

原子のレーザー冷却の基礎

C. コーヘン-タンノージ / W. D. フィリップス 著

LES HOUCHEs, SESSION LIII, 1990

FUNDAMENTAL SYSTEMS IN QUANTUM OPTICS

ATOMIC MOTION IN LASER LIGHT: C. COHEN-TANNOUJJI
LASER COOLING, OPTICAL TRAPS AND OPTICAL MOLLASSES:
W. D. PHILLIPS

ATOMIC MOTION IN LASER LIGHT

C. COHEN-TANNOUJDI

*Collège de France
and
Département de Physique de
l'Ecole Normale Supérieure
Paris, France*

LASER COOLING, OPTICAL TRAPS AND OPTICAL MOLASSES

W. D. PHILLIPS

*Phys A167
National Institute of Standards and Technology
Gaithersburg, MD 20899
USA*

From

J. Dalibard, J. M. Raimond and J. Zinn-Justin, eds.

Les Houches, Session LIII, 1990

Systèmes Fondamentaux en Optique Quantique

/Fundamental Systems in Quantum Optics

© Elsevier Science Publishers B. V., 1992

目次

第 1 章 概論	1
1.1 このコースの目的	1
1.2 相互作用する系	1
1.3 特性時間	2
1.4 コースの概要	3
第 2 章 半古典限界における放射圧	5
2.1 ハミルトニアン	5
2.2 ハイゼンベルグ方程式	6
2.3 半古典限界	7
2.3.1 局在条件	7
2.3.2 局在はずっと続くか？	8
2.4 平均力とランジュバン力	10
2.5 光ブロッホ方程式 (OBE)	11
第 3 章 最初に静止していた 2 準位原子に対する平均放射圧	14
3.1 光ブロッホ方程式の定常解	14
3.2 反動的な応答と散逸的な応答	15
3.3 散逸力 - 放射圧	16
3.4 反動力 - 双極子力	17
第 4 章 動く原子 摩擦力	20
4.1 単純な平面レーザー光の場合	20
4.2 レーザー定在波	22
4.2.1 低い速度の極限 ($k_L \ll \Gamma$)	22
4.2.2 任意の速度 連続的な摩擦力を得る方法	24
4.3 $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$ 遷移に対する $\sigma^+ - \sigma^-$ 配置	26
第 5 章 放射圧のゆらぎ	27
5.1 古典的ブラウン運動	27
5.1.1 ランジュバン方程式	27
5.1.2 運動量拡散係数	28
5.1.3 古典回帰理論	29
5.1.4 クラマース-フォッカー-プランク方程式	30
5.2 ハイゼンベルグ表記における運動量拡散の解析	32

5.2.1	運動量拡散係数とランジュバン力演算子	32
5.2.2	ランジュバン力演算子の相関関数	33
5.2.3	物理的考察	34
5.2.4	レーザー冷却におけるドップラー限界	36
5.3	原子のウィグナー関数に対する量子力学的運動方程式	37
5.3.1	原子のウィグナー関数	37
5.3.2	一般化した光プロッホ方程式	38
5.3.3	クラマース-フォッカー-プランク方程式を導く近似	38
5.3.4	物理的考察	39
第 6 章	摂動における基本物理過程	42
6.1	はじめに	42
6.2	平面波中に原子がいる単純な場合	43
6.3	定在波中の節にある原子	45
6.3.1	原子+場の系の初期状態	45
6.3.2	初期分布状態の一つに残る確率振幅	46
6.3.3	物理的な考察	49
6.4	定在波中の全ての点にある原子	51
6.4.1	原子の初期状態	51
6.4.2	時間 T における状態ベクトル $A+F$ に対する新しい表現	52
6.4.3	入射光子の吸収	53
6.4.4	非相関再分配と双極子力	53
6.4.5	全運動量拡散係数	54
6.5	定在波中の原子の運動	54
第 7 章	強い光の極限における物理的な機構	56
7.1	はじめに	56
7.2	ドレスド原子による方法	57
7.3	双極子力のドレスド原子による解釈	59
7.4	強いレーザー定在波中の原子の運動-シシフォス冷却	61
第 8 章	光ポンピング、光シフトおよび放射圧	64
8.1	はじめに	64
8.2	多準位原子に対する基本方程式	65
8.2.1	近似	65
8.2.2	光プロッホ方程式の演算子形式	66
8.2.3	力の平均の表式	67
8.3	飽和より十分低い光強度および低速度限界	67
8.3.1	新しい近似	67
8.3.2	励起状態の断熱消去	68
8.3.3	基底状態の密度行列の運動方程式	69
8.4	基底状態磁気副準位の光シフト	70
8.4.1	運動方程式のハミルトニアンの部分	70

8.4.2	光シフトの性質	71
8.5	光ポンピングに付随する緩和	71
8.5.1	離散率	71
8.5.2	自然放出による基底状態への供給	72
8.5.3	ゼーマンコヒーレンスの効果	72
8.5.4	動く原子の場合	73
8.6	力の平均の一般的な性質	73
8.6.1	反動的成分と散逸的成分	73
8.6.2	反動的成分の解釈	74
8.6.3	散逸的成分の解釈	76
8.6.4	一次元モラセズのある特定の場合	77
第 9 章	弱い光によるシシフォス冷却	78
9.1	はじめに	78
9.2	モデルの提示	79
9.2.1	レーザー光の配置	79
9.2.2	原子の遷移。平均力に対する簡単化	79
9.3	内部自由度におけるダイナミックス	80
9.3.1	基底状態の副準位の光シフト	80
9.3.2	光ポンピング確率	82
9.3.3	静止した原子の定常状態の分布数	83
9.4	動いている原子に対する冷却機構	83
9.4.1	シシフォス効果	83
9.4.2	しきい値強度 – 冷却限界	85
9.4.3	内部時間と外部時間との比較	85
9.5	ジャンプする領域 ($\Omega_{osc}\tau_P \ll 1$)	86
9.5.1	速度 v の原子の内部状態	87
9.5.2	速度に依存する平均的な力。摩擦係数	87
9.5.3	平衡温度	88
9.6	弱い光によるシシフォス冷却の冷却限界	89
9.6.1	完全に量子力学的な取り扱いによる結果	89
9.6.2	振動する領域 ($\Omega_{osc}\tau_P \gg 1$)	90
第 10 章	$\sigma^+ - \sigma^-$ 配置 – 半古典論	92
10.1	はじめに	92
10.2	力の平均の一般的な表現	94
10.2.1	光シフトに関する有効ハミルトニアン	94
10.2.2	復元力	95
10.2.3	散乱力	95
10.3	静止した原子の内部状態	96
10.3.1	光シフト	96
10.3.2	光ポンピングと定常状態の分布数	98
10.4	動いている原子の内部状態	99

10.4.1	回転しながら並進運動する系への変換	99
10.4.2	新しいハミルトニアン – 新しい運動方程式	99
10.4.3	平均力に対する新しい表現	101
10.5	$J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対する摩擦力	101
10.5.1	摩擦係数	101
10.5.2	取り込み速度範囲	103
10.5.3	平衡温度のおおよその値	104
10.5.4	異常運動量拡散	104
10.6	$J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対するコヒーレントポピュレーショントラッピング	105
10.6.1	定性的な議論	105
10.6.2	全蛍光発光率の速度依存性	106
10.6.3	原子の運動にもたらされる結果	107
第 11 章 反跳限界以下のレーザー冷却		109
11.1	はじめに	109
11.1.1	単一光子の反跳限界	109
11.1.2	速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピング	109
11.1.3	速度空間における光ポンピング	110
11.1.4	半古典論的な扱いの誤り	110
11.2	1次元の量子論的な扱い	110
11.2.1	レーザー光と結合しない原子の量子状態	111
11.2.2	原子の運動によって誘起される結合	112
11.2.3	自然放出による減衰率	113
11.2.4	異なる状態グループ間の自然放出による移動	116
11.2.5	期待される最終的な運動量分布	117
11.3	高次元への一般化	118
11.3.1	吸収強度に対する等価式	118
11.3.2	トラップ状態が存在する条件	119
11.3.3	トラップ状態を探す	119

第1章 概論

1.1 このコースの目的

このコースの目的はレーザー光の中での原子の運動を支配する基本過程およびその物理的なメカニズムを論じる事にある。この数年の間にレーザー光によって原子を「操作する」可能性を示す驚異的な研究結果が得られている。こうしてレーザー冷却と捕捉と呼ばれる大きく発展する研究分野が現れた(そのいくつかの例としてこの巻の W. Phillips, R. Blatt, H. Walther のコースを見よ)。これらの新しい方法の(理論的な)限界を明らかにするため、いくつかの理論的な方法を展開する。このコースでは、これらの方法をそれぞれ解説し、その有利な点、また問題点、そしてその有効範囲を比較する。

ここでは特に物理的な考え方と物理的なメカニズムに重点を置くこととする。(他の)文献で入手可能な場合には計算の詳細は省いてこのような計算の原理を呼び起こすだけにし、その結果の解釈や導入する多くの近似の議論により多くの時間を割くつもりである。またここでは中性原子のみを扱う。イオンのレーザー冷却に関しては R. Blatt と H. Walther のコースに詳しく議論されている。

1.2 相互作用する系

原子の媒質は非常に希釈であると仮定し、原子間相互作用を無視できるとする。そのため単原子 A を考え、励起状態 e と基底状態 g がエネルギー間隔

$$E_e - E_g = \hbar\omega_A \quad (1.1)$$

だけ離れているとする。ここで ω_A は原子周波数と呼ばれる。原子の重要な観測量は電気双極子モーメント d 、位置 R 、そして重心運動の運動量 P である。この原子 A は一方ではレーザー光の場 L と結合し、他方では他の全ての放射場と結合する。これは最初から光子が全く無い状態で、量子真空場 V と呼ばれる場を形成している(図 1.1 を見よ)。

レーザー場 L は周波数 ω_L の単色光と仮定する。もしレーザー場の初期状態がコヒーレント状態だとすると、これを複素数の外場

$$E_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r}) \cos[\omega_L t + \Phi(\mathbf{r})], \quad (1.2)$$

として記述することがもっともだということが示される(文献 [1] および文献 [2] の演習 17 を見よ)。ここで $\epsilon(\mathbf{r})$ 、 $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ と $\Phi(\mathbf{r})$ はそれぞれ r におけるレーザー場の分極、振幅および位相を表す。原子とレーザーの結合係数 V_{AL} はラビ周波数 Ω_1 によって特徴づけられ、これは双極子モーメント $\langle e|d|g\rangle$ とレーザー場 $E_L(\mathbf{r}, t)$ の内積に比例する。 V_{AL} によるハミルトニアン の時間発展は原子によるレーザー光の吸収および誘導放出の基礎過程を用いて解析する事ができる。

原子と真空場の結合係数 V_{AV} は励起状態の原子からの自然放出に対するものである。これは励起状態 e の自然幅 Γ によって特徴づけられ、またこれは励起状態 e からの自然放出確率に等しい。



図 1.1: 相互作用する系とそれらの各結合

V は無限の自由度を持つ大きな系であるので、結合係数 V_{AV} は A の時間発展において減衰と揺らぎをもたらす。このコースの主要な目的の一つはこれらの揺らぎによってもたらされる限界を調べたり、これらの最小値をいかにして下げるか、またはこの限界を回避しうるかを説明する事にある。

A の時間発展に対して二つの極限的な領域を考える事ができる。非常に短い相互作用時間、すなわち $t \ll \Gamma^{-1}$ に対しては、自然放出を無視する事ができ、 $A + L$ の時間発展はシュレディンガー方程式によって表される。非常に長い相互作用時間、すなわち $t \gg \Gamma^{-1}$ に対しては、相互作用時間 t の間に数回の自然放出が起こり、 A の「換算」発展（真空場の自由度に渡ってトレースをとる）はマスター方程式またはランジュバン方程式によって表される。この二番目の場合は最も多く研究されており、次にこれを詳しく解析する。

1.3 特性時間

これからの議論に対して、いくつかの特性時間を導入し、これらの大きさのオーダーを比較しておく事は有用である。

この問題において最も短い時間スケールは真空場の相関時間 τ_c である。真空揺らぎ（文献 [3] の第 3 章および文献 [4] の第 III 章を見よ）は非常に広い周波数スペクトル $J(\omega)$ を持っており、これは原子周波数 ω_A の周りでは ω に対して非常にゆっくり変化する： $J(\omega)$ の変化に対する典型的な周波数スケールは ω_A それ自身である。これから

$$\tau_c \simeq 1/\omega_A \quad (1.3)$$

が得られる。 τ_c は他の全ての特性時間よりも非常に短いという事から真空場 V は「熱浴」として扱う事が可能になり、この原子 A の時間発展への影響は緩和過程として表す事ができる（文献 [5] の第 4 章およびその参考文献、そして文献 [2] の第 IV 章を見よ）。

原子の内部自由度に対しては、最も明確な特性時間は励起状態 e の放射寿命 τ_R で、これは e の自然幅 Γ の逆数

$$\tau_R = 1/\Gamma \quad (1.4)$$

で、またこれは自然放出に伴う緩和時間とみなすことができる。よく知られた関係式 $\Gamma \ll \omega_A$ は $\tau_R \gg \tau_c$ を意味する。

基底状態のゼーマン副準位の存在はこれ以外の内部緩和時間をもたらすことになり、これは光ポンピングと関係がある [6]。吸収-自然放出の周期は、また蛍光周期とも呼ばれるが、この繰り返し起こる周期によって原子はゼーマン副準位 g の中の一つ g_m から g'_m へ移る。レーザー強度 I_L が低い場合には、このような光ポンピング周期が現れる確率 Γ' を定義する事が可能で、これは I_L に比例する。この確率の逆数

$$\tau_P = 1/\Gamma' \quad (1.5)$$

は光ポンピング時間 τ_P と呼ばれ、原子が光ポンピング周期を終えるまでの平均待ち時間と考える事ができる。レーザー強度 I_L が低い場合、

$$\tau_P \gg \tau_R \quad (1.6)$$

となる。このコースの第二部において多準位原子に対するこのような長い内部緩和時間の存在が非常に効率的な新しい冷却機構をもたらすことを示す。

2 準位原子に対しては、レーザー強度が低い場合には蛍光確率 Γ' と同じ原子の 2 つの蛍光周期の間の平均時間 $1/\Gamma'$ が定義でき、これは τ_R よりも非常に長い。しかしこのような蛍光周期は原子を同じ基底状態に戻し、さらなる内部緩和時間をもたらさない。実際、2 準位原子に対しては、内部自由度の時間発展を表す光ブロッホ方程式に現れる唯一の減衰時間は全て τ_R と同じオーダーである。

原子の外部 (すなわち並進運動の) 自由度に対しては、非常に重要な特性時間は原子の速度の減衰時間である。第 4 章 (4.1 節) でこれが

$$T_{ext} = \hbar/E_R \quad (1.7)$$

と同じオーダーである事を示す。ここで

$$E_R = \hbar^2 k_L^2 / 2M \quad (1.8)$$

は原子がレーザー光子を吸収または放出する時の反跳エネルギーである。式 (1.8) において M は原子の全質量で、 $k_L = \omega_L/c$ である。

ほとんどの許容遷移に対しては、

$$\hbar\Gamma \gg E_R \quad (1.9)$$

となる。例としてナトリウムの共鳴線に対しては、 $\hbar\Gamma = 400E_R$ である。ただ一つの内部時間 $T_{int} = \tau_R$ がある時、式 (1.4)、(1.7) および (1.9) より

$$T_{ext} \gg T_{int} \quad (1.10)$$

が得られる。この時間スケールの分離は原子の運動の解析を非常に簡単にする。次の章で見られるように、断熱的に速い内部変数を取り除く事ができ、外部変数に対する換算運動方程式を導く。

しかし、条件 (1.10) はいつでも満たされているとは限らない事を忘れておく必要がある。基底状態が縮退した原子に対しては、内部時間 τ_P は強度が低い時には外部時間 (1.7) と同程度またはそれ以上に長くなり得る。 T_{ext} よりも短い外部時間も現れ、これは光ポテンシャルの井戸の底にある原子の振動周期 T_{OSC} などがそうである。この様な場合、内部変数を消去する事はもはや不可能で、理論的な解析はより複雑なものになる。しかし、このコースの最後に示すが、このような状況もまた非常に興味深く、なぜならこのような場合は一般にレーザー冷却によって達成される限界温度は非常に低くなるからである。

1.4 コースの概要

このコースの最初の部分において、すなわち第 2 章から第 7 章までにおいては、話を非縮退した基底状態を持つ原子の場合に限定する。これは例えば遷移 $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ の場合にあたる。さら

に強い定磁場 B を加えると仮定すると、これは二つのゼーマン副準位 $|e, m = \pm 1\rangle$ を共鳴から非常に大きく離す事になり、 $|e\rangle = |e, m = 0\rangle$ と $|g\rangle = |g, m = 0\rangle$ を持つ 2 準位原子 $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ となる。このため、双極子モーメント演算子 d の唯一のゼロでない行列要素は

$$\langle e|d|g\rangle = d\epsilon_z = \langle g|d|e\rangle \quad (1.11)$$

と書け、 d は実数で ϵ_z は z 軸方向の単位ベクトルである。しかしある文献では $B = 0$ において励起状態の三つのゼーマン副準位 $|e, m = -1, 0, +1\rangle$ がそのまま保たれている。

原子の波束はレーザー光波の中において非常に良く局在していると仮定して (半古典限界)、第 2 章において先ず始めに放射圧の演算子の表式を導出する。これは原子の波束の中心の運動を支配する。力の演算子の平均値は最初に静止している原子に対して解析し (第 3 章)、また動いている原子に対しても行う (第 4 章)。これによって反作用による力、散逸力および摩擦力の表記を紹介する。放射圧のその平均値近傍の揺らぎは原子の運動量の拡散をもたらす、これは原子を加熱し、レーザー冷却の効率の限界を与える。これらの揺らぎはハイゼンベルグ表記およびシュレディンガー表記の両方において扱う (第 5 章)。これらの全ての結果は今ではよく知られており、ここではこれらの導出の簡単なあらましを示すだけにしておき、読者には既存のより詳しい文献を参照することとする。一方、物理的なメカニズムに対してより多くの時間を割く。特に、第 6 章ではレーザー光の定在波の節にある原子に密接に関わる問題に関するオリジナルな結果を示す。(光が無い) このような場所で起こる異常に大きな運動量拡散が異なる散乱強度の間の干渉効果で、これはまた新しい種類の「相関のある再配置」過程の存在を明らかにすることを示す。強い光強度において起こる物理的なメカニズムはまた第 7 章においていわゆるドレスト原子の手法によって解析される。

