}) \end{cases} \quad (5.10)$$

以下に図 5.7 に回転方向と干渉縞の関係を示す。図 (a) は 11 次の Laguerre-Gauss モードビームのプロファイルであ

る。図 (b) は、 $l = +11$  のときの干渉縞であり、トラップされた粒子は時計回りに回転した (d)。図 (c) は、 $l = -11$  のときの干渉縞であり、(b) とは逆向きの渦を巻いている。このとき、トラップされた粒子は反時計回りに回転した (e)。

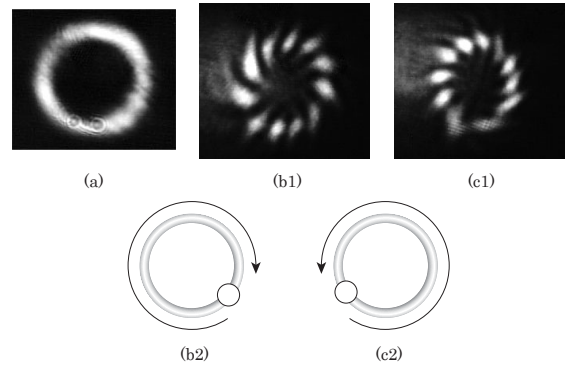


図 5.7 11 次の Laguerre-Gauss モードビームについて、(a) はビームプロファイルであり、(b1) と (b2) は topological charge が +11 の干渉縞とビームの照射方向から見た粒子の回転方向を示す。(c1) (c2) は topological charge が -11 の干渉縞とビームの照射方向から見た粒子の回転方向を示す。

### 5.2.2 軌道角運動量の測定・解析

粒子は、粘性のある媒質中を運動するときに受ける粘性抵抗力によるトルクとビームから受け取る軌道角運動量のトルクが釣り合ったとき、角速度が一定となり回転は定常状態となる。従って、粒子が水中で受ける粘性抵抗力によるトルクを求めることで、粒子の軌道角運動量を求めることができる。

水中で半径  $\rho$  の粒子が受ける粘性抵抗力によるトルクは次のように表わせる。

$$\tau = -r \times F_{\text{viscosity}} \quad (5.11)$$

$$= 6\pi\eta\rho r^2\omega \quad [\text{m} \cdot \text{N}] \quad (5.12)$$

角速度の測定は、ビデオのコマ送り (30 コマ/sec である) を使い時間と粒子の位置で測定した。測定では、Laguerre-Gauss モードビームの強度分布を一様に生成することができなかった。そのため、粒子が 1 周するときの時間を測定すると速度が一様でないために遅くなる。粒子がリング上を  $1/4$  周するときは速度を一様とみなせたので、そのときの時間を測定した。測定した時間から周期  $T$  を求め、角速度  $\omega$  を求めた。回転半径  $r$  は、粒子を密集させたときの粒子の中心を結んでできる正多角形の外接円の半径とした。2 次から 5 次の Laguerre-Gauss モードビームによるトラップされた粒子角速度のパワー依存性を測定した  $\omega$  と見積もった回転半径  $r$  から粒子速度を求めた。図 5.8 に粒子速度のパワー依存性を示す。(グラフに示すパワーは Laguerre-Gauss モード生成後のレーザーパワーである。粒子に照射するときのパワーは、カバーガラス・レンズの反射ロスを考慮に入れ、図に示すパワーの 90% 程度である。)

この速度を (5.12) 式に代入して、粒子の軌道角運動量を求めた。図 5.9 に粒子のトルクのパワー依存性を示す。

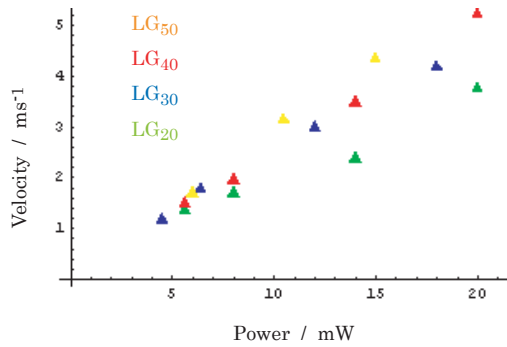


図 5.8 粒子速度のパワー依存性

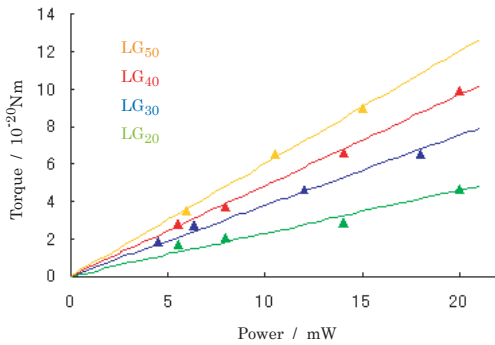


図 5.9 トルクのパワー依存性

1 光子当たりの軌道角運動量が次数によってどのように変化するかを調べるために、図 5.9 に原点を通るように線形関数をフィットさせその傾きを調べた。傾きの結果を図 5.10 に示す。

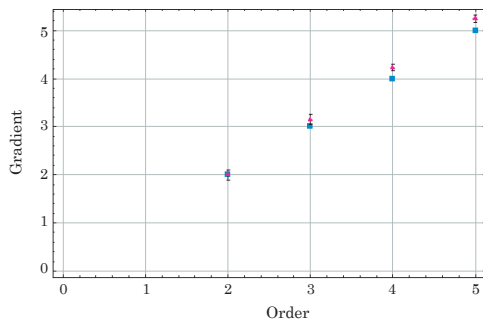


図 5.10 次数とフィットした直線の傾き

この結果から次数に対して次数倍ずつ増加しているのがわかった。本実験は、理論とよく一致した結果を得ることができた。

## 6 まとめ

今回、Laguerre-Gauss モードを生成するための Fabry-Perot 共振器とシリンドリカルレンズペアを使ったモードコンバータを設計・作製し、生成したモードの共振周波数を基準としたレーザー周波数の安定化を行い、1 次から高次までの安定な Laguerre-Gauss モードビームを生成することに成功した。また、このビームの特性である特異点の存在を

Gauss モードビームとティルト干渉させ、得られた干渉縞から確かめた。軌道角運動量をもつことを確認するために、このビームを  $1\mu\text{m}$  のポリスチレンラテックス球に下方向から集光照射し、その粒子が回転することから確認した。固定した Hermite-Gauss モードに対してモードコンバータを  $\pm 45^\circ$  傾け、ビームを入射させることで、topological charge の符号を変化させ、それによって粒子の回転方向が変わることを確かめた。topological charge の符号の変化によって、干渉縞の渦の向きも変化することを Gauss モードビームと同軸干渉させることで観察した。また、パワー、次数依存による角速度を測定し、その値を用いて粒子に働く軌道角運動量を計算から求めた。その結果に線形関数でフィットし、その直線の傾きから 1 光子当たりの軌道角運動量が次数に比例していることがわかった。この実験結果と理論値がよく一致した結果となった。

## 7 今後の予定

開口数の大きい ( $\text{NA}=1.3$ ) 対物レンズを使用して、この Laguerre-Gauss モードビームを上方向から粒子に照射し、光ピンセットとして 3 次元操作を行う。また、Gauss モードビームを光ピンセットの光源として用いた場合とのレーザーパワーの比較実験も行う。周辺媒質よりも小さい屈折率をもつ粒子を対象物として選び、上方向から Laguerre-Gauss モードビームを照射し、反射による散乱力で 3 次元操作が可能かどうかを検証する。また、生細胞を使ったマイクロ操作を行う予定である。

## 参考文献

- [1] A.Ashkin, Phys.Rev.Lett. 24,156 (1970)
- [2] M.w.Beijersbergen, L.Allen, H.E.L.O.van der Veen and J.P.woerdman, Optics Comm. 96, 123 (1993)
- [3] David L.Fried and Jeffrey L.Vaughn, Appl.Opt 31, 2865 (1992)
- [4] A.T.O'Neil, I.Mac Vicar, L.Allen, and M.J.Padgett, Phys.Rev.Lett. 88, 053601 (2002)
- [5] I.V.Basistiny, M.S.Soskin and M.V.Vasnetsov, Optics Comm. 119, 604(1995)
- [6] 武田光夫, 応用物理, 65, 811(1996)
- [7] 霜田光一著, 「レーザー物理入門」(岩波書店)