このコースの第二部 (第 8 章から 11 章) は基底状態にいくつかのゼーマン副準位がある原子を扱う。例えば、単純な $J_g = 1/2$ または $J_g = 1$ の原子の遷移を考える。第 8 章において先ず弱い強度の光がゆっくり運動する多準位原子の内部状態のダイナミクスに与える影響に関するいくつかの基本的な結果を取り上げる。いくつかの効果、例えば光ポンピングや光シフトを簡単に復習する。それからこれらの効果が数桁ほどレーザー冷却の効率を改善するのに共同的に働くことを示す。二つの最近の発展を詳しく扱う。最初のそれは大きな偏光勾配を示すレーザー光の配置によるレーザー冷却に関するものである (第 9、10 章)。最近測定された非常に低い温度 (数マイクロケルビン) に対する物理的なメカニズムを解析する。偏光勾配冷却の限界に関するいくつかの新しい結果を紹介する。最後に、第 11 章においていわゆる反跳限界以下に原子を冷却する速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピングを用いた方法を議論する。

第2章 半古典限界における放射圧

この章では文献 [8] の内容を示す。

2.1 ハミルトニアン

図 1.1 に示す全体の系のハミルトニアン H は

$$H = H_A + H_V + V_{AL} + V_{AV} \quad (2.1)$$

と表す事ができる。第一項

$$H_A = H_A^{ext} + H_A^{int} = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \hbar\omega_A|e\rangle\langle e| \quad (2.2)$$

は原子のハミルトニアンで、重心の運動エネルギーと内部エネルギーの和である (ここでは $E_g = 0$ とする)。第 2 項

$$H_V = \sum_j \hbar\omega_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}) \quad (2.3)$$

は量子放射場のエネルギーで (文献 [4] の第 III 章を見よ)、これは最初は真空状態で、これは多くのモード j の和として表される。ここではレーザー場 L は複素数の外部場として扱うため、式 (2.1) には L に対するハミルトニアン H_L は無い。式 (2.1) の第 3 項

$$V_{AL} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{R}, t) \quad (2.4)$$

は原子の双極子モーメント \mathbf{d} と式 (1.2) に与えられているレーザー電場 $\mathbf{E}_L(\mathbf{R}, t)$ の間の結合を重心の位置 \mathbf{R} における値である (電気双極子近似)。最後に、式 (2.1) の最終項は原子と真空場の結合

$$V_{AV} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (2.5)$$

を表し、電場演算子 (文献 [4] の第 III 章を見よ) のモード展開は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_j \mathcal{E}_j a_j \boldsymbol{\epsilon}_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} + h.c., \quad (2.6)$$

と与えられ、 a_j^\dagger (と a_j) は運動量 $\hbar\mathbf{k}_j$ の光子の生成 (消滅) 演算子で、エネルギー $\hbar\omega_j = \hbar c k_j$ と分極 $\boldsymbol{\epsilon}_j$ 、 \mathcal{E}_j は規格化定数で

$$\mathcal{E}_j = \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0 L^3}} \quad (2.7)$$

に等しい (L^3 は量子化体積である)。

V_{AL} および V_{AV} において「非共鳴項」を無視するいわゆる回転波近似 (r.w.a.) と呼ばれる方法がしばしば用いられる。 d に対して式 (1.11) から導き出される

$$\mathbf{d} = d\epsilon_z(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|), \quad (2.8)$$

を用い、

$$\hbar\Omega_1(\mathbf{r}) = -d\mathcal{E}(\mathbf{r})\epsilon_z \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

で与えられるラビ周波数 Ω_1 を導入し、 V_{AL} の非共鳴項 $e^{-i\omega_L t}|g\rangle\langle e|$ (とそのエルミート共役) を無視すると、

$$V_{AL} = \frac{\hbar\Omega_1(\mathbf{R})}{2} \left[e^{-i\Phi(\mathbf{R})} e^{-i\omega_L t} |e\rangle\langle g| + h.c. \right] \quad (2.10)$$

が導出される。同様に V_{AV} の非共鳴項 $a_j|g\rangle\langle e|$ (とそのエルミート共役) を無視できる。

2.2 ハイゼンベルグ方程式

原子 A の重心運動を調べるため、 \mathbf{R} と \mathbf{P} に対するハイゼンベルグ方程式から始める。 \mathbf{R} の運動方程式は

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{R}, H] = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad (2.11a)$$

となり、 \mathbf{P}/M は重心の速度である。これより力を表す演算子 $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = M\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}}$ は \mathbf{P} に対するハイゼンベルグ方程式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= M\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{P}, H] = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}} \\ &= -\nabla V_{AL}(\mathbf{R}) - \nabla V_{AV}(\mathbf{R}) \\ &= \text{力の演算子 } \mathbf{F}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (2.11b)$$

$\nabla V_{AV}(\mathbf{R})$ に現れる量子力学的な電場に対する演算子 $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ は $a_j(t)$ に対するハイゼンベルグ方程式を用いて変換できる。このソース項を含む線形微分方程式一般解は

$$a_j(t) = a_j(0)e^{-i\omega_j t} + a_j^{\text{source}}(t) \quad (2.12)$$

と書ける (文献 [9] と [2] の A_V を見よ)。ここで、最初の項

$$a_j^{\text{vac}}(t) = a_j(0)e^{-i\omega_j t} \quad (2.13)$$

は均一な方程式の一般解で、初期時間 $t=0$ から t の間に自由に発展する真空場に対応する。そして第二項は不均一な方程式の特別な解の一つで、これは時間 $t=0$ と t の間の原子の双極子モーメントに由来する「ソースの場」に相当する。式 (2.12) に $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ のモードの展開式 (2.6) を代入することにより、電場の演算子における二つの寄与を分離することができる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}^{\text{vac}}(\mathbf{R}, t) + \mathbf{E}^{\text{source}}(\mathbf{R}, t) \quad (2.14)$$

これはそれぞれ、真空の自由場とソースの場に相当する。

今までの全ての表記においては、最終的な場の演算子 $a_j(t)$ は同時刻の全ての原子の演算子と交換する。なぜなら場と原子の演算子は $t = 0$ で交換し (これらは異なる空間において作用する)、またユニタリーなハミルトニアンから t まで時間発展は交換関係を保存するからである。 $a_j(t)$ と原子の演算子の間の全ての可能な順番はこのため等価である。これは $a_j^{vac}(t)$ および $a_j^{source}(t)$ に対してはそれぞれ正しくない。 $a_j(t)$ と原子の演算子に対して最初に選んだ順番に依存して、これに相当する真空場とソースの場との寄与は異なって現れる。一方、その和はもちろん最初の選択に依存しない (文 [9] および [2] を見よ、補足 A_V)。これからは標準的な順番を用いる。これは全ての消滅演算子 $a_j(t)$ が最も右にくるように、また全ての生成演算子 a_j^\dagger が最も左にくるようにとる。このような順番は一般的に計算が簡単になり、特に量子的な場の真空状態 $|0\rangle$ における平均値をとる場合、そうである。非常に良く知られた関係

$$a_j(0)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a_j^\dagger(0) = 0, \quad (2.15)$$

の結果、真空場の真空の平均値への寄与は消えてしまう。しかしこれ以外の順番も有用であることを心に留めておく必要がある。例えば、完全に対称な順番は物理的な解釈には便利である [10]。

いま、式 (2.14) に式 (2.11b) の第二列目の第二項、 $-\nabla V_{AV}(\mathbf{E})$ を代入する。原子の双極子モーメント d によるソースの場 $E^{source}(\mathbf{r}, t)$ は双極子がある位置 \mathbf{R} において勾配が無くなる事が示される (この場は $\mathbf{r}-\mathbf{R}$ の偶関数である)。このためソースの場の力の演算子への寄与は無くなり、最終的に

$$F(\mathbf{R}, t) = \nabla V_{AL}(\mathbf{R}, t) - : \nabla V_{AV}^{vac}(\mathbf{R}, t) : \quad (2.16)$$

となる。ここで V_{AV}^{vac} は V_{AV} より全体の場を真空場に置き換える事によって得られ、 $:X:$ は X の順番に対して標準的な順番を選ぶ事を意味する。

2.3 半古典限界

今までは、原子の波束に関しては何の仮定もしてこなかった。ここで、文献 [8] および [11] と同様に、原子の運動の量子力学的な記述が原子の位置および運動量が良く定義されている古典的な記述にできるだけ近くなるように、この原子の波束は座標空間および運動量空間において非常に良く局在していると仮定する。

2.3.1 局在条件

$t=0$ において原子の外部状態は

$$\mathbf{r}_0 = \langle \mathbf{R}(0) \rangle \quad (2.17)$$

を中心とし、幅 $\Delta R(0)$ を持つ波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ によって記述されると仮定する。運動量空間においては、同じ状態は

$$\mathbf{p}_0 = \langle \mathbf{P}(0) \rangle \quad (2.18)$$

を中心とした幅 $\Delta P(0)$ を持つ波動関数によって記述され、この幅は $\Delta R(0)$ とハイゼンベルグの不等式

$$\Delta R(0)\Delta P(0) \geq \hbar \quad (2.19)$$

の関係を満たしている。この後で(2.3.2節において)、外場が単一の波動関数で記述される単一の固有状態ではなく、密度行列によって記述される統計的混合状態と与えられるより一般的な場合について述べる。

原子に与えられるレーザー光の力はレーザーの波長 λ_L 程度またはそれ以上の距離に渡って変化する。またこの力はドップラー効果 $k_L v$ によって原子の速度 v に依存する。ここで $k_L = 2\pi/\lambda_L$ である。レーザー光による励起に対する原子の明らかな応答の変化をもたらす速度変化 δv は $k_L \delta v$ が励起状態の自然幅 Γ またはそれ以上の程度の大きさである。

もし原子の波束が受ける力が擬古典的であるように、例えばその平均値を中心に非常に小さな揺らぎを持つようにしたければ、二つの条件を満たす必要がある。最初に、位置の広がり $\Delta R(0)$ は λ_L に比べて小さい必要がある。

$$\Delta R(0) \ll \lambda_L \quad \text{または等価的に} \quad k_L \Delta R(0) \ll 1 \quad (2.20)$$

二番目に、速度広がり $\Delta v(0) = \Delta P(0)/M$ は、これに対応するドップラー広がり Γ に比べて無視できるくらい十分小さい必要がある。

$$\frac{k_L \Delta P(0)}{M} \ll \Gamma \quad (2.21)$$

ここで条件(2.21)は Γ と波束のドップラー効果の平均 $k_L p_0/M$ の間の関係に対しては何も含まれていない事を付記しておく。このようなドップラー効果の平均は Γ より大きくなりうる。条件(2.21)はドップラー効果の広がりには影響するが、その平均には影響しない。

位置空間および運動量空間における波束の局在化を表す式(2.20)および(2.21)は、 $\Delta R(0)$ および $\Delta P(0)$ の上限を課し、これらはハイゼンベルグの不等式(2.19)によって制限を受ける。式(2.20)の両辺に式(2.21)の対応する両辺の値をかけると、両立条件が得られる。

$$\frac{\hbar k_L^2}{M} \ll \Gamma \quad (2.22)$$

ここで再び式(1.9)で与えられた条件 $E_R \ll \hbar \Gamma$ が見出され、これは $T_{ext} \gg T_{int}$ と等価である(式(1.10)を見よ)。このため二つの時間スケールが存在することが半古典限界のための必要条件として与えられる事がわかる。

2.3.2 局在はずっと続くか？

$t = 0$ において条件(2.20)および(2.21)が課されている。その後、時間 τ において位置および運動量の両方において引き続き良く局在しているとみなすことができるだろうか？

最初に $\tau \ll T_{EXT}$ と仮定すると、時間 $t = 0$ と $t = \tau$ の間の原子の運動量変化を無視することができる(T_{EXT} が P の減衰時間であることを思い出してもらいたい)。このため、

$$P(\tau) \simeq P(0) \quad (2.23a)$$

と書け、これから式(2.11a)を用いて

$$R(\tau) \simeq R(0) + \frac{P(0)}{M} \tau \quad (2.23b)$$

が得られる。これから

$$\Delta P(\tau) \simeq \Delta P(0) \quad (2.24a)$$

$$\Delta R(\tau) \simeq \Delta R(0) + \frac{\Delta P(0)}{M} \tau \quad (2.24b)$$

となる。式 (2.24a) から、運動量の局在化は変化しない。式 (2.24b) は良く知られた波束の空間的な拡散を表す。時間 $t = \tau$ において空間的な局在化が維持されるためには、

$$\frac{k_L \Delta P(0)}{M} \tau \ll 1 \quad (2.25)$$

である必要があり、これは τ があまり長くない必要があることを意味する。もし、 $\tau \simeq T_{int} \simeq \Gamma^{-1}$ とすると、式 (2.25) は式 (2.21) と等価であることがすぐに分かる。このため Γ^{-1} またはその数倍程度の時間の間における原子の波束の空間的な拡散は無視できる。これから時間間隔 τ を

$$T_{int} \ll \tau \ll T_{ext} \quad (2.26)$$

と取ることができる。これは T_{ext} より十分短い時間、時間 τ の間の原子の運動量の変化を無視する事ができ、また T_{int} より十分長い時間、内部自由度に対して平衡状態に達することができる。このため、よく局在化した波束に対する定常的な力という概念を用いることが可能になる。

より長い時間、 $\tau \ll T_{ext}$ においては、原子の運動量が変化しないとみなすことはもはやできない。原子と場の間の運動量交換のランダムな性質により、運動量拡散があり、これが ΔP を増加する傾向をもたらす。しかし、レーザー周波数を正しく同調すると、 ΔP を減少させるレーザー冷却効果もある。これら二つの過程の結果、 ΔP は式 (2.21) を引き続き満足する値になろうとすることが示される (5.2.4 節を見よ)。このため、原子の運動量が引き続きよく局在化した状況になる。これに対して、原子がトラップのポテンシャル (例えば、強い定在波の節の近傍) に強く束縛されているようないくつかの特別な場合の例外を除いて、全ての時間に渡って式 (2.20) を維持することは不可能であると思われる。空間的な拡散は一般的に λ_L をはるかに越えて ΔR を増加させる傾向にある。

しかしこのような解析によってざっと見てきた重要な点が残っている。 $t = 0$ においては重心の状態は波動関数によって表すことができたのにも関わらず、これが長い時間においてはこれがなりたたなくなる。数回の蛍光放出のサイクルが起こり、分離不可能な量子的相関が様々な自由度の間に現れ、この結果、重心の換算状態は単一の波動関数によって記述される純粋状態よりもむしろ密度行列 σ_A^{ext} によって表される統計的混合状態になる。このような場合、条件 (2.20) による空間的な局在化の特徴は非常に荒っぽいものになり、より精密な定義を与える必要がある。ここで $\langle r' | \sigma_A^{ext} | r'' \rangle$ を重心の位置演算子 R の固有状態を基底にした密度行列の表現 σ_A^{ext} とする。 σ_A^{ext} の対角項で与えられる、空間分布の幅 $\mathcal{R}(r) = \langle r' | \sigma_A^{ext} | r'' \rangle$ は上記の幅 ΔR で、これは λ_L よりはるかに大きく増加しうる。しかしもう一つ重要な特徴的な長さがあり、これは空間的コヒーレンス長 ξ_A と呼ばれ、また σ_A^{ext} の非対角項 (原子の空間的コヒーレンス) が無くなるまでの典型的な距離と定義される。

$$\langle r' | \sigma_A^{ext} | r'' \rangle \simeq 0 \quad \text{もし } |r' - r''| \gg \xi_A \text{ の場合} \quad (2.27)$$

ここで今扱っている問題においては ξ_A がいつでも λ_L よりはるかに小さい事を示すことができる。これは光子の散乱によって原子の空間的コヒーレンスは失われるという事に起因する [12]。ド・ブロイ波長 λ_P を持つ発射粒子をランダムに散乱する標的粒子 T を考える。 T の空間的コヒーレンスはこれらの散乱過程によって λ_P よりもはるかに小さな値になることを示すことができる [12]。

ここで標的は原子 A で、発射物は波長 λ_L のレーザー光子で、散乱過程はランダムに起きる蛍光サイクルに対応する。これから

$$\xi_A \ll \lambda_L \quad (2.28)$$

が導き出される。

式 (2.28) の意味するところを理解するために、 $t = \tau$ における σ_A^{ext} を波束の統計的な混合状態として表す事を考える。これらのそれぞれの波束は λ_L よりもはるかに小さい空間的な広がりを持っていてはならない。これは、そうでないと式 (2.28) が破れるからである。またこれらの波束の中心は空間的な広がりの幅である δR 程度に広がっており、これは λ_L よりもはるかに大きい。このような解析から局在化が全ての時間に渡って維持されていると考えることができることが分る。しかし、この局在化は全体の空間的な分布ではなく、個々の波束を統計的な混合状態として表す場合において関係している。たとえ時間 $t = 0$ において単一の波束から始めるとしても $t = \tau$ においていくつかの波束を考える必要があるのは、蛍光サイクルのランダムさから因るもので、これは原子の時間発展に揺らぎをもたらす。実際、 σ_A^{ext} が時間 $t = \tau$ において分解されうる様々な波束は古典的な意味における統計的な混合とみなすことができ、これは時間 $t = 0$ から $t = \tau$ までの間に原子に起こる様々な可能な”履歴”を表している。

2.4 平均力とランジュバン力

$t = 0$ において原子の波束が r_0 を中心として良く局在化し、

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{p}_0}{M} \quad (2.29)$$

を中心として十分小さな速度広がりを持っていると仮定する。もし $t = 0$ 付近での P の平均値の変化率、 $d\langle P \rangle/dt$ 、そして P の分散の変化率、 $d(\Delta P)^2/dt$ に興味があるとすると、一次の時間平均の $\langle F(\mathbf{R}(\tau), \tau) \rangle$ や、二次の時間平均、 $\langle F(\mathbf{R}(\tau), \tau) \cdot F(\mathbf{R}(\tau'), \tau') \rangle$ を計算しなくてはならない。ここで F は式 (2.16) において定義される力の演算子で、 τ および τ' は 0 に近い時間で、言い換えれば T_{ext} よりもはるかに小さい (しかししばしばこれは $T_{int} = \Gamma^{-1}$ の数倍程度の大きさになりうる)。 $\tau, \tau' \ll T_{ext}$ より、式 (2.23b) を用いて $\mathbf{R}(0)$ 、 $\mathbf{P}(0)$ 、 τ 、 τ' の関数として $\mathbf{R}(\tau)$ と $\mathbf{R}(\tau')$ を再表現する事ができる。さらに、波束は位置および運動量空間において良く局在化しているため、一次および二次の時間平均において演算子 $\mathbf{R}(0)$ と $\mathbf{P}(0)$ を複素数の r_0 および p_0 に置き換えることができる。このため $d\langle P \rangle/dt$ と $d(\Delta P)^2/dt$ の $t = 0$ 近傍での計算に対して、 $F(\mathbf{R}(\tau), \tau)$ を $F(\mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_0\tau, \tau)$ に置き換える事ができる。 $F(\mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_0\tau, \tau)$ は原子の内部変数および場の変数にのみ作用し、一方、 $F(\mathbf{R}(\tau), \tau)$ は外部変数にも作用することを記しておく。

$\langle P \rangle$ の変化率は $F(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, t)$ の平均値に等しく、これは $\mathcal{F}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, t)$ と書く。式 (2.16) の右辺の第二項の平均値は標準的な順番によって消えるため (式 (2.15) を見よ)、平均値に対しては以下の値を得る。

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, t) = -\langle \nabla V_{AL}(\mathbf{r}, t) \rangle |_{\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t} \quad (2.30)$$

$F(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, t)$ の揺らぎの部分、すなわち力のその平均値からの変位、

$$\delta F(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) - \mathcal{F}(\mathbf{r}, t), \quad (2.31)$$

は $d(\Delta P)^2/dt$ の計算において重要な役割を果たす。このように平均値がゼロで揺らいでいる力はランジュバン力と呼ばれる。式 (2.16) および (2.30) を用いて、

$$\delta \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{F}_{las}(\mathbf{r}, t) + \delta \mathbf{F}_{vac}(\mathbf{r}, t), \quad (2.32)$$

が得られ、ここで

$$\delta \mathbf{F}_{las}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V_{AL}(\mathbf{r}, t) - \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) \quad (2.33a)$$

$$\delta \mathbf{F}_{vac}(\mathbf{r}, t) = - : \nabla V_{AV}(\mathbf{r}, t) : \quad (2.33b)$$

はそれぞれレーザーの場合および真空場のランジュバン力への寄与を表す。

最後に $-\nabla V_{AV}(\mathbf{r}, t)$ を再記述する。式 (2.10) を用いて、

$$-\nabla V_{AL}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar}{2} |e\rangle\langle g| e^{-i\omega_L t} \nabla [\Omega_1(\mathbf{r}) e^{-i\Phi(\mathbf{r})}] + \text{h.c.} \quad (2.34)$$

が得られる。勾配を計算すると、

$$\nabla [\Omega_1(\mathbf{r}) e^{-i\Phi(\mathbf{r})}] = \Omega_1(\mathbf{r}) e^{-i\Phi(\mathbf{r})} [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) - i\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})], \quad (2.35)$$

が得られ、ここで

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \Omega_1(\mathbf{r})}{\Omega_1(\mathbf{r})} \quad (2.36a)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.36b)$$

はそれぞれラビ周波数および位相の空間的な変化を表す。式 (2.34) に式 (2.35) および (2.36) を代入し、式 (2.30) と、原子の内部状態の密度演算子である σ によって、 $|e\rangle\langle g|$ の平均値が $\sigma_{ge}(t)$ である事を用いて、最終的に平均値に対して次の式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \sigma_{ge}(t) \hbar \Omega_1(\mathbf{r}) e^{-i[\omega_L t + \Phi(\mathbf{r})]} [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) - i\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})] \right\} \\ &= -\hbar \Omega_1(\mathbf{r}) [u(t)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) + v(t)\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここで

$$u(t) = \text{Re} \sigma_{ge}(t) e^{-i[\omega_L t + \Phi(\mathbf{r})]}, \quad (2.38a)$$

$$v(t) = \text{Im} \sigma_{ge}(t) e^{-i[\omega_L t + \Phi(\mathbf{r})]}. \quad (2.38b)$$

これら全ての式において r は $r_0 + v_0 t$ を意味する。

2.5 光ブロッホ方程式 (OBE)

力の演算子 (2.34) は原子の内部状態の演算子 $|e\rangle\langle g|$ に依存し、平均力 (2.37) は $|e\rangle\langle g|$ 、すなわち原子の内部状態の密度行列 σ の非対角項 σ_{ge} の平均値に依存する。ここで簡単にどのようにして σ の運動方程式を導出することができるかを説明する。これは光ブロッホ方程式と呼ばれる (より詳しくは、文献 [9] および [2] 補遺 A_V を見よ)。

四つの演算子の運動方程式から始める。

$$H_{ab} = |a\rangle\langle b| \quad (2.39)$$

ここで $a, b = e$ または g で、この式は

$$i\hbar\dot{\Pi}_{ab} = [\Pi_{ab}, H] = [\Pi_{ab}, H_A^{int} + V_{AL} + V_{AV}] \quad (2.40)$$

書ける。なぜなら Π_{ab} は $H_A^{ext} = P^2/2M$ と交換するからである。先の 2.2 節より、 V_{AV} のモード展開 (式 (2.5) および (2.6) を見よ) の中に現れる場の演算子 $a_j(t)$ を $a_j(t)$ に対するハイゼンベルグ方程式の解 (2.12) に置き換える。これから式 (2.40) において標準の順番が取られるなら、ソースの場 $a_j^{source}(t)$ の Π_{ab} の変化率への寄与は減衰項を減じさせる事が示され、これは自然放出率 Γ に比例する。一方、自由場の寄与は平均値がゼロのランジュバン力として現れる。 Π_{ab} の運動方程式の構造はこのため以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{ba} = & -\frac{i}{\hbar}[\Pi_{ab}, H_A^{int} + V_{AL}] \\ & + \text{減衰項} + \text{ランジュバン力} \end{aligned} \quad (2.41)$$

式 (2.41) の平均値をとり、ランジュバン力が平均値がゼロであることを用いると、

$$\dot{\sigma}_{ba} = -\frac{i}{\hbar}\langle b|[H_A^{int} + V_{AL}, \sigma]|a\rangle + \left(\frac{d}{dt}\sigma_{ba}\right)_{sp}, \quad (2.42)$$

となり、ここで (自然放出による) 減衰項は次のような形となる。

$$\left(\frac{d}{dt}\sigma_{ee}\right)_{sp} = -\Gamma\sigma_{ee}, \quad (2.43a)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\sigma_{gg}\right)_{sp} = +\Gamma\sigma_{ee}, \quad (2.43b)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\sigma_{eg}\right)_{sp} = -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{ee}, \quad (2.43c)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\sigma_{ge}\right)_{sp} = -\frac{\Gamma}{2}\sigma_{ge}. \quad (2.43d)$$

式 (2.43a) と (2.43b) は自然放出によって原子が e 状態から移り、またこれが Γ の確率で移行する事を記述している。式 (2.43c) と (2.43d) は光のコヒーレンスが $\Gamma/2$ の確率で緩和することを表している。(厳密に言うと、これには光のコヒーレンスの時間発展周波数の放射シフトを表す項もあるが、このシフトは原子の遷移周波数 ω_A に含まれているとみなされる。)

式 (2.42) および (2.43) より、

$$\frac{d}{dt}(\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) = 0, \quad (2.44)$$

は明らかである。なぜなら交換子のトレースはゼロであるからである。これから $\sigma_{ee} + \sigma_{gg}$ が一定で、1 に等しく、四つの行列要素 σ_{ab} が独立では無い事が導かれる。ここでいわゆる三つの独立な成分 u, v, w を持つブロッホベクトルを導入する。ここで u と v は式 (2.38a) および (2.38b) により、また

$$w(t) = \frac{1}{2}[\sigma_{ee}(t) - \sigma_{gg}(t)]. \quad (2.45)$$

と与えられる。ここで $u(t)$ および $v(t)$ は $\sigma_{ge}(t)$ および $\sigma_{eg}(t)$ だけではなく、 $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t)$ を通して t に依存することが挙げられる。

式 (2.38)、(2.45)、(2.42) および (2.43) より、式 (2.2) と (2.10) を用いて行列の形で示す u 、 v 、 w の運動方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma/2 & \delta + \dot{\Phi} & 0 \\ -(\delta + \dot{\Phi}) & -\Gamma/2 & -\Omega_1 \\ 0 & \Omega_1 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Gamma/2 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

この式において、

$$\dot{\Phi} = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi = \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (2.47)$$

と Ω_1 と Φ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$ における値である。

式 (2.46) は NMR における通常のブロッホ方程式に似ている。ブロッホベクトルの成分 u, v, w は、一つは z 軸方向で $-(\delta + \dot{\Phi})$ に比例し、もう一つは x 軸方向で Ω_1 に比例する二つの定常的な場にある擬スピン (1/2) の成分、 S_x 、 S_y 、 S_z とみなすことができる。

第3章 最初に静止していた2準位原子に対する平均放射圧

ここでは第2章の一般的な結果を原子が最初に静止している特別な場合に適用する。原子は座標原点、

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad (3.1b)$$

に静止している。時間の原点は $r=0$ におけるレーザー光の場の位相 $\Phi(0)$ がゼロになるようにいつでもとることができる。原子がある位置でのレーザー電場 (1.2) はこれから

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{0}, t) = \epsilon(\mathbf{0})\mathcal{E}(\mathbf{0}) \cos \omega_L t = \mathcal{E}_0 \cos \omega_L t \quad (3.2)$$

と書け表され、ここで $\mathcal{E}_0 = \epsilon(\mathbf{0})\mathcal{E}(\mathbf{0})$ である。これからはより簡単な表記を用いる。

$$\Omega_1(\mathbf{0}) = \Omega_1, \quad (3.3a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \left. \frac{\nabla \Omega_1}{\Omega_1} \right|_{r=0} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.3b)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{0}) = \left. \frac{\nabla \Omega_1}{\Omega_1} \right|_{r=0} = \boldsymbol{\beta}. \quad (3.3c)$$

最後に式 (3.1b) の結果として

$$\dot{\Phi} = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi|_{r=0} = 0. \quad (3.4)$$

となることを記しておく。

3.1 光ブロッホ方程式の定常解

式 (3.4) を用いて、またラビ周波数 (3.3a) が時間に依存しないという事から (なぜなら原子は $r=0$ に静止している)、式 (2.46) で与えられる最初の光ブロッホ方程式はここでは時間に依存しない係数を持つ一組の結合した線形微分方程式となることが分る。このためこれらは定常解が許され、これは容易に

$$u_{st} = \frac{\delta}{\Omega_1} \frac{s}{1+s}, \quad (3.5a)$$

$$v_{st} = \frac{\Gamma}{2\Omega_1} \frac{s}{1+s}, \quad (3.5b)$$

$$w_{st} = -\frac{1}{2(1+s)} \quad (3.5c)$$

となる (文献 [2] の第 5 章を見よ)。ここで

$$s = \frac{\Omega_1^2/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (3.6)$$

は飽和パラメータと呼ばれる。

これ以降の議論において上準位の分布数の定常値 σ_{ee}^{st} もまた必要となるが、これは式 (2.45)、(3.5c) と $\sigma_{ee}^{st} + \sigma_{gg}^{st} = 1$ という関係より導かれる。

$$\sigma_{ee}^{st} = \frac{1}{2} + w_{st} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \quad (3.7)$$

式 (3.7) において飽和パラメータが大きい場合には ($s \gg 1$) σ_{ee}^{st} は 1/2 に近づく事が明らかに示されている。

3.2 反動的な応答と散逸的な応答

式 (2.37) は平均的な力 \mathcal{F} が u と v にそれぞれ比例する二つの寄与の和である事を示している。定常状態においてこれらの二つの寄与を物理的に解釈するため、最初にこの節において u_{st} と v_{st} がそれぞれ原子のレーザー光による励起に対する反動的応答および散逸的応答を表している事を示す。

式 (2.8) で与えられている双極子モーメント演算子 d の定常状態の平均値をとる。これは式 (2.39) を用いて

$$\begin{aligned} \langle d \rangle_{st} &= d\epsilon_z \langle \Pi_{eg} + \Pi_{ge} \rangle_{st} \\ &= d\epsilon_z (\sigma_{ge}^{st} + \sigma_{eg}^{st}) = 2d\epsilon_z \text{Re}\sigma_{ge}^{st} \end{aligned} \quad (3.8)$$

と与えられる。一方、 u と v の定義 (2.38) と $\Phi(\mathbf{0})=0$ から

$$u_{st} + iv_{st} = \sigma_{ge}^{st} e^{-i\omega_L t} e^{-i\Phi(\mathbf{0})} = \sigma_{ge}^{st} e^{-i\omega_L t}, \quad (3.9)$$

が導かれ、このため

$$\begin{aligned} \text{Re} \sigma_{ge}^{st} &= \text{Re} \{ [u_{st} + iv_{st}] e^{+i\omega_L t} \} \\ &= u_{st} \cos \omega_L t - v_{st} \sin \omega_L t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。式 (3.8) および (3.10) より以下の式が得られる。

$$\langle d \rangle_{st} = 2d\epsilon_z [u_{st} \cos \omega_L t - v_{st} \sin \omega_L t]. \quad (3.11)$$

原子の位置におけるレーザー光の電場の式 (3.2) と式 (3.11) を比較することにより、 u_{st} および v_{st} が平均双極子モーメントのレーザー光に対して同位相および直交位相成分にそれぞれ比例するという結論が得られる。このためこれらは原子のレーザー光の励起に対する反動的な応答および散逸的な応答を表す。

先の結果から、定常状態においては単位時間あたりに原子が吸収する平均エネルギー、そして単位時間あたりの平均吸収光子数 $\langle dN/dt \rangle_{st}$ が散逸的な応答 v_{st} に関係している事が示唆される。

レーザー光電場 (3.2) が原子の電子の電荷 q に行われる仕事 dW は

$$dW = q \cos \omega_L t \mathcal{E}_0 \cdot dr \quad (3.12)$$

で、ここで $d\mathbf{r}$ は時間 dt 内の電荷の変位である。 $\dot{\mathbf{d}} = q\dot{\mathbf{r}}$ を用いて、定常状態において単位時間あたりに原子が吸収する平均エネルギーは

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_{st} = \cos \omega_L t \mathcal{E}_0 \cdot \langle \dot{\mathbf{d}} \rangle_{st} \quad (3.13)$$

と与えられる。もしここで式 (3.11) の $\langle \mathbf{d} \rangle_{st}$ を用いると、

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_{st} = -2d\epsilon_z \cdot \mathcal{E}_0 \omega_L [v_{st} \cos^2 \omega_L t + u_{st} \sin \omega_L t \cos \omega_L t] \quad (3.14)$$

が得られる。光の一周期の間で平均をとると、

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_{st} = \hbar \Omega_1 \omega_L v_{st} \quad (3.15)$$

が得られ、ここでラビ周波数の定義 $\hbar \Omega_1 = -d\epsilon \cdot \mathcal{E}_0$ を用いている。吸収光子は各々 $\hbar \omega_L$ のエネルギーを与えるので、定常状態における単位時間あたりに平均吸収光子数は

$$\left\langle \frac{dN}{dt} \right\rangle_{st} = \frac{1}{\hbar \omega_L} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_{st} = \Omega_1 v_{st} \quad (3.16)$$

と与えられ、またはこれと等価に

$$\left\langle \frac{dN}{dt} \right\rangle_{st} = \Gamma \sigma_{ee}^{st} \quad (3.17)$$

と与えられる。これは式 (3.5b) および (3.7) から

$$\Omega_1 v_{st} = \Gamma \sigma_{ee}^{st} \quad (3.18)$$

が得られるからである。式 (3.16) は明確な物理的な意味を持っている。これは定常状態において単位時間あたりに吸収される平均光子数 (左辺) が単位時間あたりに自然放出する平均光子数 (右辺) に等しい事を表している。

3.3 散逸力 - 放射圧

散逸力を定常状態における力の平均 (2.37) の v_{st} に比例する成分とみなす。

$$\mathcal{F}_{dissip} = -\hbar \Omega_1 v_{sp} \beta \quad (3.19)$$

\mathcal{F}_{dissip} の物理的意味はレーザー光が波数 k_L の平面波

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}) \beta \quad (3.20)$$

である場合、特に明らかである。式 (3.20) から場の位相

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} \quad (3.21)$$

が導かれ、このため

$$\beta = \nabla \Phi|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = -\mathbf{k}_L \quad (3.22)$$

となる。この場合、式 (3.22) を (3.19) に代入すると、式 (3.15) を用いて、

$$\mathcal{F}_{dissip} = -\hbar\Omega_1 \mathbf{k}_L v_{sp} = \hbar \mathbf{k}_L \left\langle \frac{dN}{dt} \right\rangle_{st} \quad (3.23)$$

が与えられる。式 (3.23) の解釈は簡単である。時間間隔 dt の間、原子は dN 個の光子を吸収し、 $d\mathbf{P} = dN\hbar\mathbf{k}_L$ の運動量を得る。これは定常状態の平均的な力に相当する。

$$\left\langle \frac{\mathbf{P}}{dt} \right\rangle_{st} = \hbar \mathbf{k}_L \left\langle \frac{dN}{dt} \right\rangle_{st} \quad (3.24)$$

先の議論において、自然放出光に関連する運動量を考慮してこなかった。その理由は、自然放出は二つの反対方向には等しい確率で起こるため再放出過程による運動量の損失は平均ではゼロになるからである。散逸力はまた放射圧、または散乱力とも呼ばれ、これは吸収-自然放出サイクルに由来する。

v_{st} に対して式 (3.5b) を用い、また飽和パラメータ s の定義 (3.6) を用いると、式 (3.23) を等価的に

$$\mathcal{F}_{dissip} = \hbar \mathbf{k}_L \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega_1^2/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega_1^2/2)} \quad (3.25)$$

と書くことができ、これは \mathcal{F}_{dissip} の各種のパラメータ依存性がより明確に表されている。離調 $\delta = \omega_L - \omega_A$ の関数としてこれをプロットすると、 \mathcal{F}_{dissip} は $\delta = 0$ を中心としたローレンツ型吸収曲線のように変化し、これは散逸過程として期待されるものである。ここで Ω_1^2 に比例するレーザー光強度 I_L に対する \mathcal{F}_{dissip} の変化を考えることとする。強度が弱い場合 (より正確には $s \ll 1$)、 \mathcal{F}_{dissip} は I_L に比例する事が分る。強度が強い場合 (より正確には $s \gg 1$)、 \mathcal{F}_{dissip} は $\hbar \mathbf{k}_L \Gamma/2$ で与えられる最大値をとるようになり、これは最大加速度

$$\mathbf{a}_{max} = \frac{\hbar \mathbf{k}_L \Gamma}{M} \quad (3.26)$$

に対応する。大きさのオーダーを評価してみる事は興味深い。式 (3.26) において $\hbar \mathbf{k}_L/M$ は単一光子の吸収または放出に関係する反跳速度 v_{rec} である。このような速度は通常非常に小さく、例えばナトリウムに対しては 3cm/s 、セシウムに対しては 3mm/s のオーダーである。しかし一秒あたりの蛍光サイクル数は ($s \gg 1$ の場合) $\Gamma/2$ に等しい大きさに達し、これは非常に大きく、なぜなら Γ^{-1} は数 10^{-9} 秒のオーダーであるからである。例えばナトリウムに対しては、 $\Gamma^{-1} = 16 \times 10^{-9}\text{s}$ で、このため \mathbf{a}_{max} は 10^6m/s^2 のオーダーで、これは言い換えれば $10^5 g$ のオーダーで、 g は重力加速度である。このことから共鳴放射圧によって 1 メートル程度の短い距離で原子線を止める事が可能になることが説明できる (W. D. Phillips の講義を見よ)。

3.4 反動力 - 双極子力

\mathcal{F}_{react} を平均力 (2.37) の定常状態において v_{st} に比例する成分とみなす。

$$\mathcal{F}_{react} = -\hbar\Omega_1 u_{sp} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.27)$$

平面レーザー光、 $\epsilon \mathcal{E} \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r})$ 、においては、振幅 \mathcal{E} とレーザー光の偏光 ϵ は \mathbf{r} と独立である。このため、 $\nabla \Omega_1$ と、これに従い $\boldsymbol{\alpha}$ が消える (Ω_1 の定義 (2.9) と $\boldsymbol{\alpha}$ の定義 (2.36a) を見よ)。

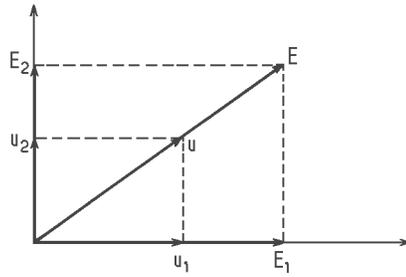


図 3.1: 直交する二つの場 E_1 と E_2 の線形結合によるレーザー電場の複素平面上における表示。ベクトル u 、 u_1 と u_2 はそれぞれ E 、 E_1 と E_2 の同相成分の双極子を表す。

これから平面波においては $\mathcal{F}_{react} = 0$ となる。反動力はレーザー光がいくつかの平面波の重ね合わせの時にのみ現れる。一方、 \mathcal{F}_{react} はその過程の全体として原子が (光を) 吸収する場合は含まれない。なぜならこれは原子の反動的な応答に関連するものであるからである。これらの二つの性質は \mathcal{F}_{react} がレーザー光を形成するいくつかの平面波の間の光子の再分配に関する事を示唆する。吸収過程によって一つの平面波から光子を取り去り、誘導放出過程によって他の平面波に移される。このような再分配の間、レーザー場のエネルギーは変化しない。なぜなら全ての平面波は同じ周波数 ω_L であるからである。原子によるトータルのエネルギーの吸収は無い。しかし、各種の平面波中の光子の運動量は同じではないので、このような再分配は場の全運動量を変化させ、この結果、原子の運動量も変化させる。

このような議論をより明確にするため、ここでレーザー光が波数 k_1 と k_2 の二つの平面波からなる簡単な場合を考える (文献 [2] の第 5 章、C.2.d 節を見よ)。図 3.1 は複素平面上において位置 r の二つの場の複素振幅 E_1 と E_2 を表している。ここで二つのベクトル E_1 、 E_2 は直交していると仮定する。全電場 E に対する原子の反動的な応答 u のみを考えることにする。これは E と同じ位相を持っている (または逆位相を持っており、これは離調に依存する)。ここで u_1 および u_2 を u の E_1 および E_2 への射影とする。 E_1 と同位相の u の成分 u_1 はレーザー光 1 のエネルギーを吸収しない。それに対して u_2 は E_1 に対して $\pi/2$ だけ位相が進んでおり、一方 u_1 は E_2 に対して $\pi/2$ だけ遅れている。これによって u_2 と相互作用することによって E_1 がエネルギーを得るとすると、 E_2 は u_1 と相互作用することによってエネルギーを失う。さらに、 $|E_1||u_2| = |E_2||u_1|$ なので、一方の光から得るエネルギーはもう一方から失われるエネルギーにちょうど等しくなる。このようにして一方では二つの光の間に再分配が存在し、また一方では原子がある位置における二つの光の相対位相に依存して (レーザー光 $1 \rightarrow 2$ または $2 \rightarrow 1$) という意味のこのような再分配のコヒーレントな性質が分る。最後に u が E と同位相かまたは逆位相かによって再分配の意味は異なる事を記しておく。このことによって反動力が離調の奇関数であることが説明できる。

u_{st} に対して式 (3.5a) を用い、また s の定義 (3.6) を用いると、 \mathcal{F}_{react} に対して次のような式が得られる。

$$\mathcal{F}_{react} = -\frac{\hbar\delta}{4} \frac{\nabla\Omega_1^2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4) + (\Omega_1^2/2)} \quad (3.28)$$

反動力は $\delta = \omega_L - \omega_A$ に対してローレンツ型分散曲線の様に変化し、これは反動的過程に対して期待されるものである。 $\delta < 0$ ($\omega_L < \omega_A$) に対しては、反動力は原子を光強度が強い方に押しやる。これは反動力が $\nabla\Omega_1^2$ と同じ符号を持っているからである。 $\delta > 0$ ($\omega_L > \omega_A$) に対しては反対の結果

となる。 $(\Omega_1 \gg \Gamma)$ である Ω_1^2 の各値に対して \mathcal{F}_{react} を最適化する δ の値は Ω_1 と同程度で、これに対応する \mathcal{F}_{react} の最大値は

$$(\mathcal{F}_{react})_{max} \simeq \frac{\hbar \nabla \Omega_1^2}{\Omega_1} \simeq \hbar \nabla \Omega_1 \quad (3.29)$$

と同程度である。レーザー強度 I_L が増加すると有限の大きさに留まる \mathcal{F}_{dissip} とは反対に、 \mathcal{F}_{react} は I_L に対して無限に増加する。式(3.29)より、 \mathcal{F}_{react} は $\hbar k_L \Omega_1$ と同程度の大きさに達することが示され、これは $\nabla \Omega_1$ が例えば定在波中では $k_L \Omega_1$ と同程度になりうることによる。このような結果は Ω_1 の率で運動量 $\hbar k_L$ の交換が起こっている事に相当し、これは吸収-誘導放出のサイクルを含む再分配過程から期待されるものである。これは \mathcal{F}_{dissip} に対する相当する結果と比較する必要がある、この場合、これは $\hbar k_L$ かける自然放出確率 Γ と同程度の大きさの最大値に達する。

最後に反動力(3.28)はポテンシャル U から導かれる事を記しておく。これは

$$\mathcal{F}_{react} = -\nabla U \quad (3.30)$$

と書き表せるからで、ここで

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar \delta}{2} \ln \left[1 + \frac{\Omega_1^2(\mathbf{r})/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \right] \quad (3.31)$$

である。 $\delta < 0$ ($\omega_L < \omega_A$)に対しては最大強度の領域は原子に対して引力のポテンシャル井戸となる。与えられた Ω_1 に対して、このようなポテンシャル井戸の最大深さは飽和パラメータ $s \simeq 4$ に対して起こり、これは $|U_{max}| \simeq 0.3 |\hbar \Omega_1^{max}|$ に相当する。

次の章では反動力の他の物理的な描像を示す。これはまた双極子力とも呼ばれる。第6章で弱い光強度における再分配過程を解釈する。

強い強度の極限は第7章において考え、双極子力をこの極限においてドレイド状態のエネルギーの勾配によって解釈する。

第4章 動く原子 摩擦力

ここでは速度 v_0 で動いている原子を考える。このため、その座標 r は、もし $t = 0$ において $r=0$ とおくと、

$$r = v_0 t \quad (4.1)$$

と与えられる。

4.1 単純な平面レーザー光の場合

レーザー光は波数ベクトル k_L を持つ平面波と仮定する (式 (3.20) を見よ)。レーザー光電場の振幅および偏光は r に依存しないため、ラビ周波数は位置に依存しないし、よって時間に依存しない。

$$\Omega_1(r = v_0 t) = \Omega_1 = \text{定数} \quad (4.2)$$

それに対して、位相 Φ は r に比例的に変化する

$$\Phi(r) = -k_L \cdot r \quad (4.3)$$

このため、

$$\dot{\Phi} = \frac{dr}{dt} \cdot \nabla \Phi = v_0 \cdot \nabla \Phi = -k_L \cdot v_0 \quad (4.4)$$

となる。

Ω_1 と $\dot{\Phi}$ が時間に依存しないため、光ブロッホ方程式は引き続き時間に依存しない係数で表される微分方程式の線形結合の組みである。このためこれらは 3.1 節で得られた解から次のような置換をすることにより定常状態の解を持つ。

$$\delta \rightarrow \delta + \dot{\Phi} = \delta - k_L \cdot v_0 \quad (4.5)$$

または、 $\delta = \omega_L - \omega_A$ なのでこれと等価的に、

$$\omega_L \rightarrow \omega_L - k_L \cdot v_0 \quad (4.6)$$

この結果は速度 v_0 で動いている原子はレーザーの周波数をドップラーシフト $k_L \cdot v_0$ 分だけシフトして見ているという事を意味する。

図 4.1a は x -軸に対して負の方向に進む平面レーザー光中で速度 v_0 で動いている原子を表している。このため波数ベクトルは $k_L = k_L \epsilon_x$ と書ける。もし $v_0 = \epsilon_x \cdot v_0$ が v_0 の x -軸への射影であると、 $-k_L \cdot v_0 = k_L v_0$ となる。図 4.1b は原子が感じる平均的な力の x -軸方向成分を $k_L v_0$ に対してプロットしたものである (式 (3.25) の δ を $\delta + k_L v_0$ に単に置き換えた)。ここで δ が負だと仮定す

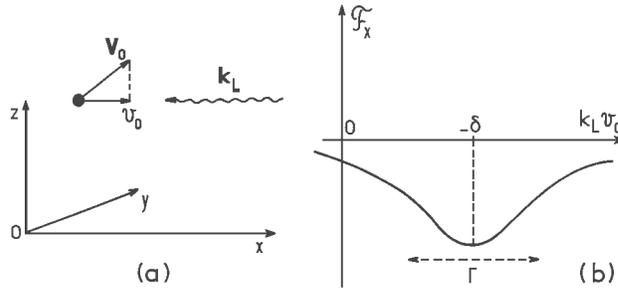


図 4.1: (a) 速度 v_0 で波数ベクトル k_L のレーザー平面波中を動いている原子。(b) $k_L v_0$ に対する原子が感じる平均的な力。

る。力は負になり $\delta = -k_L v_0$ の時、すなわち原子が感じるレーザー周波数 $\omega_L + k_L v_0$ が原子の周波数 ω_A に一致する時に最大値に達する。 $v_0 = 0$ 近傍では

$$\mathcal{F}_x(v_0) = \mathcal{F}_x(v_0 = 0) - \alpha v_0 + \dots, \quad (4.7)$$

と書くことができ、ここで v_0 の一次の項は摩擦力を表す。なぜならこれは v_0 に反比例するからである。係数 α は摩擦係数と呼ばれる。

式 (3.25) の δ を $\delta - k_L v_0$ に置き換え、 $\mathcal{F}_x(v_0)$ に対して得られた結果を $k_L v_0 / \Gamma$ のべきに展開することにより、 α に対して次のような表しかたが得られる。

$$\alpha = -\hbar k_L^2 \frac{s}{(1+s)^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (4.8)$$

ここで s は式 (3.6) で定義された飽和パラメータである。式 (4.8) から明らかに $\delta < 0$ に対して α は正である。 s を固定すると、式 (4.8) を最適化する δ の値は $-\Gamma/2$ である。 δ がこの値をとるとすると、 s の最適値は $s = 1$ であることが見出され、これは $\Omega_1 = \Gamma$ に対応する。 δ と Ω_1 がこれらの値をとるとすると、 α の最大値として

$$\alpha_{max} = \frac{\hbar k_L^2}{4} \quad (4.9)$$

式 (4.7) に戻って、 $\mathcal{F}_x(v_0 = 0)$ が定常的な外力によって補われるとすると、原子の波束の重心の運動方程式は

$$M \frac{dv_0}{dt} = \mathcal{F} = -\alpha v_0 \quad (4.10)$$

となり、これは原子の速度が

$$\gamma = \frac{\alpha}{M} = \frac{\hbar k_L^2}{4M} = \frac{E_R}{2\hbar} \quad (4.11)$$

の割合で減少することを意味する。ここで E_R は式 (1.8) において定義されている反跳エネルギーである。このため 1.3 節で述べた、原子の速度などの外部変数が $T_{ext} = \gamma^{-1} \simeq \hbar/E_R$ 程度 (ふつう $1\mu\text{s}$ から $100\mu\text{s}$ までの範囲) の特性減衰時間を持っているという結論が得られる。

4.2 レーザ一定在波

ここでレーザー光は x 軸に沿って z 軸方向に直線偏光した定在波であると仮定する。このため式 (1.2) は

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_z \mathcal{E}_0 \cos \omega_L t \quad (4.12)$$

となる。ここで振幅 $\mathcal{E}_0(x)$ は

$$\mathcal{E}_0(x) = 2\mathcal{E}_0 \cos k_L x \quad (4.13)$$

と与えられる。式 (4.13) を (4.12) に代入すると、

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_z \mathcal{E}_0 [\cos(\omega_L t - k_L x) + \cos(\omega_L t + k_L x)] \quad (4.14)$$

が得られる。これはレーザー光が対向する二つの平面波の重ね合わせとみなすことができる事を示している。しかし定在波が及ぼす力が二つの対向する光の放射圧の単純な足し合わせではない事を強調しておく必要がある。それは二つの光には干渉効果があり、これが重要な役割を果たす。

定在波においてはどこでも光の場の位相は同じであるため、 $\beta = \nabla \Phi = 0$ となる。一方、ラビ周波数は位置に依存し、

$$\Omega_1(x) = -\frac{\mathcal{E}_0(x)}{\hbar} = 2\Omega_1 \cos k_L x \quad (4.15)$$

と書け、ここで

$$\Omega_1 = -\frac{d\mathcal{E}_0}{\hbar} \quad (4.16)$$

は定在波を構成する二つの対向する平面波に対するラビ周波数である。これから

$$\alpha = \frac{\nabla \Omega_1(x)}{\Omega_1(x)} = \frac{\nabla \mathcal{E}_1(x)}{\mathcal{E}_1(x)} = k_L \tan k_L x \epsilon_x \quad (4.17)$$

がゼロではないことが導かれる。式 (2.37) から原子が感じる平均的な力はプロットベクトルの u 成分にのみ依存する。

u を得るには光プロット方程式 (2.46) を解く必要がある。もし原子が速度 v_0 で x 軸方向に動いているとすると、 x は $v_0 t$ に置き換えられる。これから式 (4.15) より $\Omega_1(x)$ が t に関して周波数 $k_L v_0$ の正弦波関数になる事が分かる。一方、 Φ は x に依存しないため、 $\dot{\Phi}$ はゼロになる。この結果、定在波中に動いている原子に対しては光プロット方程式は正弦波的に時間に依存する係数を持つ微分方程式の線形結合の組みになる。平面進行波に対して起こる事とは反対に、一般的にこれらの方程式を解析的に解く事は不可能で、いくつか近似をしなくてはならない。

4.2.1 低い速度の極限 ($k_L \ll \Gamma$)

ここでは光プロット方程式の分解の方法を示す。これは最初に文献 [8] で導入されたもので、 kv_0/Γ のべきで展開する解を探すものである。ゼロ次の項は「断熱的」な解を表し、これは原子が x 軸に沿って非常にゆっくり動いており、その内部状態が x を通り過ぎるときに x において静止している場合と同じ場合に相当する。一次の項は断熱近似の最初の補正を与える。これは v_0 に比例し、よ

り正確には非断熱的パラメータである kv_0/Γ に比例し、原子が内部応答時間 Γ^{-1} の間に進む距離 $v_0\Gamma^{-1}$ とレーザー光の場の空間的な変化を特徴づけるレーザー波長 k^{-1} との間の比に等しい。力の展開 (2.37) に代入すると、この一次の補正は v_0 に比例する力が生じ、これはまさしく摩擦力である。

光ブロッホ方程式の解において v に比例する項を見出すため、最初に式 (2.46) を小さな行列の形

$$(\dot{X}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) (X) = (B)(X) - (X_s) \quad (4.18)$$

に書く。ここで列ベクトル X (ブロッホベクトル) を X_s (ソース項) と正方行列 B (ブロッホ行列) は

$$(X) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (X_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma/2 \end{pmatrix}, \quad (B) = \begin{pmatrix} -\Gamma/2 & \delta & 0 \\ -\delta & -\Gamma/2 & -\Omega_1(x) \\ 0 & \Omega_1(x) & -\Gamma \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

と与えられる。式 (4.18) において”流体力学の微分” $d/dt = (\partial/\partial t) + v_0(\partial/\partial x)$ を用いた。 Γ^{-1} 程度の過渡的な時間領域の後では $\partial X/\partial t$ の寄与は無くなり、

$$v_0 \frac{\partial}{\partial x} (X) = (B)(X) - (X_s) \quad (4.20)$$

となる。ここで X の kv_0/Γ によるべき展開

$$(X) = (X^{(0)}) + (X^{(1)}) + \dots \quad (4.21)$$

を式 (4.20) に代入する。 kv_0/Γ のゼロ次をとると、左辺は消えて、

$$0 = (B)(X^{(0)}) - (X_s), \quad (4.22a)$$

または等価的に

$$(X^{(0)}) = (B)^{-1}(X_s), \quad (4.22b)$$

が得られ、これはまさに x に静止している原子に対する定常状態のブロッホベクトルである。 kv_0/Γ の一次をとると、

$$v_0 \frac{\partial}{\partial x} (X^{(0)}) = (B)(X^{(1)}) \quad (4.23)$$

となり、これは式 (4.22b) を用いることにより、次のように変換できる。

$$(X^{(1)}) = (B)^{-1} v_0 \frac{\partial}{\partial x} (X^{(0)}) = (B)^{-1} v_0 \frac{\partial}{\partial x} (B)^{-1} (X_s) \quad (4.24)$$

最後に、 X の最初の成分の展開式 $u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots$ を力の式 (2.37) に代入する。このような計算結果として得られる摩擦力の式はここでは出さない。これは文献 [8] に出ている。ここではこのような摩擦力のいくつかの重要な性質を指摘する。

最初に強度が弱い極限 ($s_0 \ll 1$) を考える。ここで s_0 は定在波を構成する二つの対向するそれぞれの光に対する飽和パラメータである。この極限において一波長に渡る平均をとった摩擦力は二つの対向する平面波によってもたらされる二つの摩擦力の和に一致する事が分る。このため強度が弱

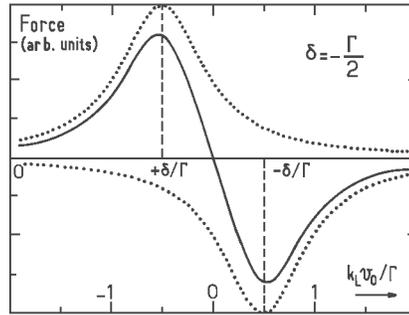


図 4.2: ドップラー冷却の原理。ドップラー効果により、定在波を形成する対向する二つの光から受ける放射圧は釣り合いを失い(点線)、その結果、全体的には原子の速度とは反対方向の力となる(実線)。

いときには動いている原子に対する二つの対向する光の間の干渉効果は一波長に渡って平均をとると消える。 $k_L|v_0| \ll \gamma$ および $s_0 \ll 1$ に対して、 $\mathcal{F} = -\alpha v_0$ が得られ、ここで

$$\alpha = -\hbar k_L^2 \Omega_1^2 \frac{\delta \Gamma}{[\delta^2 + (\Gamma^2/4)]^2} \quad (4.25)$$

である。

この重要な結果は、これは任意の速度において有効であるが、これは 6.5 節においては散乱振幅を用いた異なった観点から導出される。これは実際にドップラー冷却に対して通常与えられる物理的描像に対する正当性を与えるものである [13]。ここで原子の共鳴周波数に対して低周波数側にわずかに離調した、 $+k_L$ と $-k_L$ の二つの対向する光によって作られる弱い定在波に沿って速度 v_0 で運動している原子を考えてみる(図 4.2)。ドップラー効果によって、原子の運動と反対方向に進む光とは共鳴が近くなり、もう一方の光に対しては遠くなる。このため二つの光がもたらす二つの力は平衡がくずれ、全体としては v_0 に対して反対方向の力となる。

強度が強い場合 ($s_0 \gg 1$)、弱い場合に起こるのとは反対に、一波長分で積分した摩擦力 $\mathcal{F}(x, u)$ は低周波数側の離調 ($\omega_L < \omega_A$) に対しては”反減衰”になり、高周波側の離調 ($\omega_L > \omega_A$) に対しては摩擦力になる。このようなおどろくべき結果の物理的な解釈は後でドレスド原子の方法を用いて与えられる(第7章、7.4節を見よ)。

4.2.2 任意の速度 連続的な摩擦力を得る方法

kv が Γ と同程度、もしくはこれを越えると、プロッホベクトルを kv_0/Γ による展開(4.21)を用いることはもはや不可能になる。この節ではこの問題に対してこれとは別の方法を示し、これは文献 [14] において最初に紹介された。これはプロッホベクトルの成分が時間の周期関数になっている事を用いており、これは $\Omega_1(x) = \Omega_1(v_0 t)$ が時間に関して正弦波依存性になっている事に因る(式(4.15)を見よ)。

u 、 v 、 w は時間の周期関数であるので、これらをフーリエ展開することができる。これらの展開式を光プロッホ方程式(4.18)に代入することにより、各フーリエ展開係数 u 、 v 、 w の間の再帰的關係式が導かれる。これらの式は先に連続的な摩擦によって解くことができたことが分る。これ

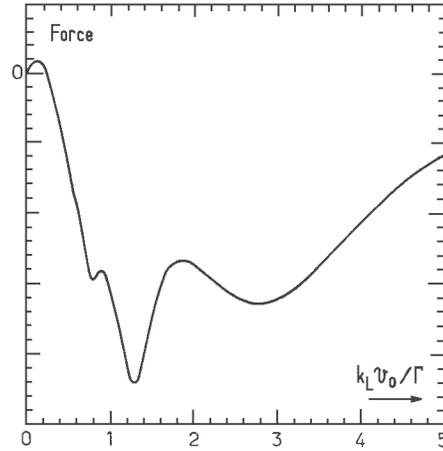


図 4.3: 大きな強度の定在波中で動いている原子が感じる平均的な力の静的な部分の $k_L v_0$ に対する変化。

はコンピューター計算にとっては非常に好都合である。ここではこのような計算の詳細は示さないが、これは文献 [14] に見出されている。このようにして得られたいくつかの重要な結果、およびその物理的意味を述べておく。

図 4.3 に一波長に渡って平均した力の静的な部分 $\mathcal{F} = -\hbar\Omega_1(x)u(x, u)\alpha$ の $k_L v_0$ に対する変化を表す。負の離調 ($\delta < 0$) を仮定しており、さらに光強度は十分強く、 $v_0 = 0$ での傾きは正である事を仮定している。これは $\delta < 0$ の時に摩擦力がある光強度が弱い場合とは反対である (先の 4.2.1 節の最後の部分を見よ)。より大きな $k_L v_0$ に対しては力の符号が変化しており、また $k_L v_0$ の値が $k_L v_0 = -\delta/3, -\delta/5, \dots$ に相当するあたりで共鳴があるのが図 4.3 に見て取れる。

図 4.3 に現れる共鳴は共鳴多光子過程によって簡単に解釈できる。例えば、図 4.4 はこのような多光子過程を表しており、これは $k_L v_0 = -\delta/3$ の共鳴に相当する。原子と同じ速度で運動する系においては定在波を形成する二つの対向する光の周波数はそれぞれ $\omega_L + k_L v_0$ および $\omega_L - k_L v_0$ にドップラーシフトしている (図 4.4a)。原子は、 $\omega_L + k_L v_0$ の光子の吸収、 $\omega_L - k_L v_0$ の光子の誘導放出、そして第二の $\omega_L + k_L v_0$ の光子の吸収をする過程を含む 3 光子過程によって g から e への共鳴遷移を可能にする (図 4.4b の直線の矢印)。このような過程は

$$2(\omega_L + k_L v_0) - (\omega_L - k_L v_0) = \omega_A \quad (4.26)$$

すなわち

$$\omega_L - \omega_A = -3k_L v_0 \quad (4.27)$$

の場合に共鳴する。共鳴の幅は上準位の自然幅 Γ によって決まる。 e 状態に一度上がると、原子は g 状態に自然放出過程によって戻る (図 4.4b の波線の矢印)。 $n+1$ 光子吸収、 n 個の誘導放出と 1 個の自然放出を含む同様の図によって $k_L v_0 = -\delta/(2n+1)$ における共鳴が説明できる。ドップラーシフトした周波数の光を含むこのような共鳴多光子過程は”ドップラロン”と呼ばれる [15]。

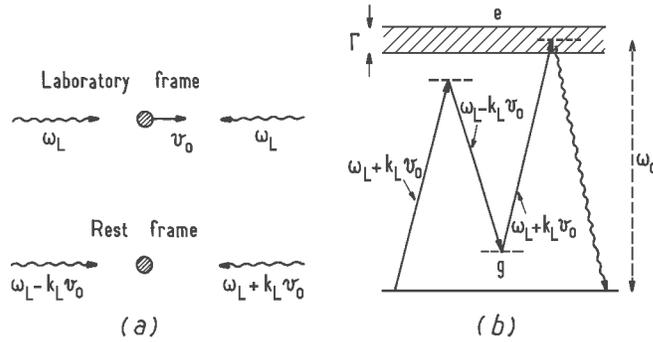


図 4.4: (a) 実験室系と原子が静止する系における定在波を形成する二つの対向する光の周波数。(b) 共鳴 $k_L v_0 = -\delta/3$ に関与する共鳴多光子過程。

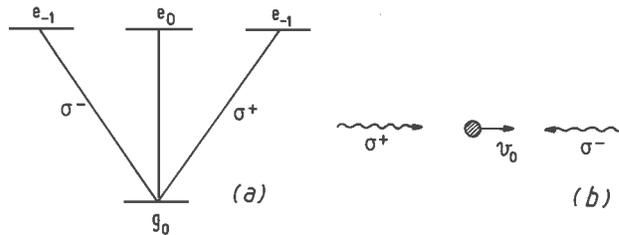


図 4.5: (a) 原子の $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対するゼーマン副準位。(b) それぞれ右回り円偏光 (σ^+) および左回り円偏光 (σ^-) をもつ二つの対向する光によるレーザー光の配置。

4.3 $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$ 遷移に対する $\sigma^+ - \sigma^-$ 配置

図 4.4b は再分配過程が図 4.3 に現れる共鳴において重要な役割を果たしている事を明確に示している。これは一方の光から光子を吸収すると、その後に対向方向に光子を誘導放出するからである。実際、定在波中の原子が受ける力の理論的な記述における全ての困難はこれらの再分配により生じ、これには二つの光の干渉効果が含まれる。第 6 章で再びこれらの問題に立ち戻ることとする。ここではこれとは別のレーザー光の配置および別の原子遷移を紹介する。これは再分配が無く、この結果速度依存する力に対してより簡単な結果を導く [7]。ここで $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$ 遷移を持つ原子を考え、これは基底状態において単一のゼーマン副準位 g_0 を持ち、励起状態において e_{-1} 、 e_0 、 e_{+1} の三つのゼーマン副準位を持つ (図 4.5a)。この原子はそれぞれ右回り (σ^+) および左回り (σ^-) 偏光を持つ二つの対向する光と同じ軸に沿って速度 v で動いている (図 4.5b)。角運動量保存則より、 σ^+ 光は $g_0 \rightarrow e_{+1}$ 遷移のみを励起し、 σ^- 光は $g_0 \rightarrow e_{-1}$ 遷移のみを励起する。この結果、原子が σ^+ 光を吸収して g_0 から e_+ へ移るとすると、もう一方の σ^- 光を誘導放出して g_0 に戻ることにはできない。言い換えれば、角運動量保存則によって二つの対向する光の間光子の再分配が妨げられる。この場合の速度依存力の計算が 2 準位原子の場合よりはるかに簡単になるのはこれによって説明できる。文献 [7] に示されている様に、力は厳密に計算できる。離調が負の場合 ($\omega_L < \omega_A$)、どんな光強度においても摩擦力が残る。ドップラロン多光子過程に相当する共鳴は力の速度依存性の曲線には現れない。

第5章 放射圧のゆらぎ

先の第3章および第4章においては力の平均値 \mathcal{F} を調べてきたが、これに続いてここでは式 (2.32) および (2.33) によって与えられるこの力の揺らぎの部分 $\delta\mathcal{F}$ を考える。この力の揺らぎは原子の運動に雑音をもたらし、原子の運動量の拡散を引き起こし、これがレーザー冷却や捕捉の効率を制限する。この章ではどのようにしたらこのような揺らぎを理論的に扱う事ができるか説明し、その結果の物理的な意味を議論する。

レーザー光中の原子の運動はブラウン運動と非常に良く似ているため、最初に (5.1 節) 古典的なブラウン運動に関するいくつかの基本的な結果を思い出すのが有用であると考えた。それから文献 [8] で示されているものに従って、放射圧の揺らぎの問題を最初にハイゼンベルグ表記による方法をとる (5.2 節)、次に文献 [17] で導出されている結果をまとめたシュレディンガー表記による方法をとる。

5.1 古典的ブラウン運動

この節で示す話題は文献 [16] に詳しく記述されている。

5.1.1 ランジュバン方程式

質量 M 、運動量 p を持ち、軽い粒子からなる液体の中にある重い粒子のランダムな運動を記述するため、ランジュバンは次のような式を導入した (p のそれぞれの成分 p に対して)。

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\gamma p(t) + F(t) \quad (5.1)$$

粒子に作用する全ての力は二つの部分に別れている: 摩擦力、 $-\gamma p(t)$ 、これは衝突の累積による効果を表し、この衝突は粒子の運動量を”緩和時間”

$$T_R = \gamma^{-1} \quad (5.2)$$

の間、制動する。そして揺らぎの力 $F(t)$ 、これは”ランジュバン力”と呼ばれ、 $p(t)$ の平均値のまわりの揺らぎを引き起こす。式 (5.1) において $F(t)$ は外部力のように扱われており、 $p(t)$ とは独立で、平均値がゼロ

$$\overline{F(t)} = 0 \quad (5.3a)$$

そして相関関数が

$$\overline{F(t)F(t')} = 2Dg(t-t'), \quad (5.3b)$$

に等しい。ここで D はある係数で後で解釈する。また $g(t-t')$ は $t-t'$ に関する規格化関数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) d\tau = 1 \quad (5.4)$$

である。これは $t-t'$ の偶関数で (なぜなら $F(t)$ は一定なので)、またこれは衝突時間 τ_c 程度の幅を持っている。

通常、衝突時間 τ_c は緩和時間 T_R よりも非常に小さい。

$$\tau_c \ll T_R \quad (5.5)$$

これはこの問題には二つの非常に離れた時間スケールがあることを意味する。これより特性時間 T_R によって変化する $t-t'$ の関数を用いて、さらに式 (5.4) を考慮して、式 (5.3b) が

$$\overline{F(t)F(t')} \simeq 2D\delta(t-t') \quad (5.6)$$

と近似できることになる。

5.1.2 運動量拡散係数

$p(t_0) = p_0$ に相当する式 (5.1) の解は

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^t dt' F(t') e^{-\gamma(t-t')} \quad (5.7)$$

と書ける。式 (5.3a) から、

$$\overline{p(t)} = p_0 e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (5.8)$$

となり、これは粒子の平均運動量は時間定数 $T_R = \gamma^{-1}$ で制動される事を意味する。

ここで p の分散 $\sigma_p^2(t)$ を評価する。

$$\sigma_p^2(t) = \overline{[p(t) - \overline{p(t)}]^2} \quad (5.9)$$

式 (5.7)、(5.8)、(5.3b)、そして (5.6) を用い、さらに $t-t_0 \gg \tau_c$ を仮定すると、

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(t) &= \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \overline{F(t')F(t'')} e^{-\gamma(t-t')} e^{-\gamma(t-t'')} \\ &\simeq \frac{D}{\gamma} [1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}] \end{aligned} \quad (5.10)$$

が得られる。

緩和時間に比べて短い時間間隔に対しては ($t-t_0 \ll \gamma^{-1}$)、式 (5.10) の指数関数は展開可能で、これによって

$$\tau_c \ll t-t_0 \ll \gamma^{-1} \quad \rightarrow \quad \sigma_p^2(t) \simeq 2D(t-t_0) \quad (5.11)$$

が得られる。これから短い時間においては $p(t)$ の分散は $t-t_0$ に傾き $2D$ で比例して大きくなる。これから D は運動量拡散係数であることが示される。長い時間間隔においては ($t-t_0 \gg \gamma^{-1}$)、式 (5.10) の指数は無視できるようになり、式 (5.8) を用いて

$$t-t_0 \gg \gamma^{-1} \quad \rightarrow \quad \sigma_p^2 = \overline{p^2} - \overline{p}^2 = \overline{p^2} = \frac{D}{\gamma} \quad (5.12)$$

が得られる。 p の分散は D/γ に等しい一定の値に近づく。一方、粒子が周りの液体の温度 T で平衡に達していると仮定すると、

$$\frac{\overline{p^2}}{2M} = \frac{1}{2}k_B T \quad (5.13)$$

となる。式 (5.12) と (5.13) からアインシュタイン方程式

$$D = M\gamma k_B T \quad (5.14)$$

が与えられる。これは D によって特徴づけられる F の揺らぎを粒子の運動量を制動する拡散力を特徴づける緩和率 γ と結び付けるものである。

5.1.3 古典回帰理論

この節では $p(t)$ の相関関数を計算するための簡単な方法を示す。これは容易に量子相関関数に拡張できる。

最初に $F(t)$ と $p(t')$ の両方を含む相関関数 $\overline{F(t)p(t')}$ を計算する。式 (5.7) において t を $-\infty$ にすると、定常状態の相関関数が得られる。

$$\overline{F(t)p(t')} = \int_{-\infty}^{t'} dt'' \underbrace{\overline{F(t)p(t')}}_{2D\delta(t-t'')} e^{-\gamma(t-t'')} \quad (5.15)$$

もし $t \gg t'$ 、もっと正確にはもし $t - t' \gg \tau_c$ ならば、式 (5.15) のデルタ関数 $\delta(t - t'')$ は積分の範囲の外になり、

$$t - t' \gg \tau_c \quad \rightarrow \quad \overline{F(t)p(t')} = 0 \quad (5.16)$$

となる。このような結果は、過去の時間 t' におけるランジュバン力 $F(t')$ に依存する $p(t')$ が未来の時間 t におけるランジュバン力 $F(t)$ とは相関が無い事を意味する。一方、もし $t \ll t'$ 、もっと正確にはもし $t' - t \gg \tau_c$ ならば、式 (5.15) の積分の上限を $+\infty$ にまで拡張することができる。これは簡単に計算できて、

$$t' - t \gg \tau_c \quad \rightarrow \quad \overline{F(t)p(t')} = 2De^{-\gamma(t'-t)} \quad (5.17)$$

となる。最後に、 t が t' と十分近いときには $\overline{F(t)p(t')}$ は急激に $2D$ と 0 の間で時間間隔 τ_c に渡って変化する。 $t = t'$ の時には D となる (なぜなら $\overline{F(t)F(t')}$ は $t - t'$ の偶関数だからである)。これら全ての結果は図 5.1 においてまとめ直して表されている。

ここで自己相関関数 $\overline{p(t)p(t')}$ を計算する。このため、式 (5.1) の両辺に $p(t')$ をかけて、平均値をとると、

$$\frac{d}{dt}\overline{p(t)p(t')} = -\gamma\overline{p(t)p(t')} + \overline{F(t)p(t')} \quad (5.18)$$

となる。 $t - t' \gg \tau_c$ に対しては式 (5.16) より式 (5.18) の最後の項は消え、

$$t - t' \gg \tau_c \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\overline{p(t)p(t')} = -\gamma\overline{p(t)p(t')} \quad (5.19)$$

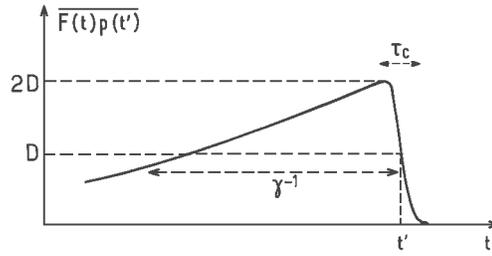


図 5.1: $\overline{F(t)p(t')}$ の時間変化。

が得られる。 $0 \leq t-t' \leq \tau_c$ に対しては、 $\overline{F(t)p(t')}$ は図 5.1 より D と同程度になる。この結果、式 (5.18) の最後の項の $\overline{p(t)p(t')}$ への寄与、これは $\overline{F(t)p(t')}$ の t'' を t' から t まで積分したものに等しいが、これは $D\tau_c$ によって上限が定められる。 $\tau_c \ll \gamma^{-1}$ であるので、この寄与は $D\gamma^{-1}$ に比べて非常に小さい。これは $\overline{p(t)p(t')}$ の $t-t'$ に対する初期値 p^2 に他ならない (式 (5.12) を見よ)。このため、 $t > t'$ に対しては、式 (5.18) の最後の項を無視でき、“二つの時間に対する平均” $\overline{p(t)p(t')}$ は式

$$\frac{d}{dt}\overline{p(t)p(t')} \simeq -\gamma\overline{p(t)p(t')} \quad (5.20)$$

に従う。これは“一つの時間に対する平均” $\overline{p(t)}$ に従う式

$$\frac{d}{dt}\overline{p(t)} = -\gamma\overline{p(t)} \quad (5.21)$$

と非常に良く似ている。言い換えれば、揺らぎは平均値に“再び戻す”。このような結果は量子相関関数に拡張することができ、これは“量子回帰理論”として知られる (文献 [18] および [2] の補足 C_{IV} と A_V を見よ)。

5.1.4 クラマース–フォッカー–プランク方程式

一次元ポテンシャル井戸 $U(x)$ 中をブラウン運動する粒子を考える。その位置 $x(t)$ とその運動量 $p(t)$ は次の式に従う。

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{p(t)}{M} \quad (5.22a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p(t) - \frac{d}{dx}U(x) + F(x) \quad (5.22b)$$

これはランジュバン方程式 (5.1) の単純な拡張である。ここでは分布関数 $\mathcal{P}(x, p, t)$ の時間発展方程式の微分の原理を求めたい。分布関数は時間 t において位置 x 、運動量 p の粒子を見出す確率密度である。

$x(t)$ と $p(t)$ の変化率は同じ時間 t の系の状態にのみ依存し、時間 t の過去における“履歴”には依存しないことは式 (5.22) より明らかである。この理由から、確率過程 $\{x(t), p(t)\}$ は“マルコフ過程”と呼ばれる。 $\{p(t)\}$ のみがマルコフ過程になることを記しておく。なぜなら式 (5.22b) より $dp(t)/dt$ は $dU(x)/dx$ に依存するからで、すなわち $x(t) = \int_{-\infty}^t dt' p(t')/M$ となり、これは $p(t)$ の全ての履歴を含んでいる。

マルコフ過程 $\{x(t), p(t)\}$ に関する分布関数 $\mathcal{P}(x, p, t)$ は方程式

$$\mathcal{P}(x, p, t) = \int \int dx' dp' \Pi(x, p, t/x', p', t') \mathcal{P}(x', p', t') \quad (5.23)$$

に従う。ここで $\Pi(x, p, t/x', p', t')$ は時間 t' で x', p' からスタートしたとした場合に時間 t で x, p で終わるための条件確率である。この確率は規格化される。

$$\int \int dx dp \Pi(x, p, t/x', p', t') = 1 \quad (5.24)$$

ここで時間間隔 δt を $\tau_c \ll \delta t \ll T_R$ となるように選ぶ。式 (5.23) と (5.24) の t を $t + \delta t$ に、 t' を t に置き換えると、式 (5.23) から次の式が導き出され、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, p, t + \delta t) - \mathcal{P}(x, p, t) = &+ \int \int dx' dp' \Pi(x, p, t + \delta t/x', p', t) \mathcal{P}(x', p', t) \\ &- \int \int dx'' dp'' \Pi(x'', p'', t + \delta t/x, p, t) \mathcal{P}(x, p, t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

これは明確な物理的意味を持っている。 δt によって割ると、この式は $\mathcal{P}(x, p, t)$ の x および p に対する変化率が変化率を除いた分の反対の符号を持つ変化率に等しいことを示している(?)。このためこれは $\mathcal{P}(x, p, t)$ のマスター方程式と考えることができる。

ここで $x(t)$ および $p(t)$ の t から $t + \delta t$ の間の変化

$$\begin{aligned} \partial x &= x(t + \delta t) - x(t), \\ \partial p &= p(t + \delta t) - p(t) \end{aligned} \quad (5.26)$$

がそれぞれ x と p における $\mathcal{P}(x, p, t)$ の幅 Δx および Δp に比べて小さいと仮定する (小さいジャンプの極限)。式 (5.25) において $\mathcal{P}(x', p', t')$ を $x' - x$ と $p' - p$ のべきで展開することにより、マスター方程式 (5.25) を偏微分方程式によって近似することができる。もし $\mathcal{P}(x', p', t')$ のテーラー展開が二次までで止めるとすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(x_1, x_2, t) = &-\frac{\partial}{\partial x_1} M_1 \mathcal{P} - \frac{\partial}{\partial x_2} M_2 \mathcal{P} \\ &+ \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij} \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

が得られ、ここで簡単化した表記 $x_1 = x, x_2 = p$ を用いており、また M_{ij} および D_{ij} は

$$M_i = \lim_{\tau \ll \delta t \ll T_R} \overline{\frac{\partial x_i}{\partial t}}, \quad (5.28a)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2!} \lim_{\tau \ll \delta t \ll T_R} \overline{\frac{\partial x_i \partial x_j}{\partial t}} \quad (5.28b)$$

によって与えられる。

M_i および D_{ij} を計算するために、式 (5.22) に立ち返り、5.1.2 節と同様の計算の後、次の関係が導き出される。

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial x}{\partial t}} &= \frac{p}{M}, & \overline{\frac{\partial p}{\partial t}} &= -\gamma p - \frac{dU}{dx}, \\ \overline{\frac{\partial x^2}{\partial t}} &= 0 = \overline{\frac{\partial x \partial p}{\partial t}}, & \overline{\frac{\partial p^2}{\partial t}} &= 2D \end{aligned} \quad (5.29)$$

これを式 (5.27) に代入したもものからクラームス–フォッカー–プランク方程式が与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(x, p, t) = & -\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(x, p, t) \\ & + \frac{\partial}{\partial p} \left[\gamma p + \frac{dU}{dx} \right] \mathcal{P}(x, p, t) + D \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{P}(x, p, t) \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.2 ハイゼンベルグ表記における運動量拡散の解析

5.2.1 運動量拡散係数とランジュバン力演算子

定義によって運動量拡散係数 D は運動量変化の増加率に関する。

$$2D = \frac{d}{dt} \Delta P^2(t) \quad (5.31)$$

$$\Delta P^2(t) = \langle [P(t) - \langle P(t) \rangle]^2 \rangle \quad (5.32)$$

2節に与えられている $P(t)$ に対するハイゼンベルグ方程式からスタートすると、

$$\frac{d}{dt} P(t) = F(t) \quad (5.33)$$

ここで $F(t)$ は力の演算子であるが、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle [P(t) - \langle P(t) \rangle]^2 \rangle &= \frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle - 2 \langle \frac{d}{dt} P \rangle \cdot \langle P \rangle \\ &= \langle F \cdot P + P \cdot F \rangle - 2F \cdot P. \end{aligned} \quad (5.34)$$

式 (5.34) に式 (5.33) の解

$$P(t) = \int_0^\infty d\tau F(t - \tau) \quad (5.35)$$

を代入し、式 (5.32) を用いて

$$\begin{aligned} 2D &= 2\text{Re} \int_0^\infty d\tau [\langle F(t) \cdot F(t - \tau) \rangle - \langle F(t) \rangle \cdot \langle F(t - \tau) \rangle] \\ &= 2\text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \delta F(t) \cdot \delta F(t - \tau) \rangle \end{aligned} \quad (5.36)$$

が導き出される。ここで $\delta F(t)$ は F の揺らぎの部分である。

$$\delta F(t) = F(t) - \langle F(t) \rangle \quad (5.37)$$

このため運動量拡散係数はランジュバン力演算子の相関関数の時間積分に関係することが分る。

次の節においてこのような相関関数の計算の簡単な概略を示し、 D に対する式 (5.44) を導く。この式の物理的な解釈は 5.2.3 節において示す。式 (5.36) の計算方法に興味が無い読者は 5.2.3 節に直接進んでもよい。

5.2.2 ランジュバン力演算子の相関関数

第2章において式(2.32)と(2.33)を見よ)ランジュバン力 $\delta\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ が二つの力 $\delta\mathbf{F}_{las}(\mathbf{r}, t)$ と $\delta\mathbf{F}_{vac}(\mathbf{r}, t)$ の和であることを見てきた。これらはそれぞれレーザー光の場合および真空場のランジュバン力への寄与を表す。 V_{AL} の式(2.4)および d の z 成分のみがゼロでないことから、簡単に

$$\delta\mathbf{F}_{las} = [d_z - \langle d_z \rangle] \nabla E_{Lz} \quad (5.38)$$

が得られる。ここで $\delta d_z = d_z - \langle d_z \rangle$ は d_z の揺らぎ部分である。式(2.5)および(2.14)から始まる同様の計算より、式(2.33b)は

$$\delta\mathbf{F}_{vac} = d_z \nabla (E_z^{vac})^+ + [\nabla (E_z^{vac})^-] d_z \quad (5.39)$$

と変換することが可能である。

式(5.36)において $\delta\mathbf{F}$ を $\delta\mathbf{F}_{las} + \delta\mathbf{F}_{vac}$ に置き換えることにより相関関数 $\langle \delta\mathbf{F}(t) \cdot \delta\mathbf{F}(t - \tau) \rangle$ が三つの寄与の和であることが示される。一つは $\delta\mathbf{F}_{las}$ のみを含み、もう一つは $\delta\mathbf{F}_{vac}$ のみを含み、残りの一つは $\delta\mathbf{F}_{las}$ と $\delta\mathbf{F}_{vac}$ の両方を含んでいる。式(5.39)に現れる時間 t における真空場の勾配は他の任意の時間 t' における双極子演算子 $d_z(t')$ と交換するという結果から、この最後の項はゼロであることが示される*。これによって $\nabla (E_z^{vac})^+$ を右端に、また $\nabla (E_z^{vac})^-$ を左端におくことが可能になり、真空場の平均値をとるとこれはゼロになる(式(2.15)を見よ)。このことから D は

$$D = D_{las} + D_{vac} \quad (5.40)$$

と書くことが可能になり、ここで

$$D_{las} = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \delta\mathbf{F}_{las}(t) \cdot \delta\mathbf{F}_{las}(t - \tau) \rangle \quad (5.41)$$

$$D_{vac} = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \delta\mathbf{F}_{vac}(t) \cdot \delta\mathbf{F}_{vac}(t - \tau) \rangle \quad (5.42)$$

である。

式(5.38)において ∇E_{Lz} は複素数で、このため $\delta\mathbf{F}_{las}$ の相関関数は δd_z の相関関数に比例する。 $\langle \delta d_z(t) \delta d_z(t - \tau) \rangle$ を計算するため、最初に δd_z を $\delta\Pi_{eg}$ と $\delta\Pi_{ge}$ によって表すことができる。ここで $\Pi_{ab} = |a\rangle\langle b|$ 、 $a, b = e$ または g である(式(2.39)を見よ)。先の2.5節において、 Π_{ab} の運動方程式が減衰項とランジュバン力((2.41)式を見よ)を持つランジュバン方程式の構造をしている事を既に示唆している。 $\dot{\Pi}_{ab}(t)$ を与える方程式の両辺に $\Pi_{cd}(t')$ をかけ、真空の平均をとり、先の5.1.3節で用いたのと非常に良く似た説明によって、 $t > t'$ に対しては二つの時間平均 $\langle \Pi_{ab}(t) \Pi_{cd}(t') \rangle$ は一つの時間平均 $\langle \Pi_{ab}(t) \rangle$ (c と d は固定)と同じ方程式に従う事が示される。このような重要な結果は”量子帰帰理論”として知られており(文献[18]および[2]の補遺 C_{IV} と A_V を見よ)、これは原子の双極子モーメントの相関関数が光ブロッホ方程式から計算できることを意味する。

ここで式(5.42)を評価することが残されている。式(5.39)を式(5.42)に代入すると、式(2.15)より、唯一ゼロでない項が

$$\langle 0 | d_z(t) [\nabla (E_z^{vac})^+(t)] [\nabla (E_z^{vac})^-(t - \tau)] d_z(t - \tau) | 0 \rangle \quad (5.43)$$

*このような結果を実際に示すため、場の勾配の中に現れる消滅演算子 $a_j(t)$ を $a_j(t')$ および t から t' の間に放射されるソースの場の関数として表すことができる。残りの交換子は k の奇関数のモード $k \in$ 全体の積分として現れるため、ゼロになる。

であることが分る。式 (5.43) に現れる二つの場の演算子の順番は複素数であるこれらの交換子を用いて変更することが可能である。この交換子の寄与はこのため d_z の相関関数に比例し、これは光ブロッホ方程式から計算可能である。残りの項は先に示唆した真空の自由場の勾配の演算子が任意の時間において双極子演算子と交換するという事を用いて変換する事が可能である。このため式 (2.15) の結果から簡単にこの項がゼロに等しい事が示される。

要約すると、 D は二つの項の和である事を見てきた。最初の項 D_{las} は δF_{las} および ∇E_{Lz} 、すなわち式 (2.36) で与えられる α と β を含む。第二の項 D_{vac} は真空の自由場の交換子、すなわちこの場の量子的性質から来るもので、これは α と β に依存しない。 D_{las} と D_{vac} の両方とも原子の双極子モーメントの相関関数を含み、これは量子回帰理論を用いて光ブロッホ方程式から計算できる。

5.2.3 物理的考察

$r=0$ において静止している 2 準位原子に対しては先の節において概略を示した計算方法によって次の結果が導き出され [8]

$$\begin{aligned}
D = & +\hbar^2 k_L^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{s}{1+s} \\
& + \hbar^2 \beta^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{s}{(1+s)^3} \left\{ 1 + \frac{12\delta^2 - \Gamma^2}{4\delta^2 + \Gamma^2} s + s^2 \right\} \\
& + \hbar^2 \alpha^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{s}{(1+s)^3} \left\{ 1 + \frac{-4\delta^2 + 3\Gamma^2}{4\delta^2 + \Gamma^2} s + 3s^2 + \frac{4\delta^2 + \Gamma^2}{\Gamma^2} s^3 \right\} \\
& - \hbar^2 \alpha \cdot \beta \delta \frac{s^2}{(1+s)^3} \left\{ 1 + \frac{4\Gamma^2}{4\delta^2 + \Gamma^2} + s \right\},
\end{aligned} \tag{5.44}$$

ここで s は $r=0$ での飽和パラメータで、式 (3.6) で与えられ、 α と β は $r=0$ における対数関数のラビ周波数の勾配と位相勾配で、式 (3.3b) と (3.3c) で与えられている。

式 (5.44) の最初の行は α と β とは独立であるが、これは D_{vac} で、これは真空自由場の演算子の非交換性から生じる。

$$D_{vac} = \hbar^2 k_L^2 \frac{\Gamma}{4} \frac{s}{1+s} \tag{5.45}$$

このような項はランダムな方向への自然放出光子による運動量の拡散を記述する。原子の運動量 P は運動量空間におけるランダムウォークを伴い、各ステップの大きさは $\hbar k_L$ で、 δt の間のステップの数は $\Gamma \sigma_{ee}^{st} \delta t$ で、ここで σ_{ee}^{st} は定常状態における励起状態の分布数で、(3.7) 式によって与えられる。ランダムウォークの良く知られた性質から δt の間の p の分散の増加が

$$\begin{aligned}
\overline{(\delta p^2)} - (\overline{\delta p})^2 &= \hbar^2 k_L^2 \Gamma \sigma_{ee}^{st} \delta t \\
&= \hbar^2 k_L^2 \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \delta t
\end{aligned} \tag{5.46}$$

と書けることが導かれる。式 (5.45) と (5.46) を比較すると、(5.46) の右辺は $2D_{vac}\delta t$ と書けることが示され、これは D_{vac} の物理的解釈を確かなものにする。

式 (5.44) の他の三行は D_{las} に相当する。平面レーザー光に対しては、 $\beta = -k_L$ および $\alpha = 0$ であるので、式 (5.44) の二番目の行だけが D_{las} に寄与する。この項は放射圧の揺らぎ、より正確に

は吸収光子数の揺らぎによる運動量拡散を記述する。式 (3.6) を用いると、これは

$$D_{abs} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s}{1+s} (1+Q) \quad (5.47)$$

と書き表すことができ、ここで Q は無次元量の係数で、

$$Q = \frac{2\Omega_1^2(4\delta^2 - 3\Gamma^2)}{(2\Omega_1^2 + 4\delta^2 + \Gamma^2)^2} \quad (5.48)$$

と与えられる。(5.47) を解釈するため、 δt の間に吸収されるレーザー光子数 δN と、これに対応して原子に移行する運動量 $\delta p = \hbar k_L \delta N$ を導入する。 δN はランダムな変数であるため、吸収光子数の揺らぎによって、運動量の分散は増加する。

$$\overline{(\delta p^2)} - (\overline{\delta p})^2 = \hbar^2 k_L^2 [\overline{\delta N^2} - (\overline{\delta N})^2] \quad (5.49)$$

最初に δt の間に吸収される平均光子数を考え、これは

$$\overline{\delta N} = \Gamma \sigma_{ee}^{st} \delta t = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \delta t \quad (5.50)$$

と与えられる(式 (3.16) を見よ)。もし δN がポアソンの法則にしたがっていたとすると、 δN の分散は $\overline{\delta N}$ に等しくなるだろう。実際にはそうではなく、文献 [19] で示すように、共鳴蛍光におけるポアソン統計に対する補正があり、これは式 (5.48) で与えられる係数 Q によって正確に表される。

$$\overline{\delta N^2} - (\overline{\delta N})^2 = \overline{\delta N} (1+Q) \quad (5.51)$$

これから式 (5.49) は式 (5.51)、(5.50) と (5.47) を用いて次の様に書き直すことができ、

$$\overline{(\delta p^2)} - (\overline{\delta p})^2 = 2D_{abs} \delta t \quad (5.52)$$

これは D_{abs} の物理的解釈が吸収光子数の揺らぎによるものだという確かなものにする。式 (5.45) と (5.47) の比較から、 D_{vac} と D_{abs} は同程度の大きさを持つことが示される。

レーザー光定在波中においては、 $\beta=0$ であるので、式 (5.44) の三番目の行が D_{las} に寄与する。この項は双極子力の揺らぎを記述し、 D_{dip} と書き表す。ここでは x 軸に沿って、 z 方向に直線偏光し、 $x=0$ で節となるレーザー光定在波を考える。

$$\mathbf{E}_L(x, t) = \epsilon 2\mathcal{E}_0 \sin k_L x \cos \omega_L t \quad (5.53)$$

式 (5.53) において、 \mathcal{E}_0 は定在波を形成する二つの対向するそれぞれの光の振幅で、これに対応するラビ周波数は Ω_1 に等しい。これから x における定在波のラビ周波数は

$$\Omega_1(x) = 2\Omega_1 \sin k_L x \quad (5.54)$$

となり、このため

$$\alpha = \frac{\nabla \Omega_1(x)}{\Omega_1(x)} = \epsilon k_L \frac{1}{\tan k_L x} \quad (5.55)$$

となる。最後に、 x における飽和パラメータ、 $s(x)$ は

$$s(x) = 4s_0 \sin^2 k_L x \quad (5.56)$$

に等しくなり、ここで

$$s_0 = \frac{\Omega_1^2/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \frac{s_0}{4} \quad (5.57)$$

は二つの対向するそれぞれの光の飽和パラメータで、 s_{max} は $s(x)$ の最大値である。式 (5.55) と (5.56) を式 (5.44) の三番目の行に代入したときに得られる D_{dip} の一般的な式はここでは議論しないことにする。光強度が十分低い限界 ($s_0 \ll 1$) および高い限界 ($s_0 \gg 1$) に限定することにする。

もし $s_0 \ll 1$ の場合、式 (5.44) の三番目の行は

$$D_{dip} \simeq \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 \cos^2 k_L x = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s_0}{4} \cos^2 k_L x \quad (5.58)$$

に帰着され、一方最初の行は

$$D_{vac} \simeq \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 \sin^2 k_L x \quad (5.59)$$

に等しくなる。 $D_{dip} + D_{vac}$ は x に依存せず、二つの対向するそれぞれの光に対する拡散係数の和に等しい。節の近傍では、例えば $x = 0$ 近傍では、非常に驚くべき結果が得られる。節には光が存在しないため、蛍光が無いと期待される。実際、 $x \rightarrow 0$ の時、 $D_{vac} \rightarrow 0$ となる。しかし D_{dip} は $x = 0$ において最大値をとり、これは $\hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 = \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_{max}/4$ に等しい。この問題は 6.3 節において再び取り上げ、節の近傍においては D_{dip} の大きな値が新しい種類の相関した再分配によるものであることを示す。

もし $s_0 \gg 1$ の場合、式 (5.44) の三番目の行は

$$D_{dip} \simeq \hbar^2 k_L^2 \cos^2 k_L x \frac{\Omega_1^2}{2\Gamma} \quad (5.60)$$

となる傾向がある*。式 (5.45) および (5.47) で与えられる D_{vac} および D_{abs} とは対照的に、 D_{dip} は強いレーザー光強度においても飽和しない。この結果に対するドレスド原子の解釈を 7.3 節に与える。先の 3.4 節において双極子力による光ポテンシャル井戸の深さは Ω_1 に比例して増加することが示されている。式 (5.60) によって示される、双極子力の揺らぎによる加熱が Ω_1 に対して二乗で増加する事はレーザートラップに対して厳しい制限を課することになる。しかし文献 [20] において示唆されている様に、時間的に交互に冷却と捕獲の相を分けることはいつでも可能である。

5.2.4 レーザー冷却におけるドップラー限界

レーザー冷却において到達する平衡温度は、 $\gamma = \alpha/M$ の割合で原子の速度を制動するレーザー冷却

$$\delta p / \delta t = -\gamma p \quad (5.61)$$

ここで α は摩擦係数である (式 (4.7) を見よ)、これと運動量拡散による加熱

$$\left(\frac{\delta p^2}{\delta t} \right)_{diffusion} = 2D \quad (5.62)$$

*式 (5.60) は節の近傍では $s(x) \rightarrow 0$ となるため有効ではなくなる。

の競合によって決まる。式 (5.61) から、これは

$$\left(\frac{\delta p^2}{\delta t}\right)_{cooling} = -2\gamma p^2 \quad (5.63)$$

となる。定常状態においては二つの変化率 (5.62) と (5.63) は相殺し、 $\gamma p^2 = D$ となる。平衡温度はこのため

$$\frac{p^2}{2M} = \frac{1}{2}k_B T = \frac{D}{2M\gamma} \quad (5.64)$$

となる。

式 (4.8) から光強度が低く、 $\delta = -\Gamma/2$ 、 $\alpha \sim \hbar^2 k_L^2 s_0$ に対しては、これは

$$\gamma \sim \frac{\hbar k_L^2}{M} s_0 \quad (5.65)$$

となる。一方、この節において導出された結果から (式 (5.45)、(5.47)、(5.58) を見よ)、光強度が低い場合には

$$D \sim \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_0 \quad (5.66)$$

となる。式 (5.65) と (5.66) を式 (5.64) に代入すると

$$k_B T_D \sim \frac{D}{M\gamma} \sim \hbar \Gamma \quad (5.67)$$

が導かれる。これから 2 準位原子のレーザー冷却によって到達する温度は Γ によって決まる事が明らかになる。到達可能な最低温度の正確な値は $k_B T_D \sim \hbar \Gamma/2$ によって与えられ (文献 [8, 21, 22] を見よ)、ドップラー限界と呼ばれる。 T_D は Na に対してはおおよそ $240\mu\text{K}$ 、Cs に対しては $125\mu\text{K}$ である。

5.3 原子のウィグナー関数に対する量子力学的運動方程式

ここでシュレディンガー表記を用いて原子の並進運動の自由度を記述する換算原子密度演算子の運動方程式を導出しようと試みてみる。ここでは単に導出の概略を与え、新しい結果および新しい物理的な洞察に重きを置く。より詳しくは文献 [17] と [23] に見出されるだろう。

5.3.1 原子のウィグナー関数

原子の内部および外部の両方の自由度を量子力学的に取り扱う時、原子の密度行列は二つの種類の量子数でラベルされる。例えば、重心の位置を表記に用いる場合、原子の密度行列要素は $\langle i, \mathbf{r}' | \sigma | j, \mathbf{r}'' \rangle$ となり、ここで $i, j = e$ または g で、 \mathbf{r}' および \mathbf{r}'' は位置演算子 R の固有値である。同様に運動量表記を用いれば $\langle i, \mathbf{p}' | \sigma | j, \mathbf{p}'' \rangle$ が得られる。

非常に有用な表記で位置と運動量を対称的に扱うものいわゆる”ウィグナー表記”があり [24]、これは原子の密度演算子 σ と関連し、 \mathbf{r} と \mathbf{p} の関数として

$$\begin{aligned} W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{h^3} \int d^3 u \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}/\hbar) \langle i, \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u}}{2} | \sigma | j, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}}{2} \rangle \\ &= \frac{1}{h^3} \int d^3 v \exp(+i\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/\hbar) \langle i, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{v}}{2} | \sigma | j, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{v}}{2} \rangle \end{aligned} \quad (5.68)$$

と与えられる。式 (5.68) より、ウィグナー関数を導入することができ、

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = W_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + W_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (5.69)$$

これは内部状態に関わらず \mathbf{r} に運動量 \mathbf{p} の原子を見出す”擬確率”の密度である。原子のウィグナー関数は実数で、規格化され全ての \mathbf{R} と \mathbf{P} に完全に対称な関数に対して通常確率として現れる。これには例えば、

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \rangle = \int d^3r d^3p \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (5.70)$$

があげられる。しかし $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ は負の値を取りうるため、これは真の確率ではないことを記しておく。

5.3.2 一般化した光ブロッホ方程式

これらの運動方程式は先の 2.5 節での議論を外部自由度を量子力学的に扱う場合に一般化する。これらは式 (2.42) におけるそれと同様の構造を持っており、言い換えればハミルトニアン H の項の和は原子のハミルトニアン H_A と原子-レーザー相互作用ハミルトニアン V_{AL} と自然放出による減衰項からなる。新しい性質は外部量子数の出現である。

例えば、 $W_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & \\ & - \frac{\mathbf{p}}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ & + \frac{id}{\hbar} \int d^3k \left[\mathcal{E}^-(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} W_{eg}(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) - \mathcal{E}^+(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} W_{ge}(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) \right] \\ & + \Gamma \int d^2\kappa \phi(\kappa) W_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar k_A \kappa). \end{aligned} \quad (5.71)$$

となる。最初の項は σ と $H_A^{ext} = P^2/2M$ の交換子に由来するもので、第二項は σ と V_{AL} の交換子に由来し、 $\mathcal{E}^+(\mathbf{k})$ と $\mathcal{E}^-(\mathbf{k})$ はそれぞれレーザー光の正および負のフーリエ周波数成分である。最後に最終項は自然放出による励起状態から基底状態への供給を表し、 $\phi(\kappa)$ は方向 κ への自然放出の相対確率を、そして k_A は ω_A/c に等しい。

原子の運動量は吸収および放出過程の間は離散的な変化を行うことは式 (5.71) より明らかである。これより一般化された光ブロッホ方程式は $i, j = e$ または g の四つの関数 $W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ が結びついた差分方程式となる。このような方程式は数値的以外には簡単には取り扱えないため、これらを簡単化するいくつかの近似を導入する。

5.3.3 クラマース-フォッカー-プランク方程式を導く近似

原子の運動を特徴づける二つの小さな数のパラメータを導入するところから始める。

$$\epsilon_1 = \frac{\hbar k_L}{\Delta p} = \frac{\text{反跳運動量}}{\text{運動量広がり}} \quad (5.72)$$

$$\epsilon_2 = \frac{k_L \Delta p}{M\Gamma} = \frac{\text{ドップラー効果}}{\text{自然幅}} \quad (5.73)$$

条件 $\epsilon_1 \ll 1$ はまた原子のコヒーレンス長 $\xi_A = \hbar/\Delta p$ がレーザーの波長 k_L^{-1} に比べて小さいことを意味する。これは先に導入した局在化の仮定 (2.28) と等価で、これが半古典論の限界を定義する。条件 $\epsilon_2 \ll 1$ は原子の速度がすでに (レーザー冷却によって) 十分減衰しており、このためドップラー効果を摂動的に扱うことが可能である。このような条件は先に式 (2.21) で導入した運動量空間における局在化の仮定と等価である。実際、ドップラー冷却限界近くにおいては式 (5.67) に従って、 $\Delta p^2/2M \sim \hbar\Gamma$ となり、これから

$$\epsilon_1 \sim \epsilon_2 \sim \sqrt{E_R/\hbar\Gamma} \quad (5.74)$$

が導かれる。

一般化された光ブロッホ方程式を ϵ_1 と ϵ_2 のべきで展開することにより、これらの差分方程式を結合した偏微分方程式に置き換えることが可能になり、これはより簡単に扱う事ができる。もう一つ重要な点は ϵ_1 と ϵ_2 の零次においてウィグナー関数 (5.69) は、他の全ての変数が Γ^{-1} 程度の時間スケールにおいて変化する中で、この関数は時間発展しないことである。これは光子の運動量が零の極限において ($k_L = 0$)、光子-原子の相互作用は原子の位置または速度を変化させることはできない事を意味する。またこれは $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll 1$ なので、この問題にはゆっくり変化する変数 $f(r, p)$ があり、これに関しては他の全ての変数を断熱的に取り除くことができ、 $f(r, p)$ に対する単一の換算時間発展方程式が導かれ、これは原子の運動を記述する量子力学的運動方程式である。

このような一般的な手順はいくつかの論文に示されており [25][28]、これは $f(r, p)$ に対するクラマース-フォッカー-プランク方程式を導く。文献 [17] に示されている扱いの有利な点は 2 準位原子に限定されない操作方法を用いており、拡散および摩擦係数に対してハイゼンベルグ表記の力の演算子の二つの時間に対する平均を用いてより明確な構造による一般的な表現を導く。これからシュレディンガー表記によって得られる結果とハイゼンベルグ表記における結果が等価であることが証明でき、摩擦力および平衡温度に対する新しい物理的な洞察を得ることが可能になる。

5.3.4 物理的考察

文献 [17] において導出されている $f(r, p)$ の運動方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & -\frac{\mathbf{p}}{M} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \\ & + \sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \left[D_{las}^{ij}(\mathbf{r}) + D_{vac}^{ij}(\mathbf{r}) \right] \\ & + \sum_{i,j=x,y,z} \gamma_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial p_i} (p_j f) \\ & + \partial^2 f / \partial p_i \partial p_j \text{の項} \end{aligned} \quad (5.75)$$

$-(\mathbf{p}/M) \cdot (\partial f / \partial \mathbf{r})$ の項は ϵ_1 と ϵ_2 に対して次数がゼロであるが、これが原子の自由運動を記述する。次の項 $-(\partial f / \partial \mathbf{p}) \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r})$ は ϵ_1 に対して一次の大きさであるが、これは平均放射力 \mathcal{F} によるウィグナー関数の運動量のドリフトを記述する。これは 3 節において \mathbf{r} で静止した原子に対して調べた。残りの項は全て ϵ_1 および ϵ_2 に対して二次の大きさで、最後の $(\partial^2 f / \partial p_i \partial p_j)$ の項はほとんどの場合において無視される。

$\partial^2 f / \partial p_i \partial p_j$ の項は運動量の拡散を記述する。 D_{las}^{ij} と D_{vac}^{ij} は式 (5.41) と (5.42) に似た式によって与えられる拡散テンソルである。ここでは、二つの δF は i または j 成分によって置き換えられ

る。これによって5.2.2節において導入された二つの拡散係数 D_{las} と D_{vac} はまさに式 (5.75) に現れる拡散テンソルのトレースであることが示される。

$\partial(p_j F)/\partial p_i$ の項と

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{i\hbar}{M} \int_0^\infty \tau d\tau \langle [F_{Li}(\mathbf{r}, t), F_{Lj}(\mathbf{r}, 0)] \rangle_{st}, \quad (5.76)$$

ここで $F_L = -\nabla V_{AL}$ は V_{AL} (式 (2.16) の第一項) に関連する力の演算子で、また平均値は \mathbf{r} で静止する原子の定常状態における値であるが、これらによって摩擦が記述される。この項と $\partial f/\partial p$ の項を結び付けると、実際に

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\mathcal{F}_i(\mathbf{r}) - \sum_j \gamma_{ij} p_j \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (5.77)$$

が与えられる。このため、 $-\sum_j \gamma_{ij} p_j$ は摩擦力として現れ、これは p に比例し、第3章において得られた \mathbf{r} で静止している原子に対する力 \mathcal{F}_i を補正する。摩擦テンソル γ_{ij} の式 (5.76) を解釈するために線形応答理論の良く知られた結果を最初に思い起こす [29]。もし物理系 S が定常状態 σ_{eq} にあり、 $V(t) = -\lambda(t)M$ によって摂動を受けているとする。ここで $\lambda(t)$ は t の古典的な意味の関数で、 M は S の観測量である。このとき時間 t における S のもう一つの観測量 N の平均値は λ に対して一次のオーダーにおいて

$$\langle N(t) \rangle = \langle N \rangle_{eq} + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \chi_{NM}(t-t') \lambda(t'), \quad (5.78)$$

と与えられる。ここで $\chi_{NM}(\tau)$ は線形応答関数で

$$\chi_{NM}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \theta(\tau) \langle [N(\tau), M(0)] \rangle_{eq} \quad (5.79)$$

に等しい。式 (5.79) において $\theta(\tau)$ はヘビサイド関数 ($\tau > 0$ に対して 1 に等しく、 $\tau < 0$ に対しては 0 に等しい) で、 $N(\tau)$ と $M(0)$ は (V が無い場合における) 自由なハイゼンベルグ演算子である。摩擦テンソルの式 (5.76) に交換子の平均値が現れる事から、 γ_{ij} を線形応答関数と解釈することが示唆される。より正確にはレーザー光と動いている原子の間の相互作用ハミルトニアンは

$$-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{M}(t-t_0) \right) \simeq -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{r}) + \sum_{j=x,y,z} -\frac{p_j}{M}(t-t_0) \nabla_j \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{r}) \quad (5.80)$$

と書き表される。最後の項、ここではこれを $F_{ij} = \nabla_j(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L)$ とおくこととするが、これは原子の運動による摂動とみなすことができ、

$$- \sum_{j=x,y,z} \frac{p_j}{M}(t-t_0) F_{Lj}(\mathbf{r}) \quad (5.81)$$

と書き表すことができ、すなわち $V(t)$ に似た項の和として表され、ここでは $\lambda(t) = -(t_0 - t)p_j/M$ および $M = F_{Jj}$ である。式 (5.78) より、 $N = F_{Li}(\mathbf{r})$ の t_0 における平均値が p の一次の大きさで、

$$\begin{aligned} \langle F_{Lj}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \rangle &= \langle F_{Lj}(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \mathbf{0}, t_0) \rangle \\ &+ \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\chi_{F_{Li}, F_{Lj}}(t_0 - t')] \left[-(t_0 - t') \frac{p_j}{M} \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

に等しい事が導かれる。ここで $t = t_0$ とおいた。式 (5.79) を用いて、式 (5.82) の最後の項は $-\sum_j \gamma_{ij} p_j$ と書き表され、式 (5.77) に見出される摩擦力と一致することを示すことができる。このため摩擦力は原子の運動による摂動に対する力の線形応答として現れる。

この節の結果を要約すると、レーザー光中の原子の運動とポテンシャル井戸中のブラウン運動には密接な関係がある事が分る。一般化された光ブロッホ方程式より始めて、原子のウィグナー関数に対するクラマース-フォッカー-プランク方程式 (5.30) と非常に良く似た運動方程式を導き、さらに相関関数と線形感受率によって拡散および摩擦テンソルに対する簡単な物理的解釈を得ることを可能にする。最後に平衡温度は式 (5.64) およびこの節の結果より、

$$k_B T \sim \frac{D}{M\gamma} \sim \frac{\int_0^\infty d\tau \langle \delta F(\tau) \delta F(0) + \delta F(0) \delta F(\tau) \rangle}{(i/\hbar) \int_0^\infty \tau d\tau \langle \delta F(\tau) \delta F(0) - \delta F(0) \delta F(\tau) \rangle} \quad (5.83)$$

と書くことができる。もし式 (5.83) の分子および分母にそれぞれ現れる反交換子と交換子の平均値が同じ程度の大きさであるとする、

$$k_B T \sim \frac{\hbar}{\langle \tau \rangle} \quad (5.84)$$

が予想される。ここで $\langle \tau \rangle$ はランジュバン力演算子 δF の相関時間と同じ程度の大きさである。5.2.2 節において δF の相関時間が原子の双極子モーメント d_z の相関時間に比例することを見てきたので、 $\langle \tau \rangle$ は原子の内部状態の時間 T_{int} と同程度である。これより

$$k_B T \sim \frac{\hbar}{T_{int}} \quad (5.85)$$

となる。2準位原子に対しては $T_{int} \sim \Gamma^{-1}$ で、式 (5.85) において再びドップラー限界 (5.67) を見出す。式 (5.85) は Γ^{-1} よりもはるかに長い内部状態の時間が存在すればもっとより低い温度が達成可能であることを示唆する。このような状況の例はこのコースの第二部において与えられる。

第6章 摂動における基本物理過程

6.1 はじめに

飽和が小さい場合 ($s \ll 1$)、すなわち低い光強度または大きな離調の場合、光子-原子相互作用は基本的な吸収および放出過程を基に摂動論的に解析することが可能である。平面波中にある原子に対しては、このような解析は基本的な保存則と併に放射力の主な特徴、その平均値、速度依存性、揺らぎの簡単な解釈を与える (3.3、4.1 節および 5.2.3 節を見よ)。

レーザー光がいくつかの平面波の重ね合わせである場合は状況はより複雑になる。これらの波の間に存在する位相関係によって、これらの寄与は独立には足し合わせることができない。これらの間には干渉効果があり、これによって例えばレーザー定在波中の原子の運動の解析は平面進行波中のそれより困難になる。このような困難の一例は定在波の節にある原子の非常に興味ある振る舞いによってもたらされる。このような場所では光は存在せず、光子の吸収が無いため、原子の運動量拡散係数 D はゼロになると予想するかもしれない。しかし、このような簡単な予想は D の計算によって否定され、この計算によって D が節において腹と同じ大きさになることが予想される! (5.2.3 節を見よ)

この章の動機はこれらの問題に対して、異なる散乱振幅の間の量子的干渉を用いて新しい物理的な洞察を得ようとすることである。レーザー光の場を古典的に扱う代わりに、先の節と同様に、ここでは単一光子状態を考え、これは異なる運動量を持つ状態の線形結合である。またこのような状態が良く局在した原子の波束によってどのように散乱されるかを調べる。このような方法は飽和が小さい極限に限定されるが、通常の方法、それは原子の換算運動方程式を得るために場の変数を”トレース”するものであるが、これと比べていくつかの有利な点がある。ここでは全系 $A+F$ (原子 + 場) の状態ベクトルが保存されるとする。このため原子-場の相関が重要な役割をするかどうかにより簡単に見る事ができる。また入射光子の時間発展を追って、これが消滅するか (吸収過程は入射光子が最初の真空モードに放出される蛍光光子に置き換える)、または最初の励起光のあるモードから別のモードへ移行されるか (再分配過程) を見る事が可能になる。

散乱振幅の干渉の考え方は最初にレーザー平面波中の原子の簡単な場合において導入する (6.2 節)。初期状態の時間発展を調べることで、入射光と原子による前方散乱光との間の干渉から光子の吸収が生じることを示すことができる。次に (6.3 節において) 定在波の節に局在する原子の波束を考え、対応する一光子状態は反対の運動量 $+\hbar k_L$ および $-\hbar k_L$ を持つ二つの状態の線形結合である。原子の運動量の広がりによって原子は節に留まろうとするが、これは前方および後方への散乱振幅を含む、 $+\hbar k_L$ および $-\hbar k_L$ モード間の光子の再分配をもたらすより微妙な干渉効果によるものであることを示す。この両モードは原子の運動量と相関がある。このような”相関がある再分配”のもう一つの重要な特徴は、これが散逸的であるということで、これはローレンツ型吸収曲線と同様にレーザー光の離調によって変化する。干渉する散乱振幅と同じ定式化を用いて、6.4 節において節の外で現れる双極子力による通常の再分配が 6.3 節において議論した反動的で原子の運動量と相関が無いものとは全く異なる事を示す。最後に、6.5 節において定在波中に動く原子を

扱い、どのような時に前方および後方散乱振幅の間の干渉効果が無視できるか、すなわち二つの光の放射圧が独立に足し合わせる事ができるかを求める。

6.2 平面波中に原子がいる単純な場合

$t = 0$ において全体の系 A+F(原子 + 場) が状態

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_F\rangle = |g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L \epsilon_L\rangle, \quad (6.1)$$

にある。ここで $|\psi_A\rangle = |g, \mathbf{p}\rangle$ は A(原子) が g 状態で運動量 \mathbf{p} を持つ状態を表し、 $|\psi_F\rangle = |\mathbf{k}_L \epsilon_L\rangle$ は場が運動量 $\hbar \mathbf{k}_L$ で分極 ϵ_L を持つ単一光子の状態を表す。A+F の時間発展はハミルトニアン

$$H = H_A + H_F + V_{AF} \quad (6.2)$$

によって与えられ、ここで H_A と H_F は式 (2.2) および (2.3) で与えられる原子および場のハミルトニアンである。ここでは入射光の場を量子力学的に扱い、このため式 (2.1) の二つの相互作用項 V_{AL} と V_{AV} を単一の原子-場の相互作用項 $V_{AF} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})$ に置き換える。ここで $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ は全(入射 + 真空)場の演算子で、これは (2.6) と類似の式によって与えられる。

$$V_{AF} = -i\mathbf{d} \cdot \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \epsilon a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} + \text{h. c.} \quad (6.3)$$

時間 T 後に A+F の状態ベクトルは $H_A + H_F$ に関する相互作用表示において、

$$|\Psi(T)\rangle = c(T)|g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L \epsilon_L\rangle + |\Psi_\perp(T)\rangle, \quad (6.4)$$

となり、ここで $|\Psi_\perp(T)\rangle$ は $|\Psi(t)\rangle$ の初期状態 (6.1) に直交する状態への射影を表す。このような射影は $\mathbf{k}_F \neq \mathbf{k}_L$ または $\epsilon_F \neq \epsilon_L$ または原子が励起状態であるような蛍光 $\mathbf{k}_F \epsilon_F$ がある状態を含む。ここでは振幅

$$c(T) = \langle g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L \epsilon_L | U(T) | g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L \epsilon_L \rangle, \quad (6.5)$$

に興味があり、ここで $U(T)$ は発展演算子で、これは初期状態 (6.1) がどのように無くなるかを記述している。

V_{AF} が単一光子の吸収または放出過程を記述するので、式 (6.5) に対して V_{AF} に二乗で寄与する振幅は二つだけで、これは図 6.1 における二つの (ファインマン) ダイアグラム a と b によって表される。これらはそれぞれ何も起きない過程 (ダイアグラム a は V_{AF} に関してゼロ次) と、入力光が吸収され、再び放出される過程 (ダイアグラム b は二次) を表す。

散乱理論の良く知られた結果を用いて (例えば、文献 [2] の A_I を見よ)、 $c(T)$ の V_{AF} のべき展開における零次および二次の項を得る。

$$c^{(0)}(T) = 1, \quad (6.6)$$

$$c^{(2)}(T) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in}) \frac{|\langle e, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_L; 0 | V_{AF} | g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L \epsilon_L \rangle|^2}{E_{g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L} - [E_{e, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_L; 0} - i\hbar(\Gamma/2)]} \quad (6.7)$$

式 (6.7) において、 $\delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in})$ はエネルギー保存を表すデルタ関数である。このような関数は実際に有限の相互作用時間 T に関連する幅 $\delta E \sim \hbar/T$ を持つ散乱の関数である。

$$\delta^{(T)}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^T d\tau e^{-iE\tau/\hbar} = e^{-iE\tau/2\hbar} \frac{\sin ET/2\hbar}{\pi E} \quad (6.8)$$

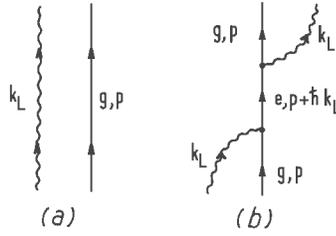


図 6.1: 振幅 (6.5) に寄与する過程を表す (ファインマン) ダイアグラム。

E_{fin} および E_{in} は振幅 (6.5) に現れる初期状態および終状態の非摂動エネルギーである。ここでは両者は一致するので、 $E_{fin} - E_{in} = 0$ となり、式 (6.8) の $E \rightarrow 0$ の極限に対する式が得られる。

$$\delta^{(T)}(0) = \frac{T}{2\pi\hbar} \quad (6.9)$$

式 (6.7) の分子は V_{AF} の図 6.1 のダイアグラム b の初期状態および中間状態の間の行列要素の二乗で、これは式 (6.3) を用いて

$$|\langle e, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_L; 0 | V_{AF} | g, \mathbf{p}; \mathbf{k}_L \epsilon_L \rangle|^2 = d^2 \mathcal{E}_{\omega L}^2 = d^2 \frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 L^3} \quad (6.10)$$

と等しくなる。ここで d は ϵ - d の状態 e と g の間の行列要素である。式 (6.10) において、 $\mathcal{E}_{\omega L}^2$ は単一光子 $\mathbf{k}_L \epsilon_L$ に相当する電場の二乗と考えることができる。式 (6.7) の分母は図 6.1 のダイアグラムの非摂動状態の初期状態および中間状態のエネルギー差である。

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= E_g + \hbar\omega_L + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \left(E_e - i\hbar\frac{\Gamma}{2} \right) - \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_L)^2}{2M} \\ &= \hbar \left(\delta + i\frac{\Gamma}{2} \right) - \frac{\hbar\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{p}}{M} - \frac{\hbar^2 k_L^2}{2M} \end{aligned} \quad (6.11)$$

原子の励起状態 e の非摂動エネルギーに $-i\hbar\Gamma/2$ が足されてある。ここで Γ は励起状態 e の自然幅である。このような手順は共鳴散乱理論においては良く知られたもので、励起状態のプロパゲーターと真空場との全ての次数の結合を考慮することによってこれを繰り込むことに相当する (例えば文献 [2] の補遺 B_{III} とこの補遺の図 7.3 と図 7.4 を見よ—ここでは状態 e と g のラムシフトは E_e と E_g に含まれていると仮定している)。式 (6.11) の第二行の終わりの二つの項はドップラシフトと反跳シフトを表す。ここではこれらのシフトが e の自然幅に比べて小さいと仮定する。

$$\left| \frac{\hbar\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{p}}{M} \right|, \quad \frac{\hbar^2 k_L^2}{2M} \ll \Gamma \quad (6.12)$$

このため

$$\mathcal{D} \simeq \hbar \left(\delta + i\frac{\Gamma}{2} \right) \quad (6.13)$$

式 (6.7) を書き直すため、式 (6.9)、(6.10) および (6.13) を用いることにより、振幅 (6.5) に対して V_{AF} の二次のオーダーまで求められる。

$$c(T) = 1 - iT \frac{d^2 \mathcal{E}_{\omega L}^2 / \hbar^2}{\delta + i(\Gamma/2)} = 1 - \frac{\Gamma'}{2} T - i\delta' T \quad (6.14)$$

ここで

$$\Gamma' = \Gamma \frac{d^2 \mathcal{E}_{\omega_L}^2 / \hbar^2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \Gamma \frac{\Omega_1^2/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \Gamma \frac{s_0}{2} \quad (6.15a)$$

$$\delta' = \delta \frac{d^2 \mathcal{E}_{\omega_L}^2 / \hbar^2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \delta \frac{\Omega_1^2/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \delta \frac{s_0}{2} \quad (6.15b)$$

である。単一光子状態 $|k_L \epsilon_L\rangle$ に対するラビ周波数 $\Omega_1 = -2d\mathcal{E}_{\omega_L}/\hbar$ と式 (3.6) で与えられる対応する飽和パラメータ s_0 を導入した。

ここで式 (6.14) の物理的な内容を議論することにする。もし T がそんなに長くないとすると、(6.14) は

$$c(T) \simeq e^{-(\Gamma'/2+i\delta')t} \quad (6.16)$$

と書き換える事ができる*。式 (6.16) の係数の二乗をとることにより、

$$|c(T)|^2 \simeq e^{-\Gamma' t} \quad (6.17)$$

が得られ、これは Γ' が初期状態の減衰確率、または吸収確率、より厳密には入射光子の全散乱確率と考えられることを示している。式 (6.14) より Γ' は入射光と前方散乱振幅の虚部との間の干渉に関連していることが明らかである。 Γ' の離調 δ 依存性はローレンツ型吸収曲線を示すが、これは散逸過程に対して期待されるものである。式 (6.16) において $\hbar\delta'$ は原子-場の結合による初期状態のエネルギーシフトとして現れる。実際、このようなシフトは入射光子によって作り出される原子の基底状態の光シフト以外の何ものでもない [50, 51]。式 (6.14) より、 δ' は入射光と前方散乱振幅の実部の間の干渉に関連する。この δ 依存性 (ローレンツ型分散曲線) は反動的な過程に期待されるものである。

6.3 定在波中の節にある原子

6.3.1 原子+場の系の初期状態

ここでは z 軸方向に直線偏光して $\sin k_L x$ に空間依存するモードの場を考える。式 (5.53) によって表される $x=0$ において節となるレーザー光がつくる定在波はこのような場のモードを擬古典的に励起することに相当する。ここではこのモードが最初に単一の基本的な励起を起こし、この一光子状態の数学的な表現を光子と良く定義された運動量を表す状態を用いて求めてみる。表記をできるだけ簡単にするため、 $\pm k$ によって波数ベクトル $\pm k \epsilon_x$ と分極 ϵ_x を持つ進行波モードを表す。

$a_{\pm k}$ と $a_{\pm k}^\dagger$ をモード $\pm k$ における光子に対する消滅および生成演算子とする。これらの演算子から、演算子

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k - a_{-k}) \quad (6.18a)$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k + a_{-k}) \quad (6.18b)$$

*この結果は実際には摂動の展開を再合計することにより厳密に求められる。例えば文献 [2] の第 III 章を見よ。

およびそれらの共役な演算子を導入する。これより b_k および b_k^\dagger が消滅および生成演算子であることがすぐ分り、これは

$$b_k|0\rangle = 0, \quad (6.19a)$$

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (6.19b)$$

を満足するからである。同様な関係が c_k および c_k^\dagger に対して成り立ち、さらにこれらは b_k および b_k^\dagger と交換する。もし式 (2.6) の展開式における進行波モードの電場の演算子において $a_{\pm k}$ と $a_{\pm k}^\dagger$ に比例する項に再グループ化すると、すぐに b_k と b_k^\dagger には $\sin kx$ がかけられており、一方 c_k と c_k^\dagger には $\cos kx$ がかけられているのが分る。これから b_k と b_k^\dagger (c_k と c_k^\dagger) は定在波モード $\sin kx$ ($\cos kx$) の基本的な励起に対する消滅および生成演算子であることが示される。このため定在波 $\sin kx$ の基本的な単一の励起を表す量子状態は

$$|\psi_F\rangle = b_{k_L}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_{k_L}^\dagger - a_{-k_L}^\dagger]|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+k_L\rangle - |-k_L\rangle] \quad (6.20)$$

と書き表される。これは明らかに単一光子状態 $|\pm k\rangle$ と良く定まった運動量 $\pm\hbar k_L$ との線形結合 (統計的混合状態ではない!) である。最後に単一光子状態 (6.20) に関連する飽和パラメータ $s(x)$ は

$$s(x) = 2s_0 \sin^2 k_L x = s_{max} \sin^2 k_L x \quad (6.21)$$

となり、ここで $s_0 = s_{max}/2$ は式 (6.15) に用いられている飽和パラメータで、平面進行波モードにおける単一光子に対応する。式 (6.21) と (5.56) は係数 2 だけ異なり、これは式 (6.21) に現れる二つの対向する平面波モードのそれぞれに対して平均光子数が 1 ではなく、1/2 であることによる。

初期原子状態 $|\psi_A\rangle$ に対して、原子は基底状態 g にあるとし、波束によって表される原子の重心は定在波 $\sin k_L x$ の節 $x = 0$ 近傍に非常に良く局在しているものとする。

$$|\psi_A\rangle = \sum_p c_p |g, p\rangle \quad (6.22)$$

場の状態 (6.20) の場合と同様に、 x 軸に沿った原子の運動量に対して、 $p\epsilon_x$ の代わりにより簡単な表記 p を用いる。式 (6.22) において、 c_p は実数で、また $p = 0$ 付近を中心とした p の偶関数である。このため位置空間においては波束は $x = 0$ 近傍を中心とし、全体としての速度はゼロである。 c_p の p 依存のカーブの幅は Δp によって表され、これは $\hbar/\Delta x$ と同程度である。ここで Δx は位置空間における波束の幅である。局在化の仮定は

$$\Delta x \ll \lambda_L \Leftrightarrow \Delta p \gg \hbar k_L \quad (6.23)$$

と等価である。

6.3.2 初期分布状態の一つに残る確率振幅

$t = 0$ において全系 A+F が初期状態

$$\begin{aligned} |\Psi_{in}\rangle &= |\psi_A\rangle \otimes |\psi_F\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p c_p [|g, p; +k_L\rangle - |g, p; -k_L\rangle], \end{aligned} \quad (6.24)$$

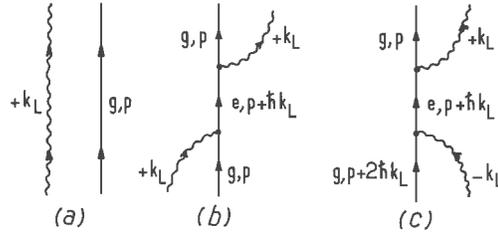


図 6.2: \mathcal{A}_p^+ に寄与する過程で、 V_{AF} に関して二次の次数までのものを表す (ファインマン) ダイアグラム。

にあるとする。ここで $+k_L$ と $-k_L$ モードの場合だけに光子が分布しているものとする。時間間隔 T の後、系は時間発展し、 $+k_L$ と $-k_L$ モードの場の光子の分布が変化し、最初に空のモードが今度はある大きさの振幅に励起され、これは蛍光光子の出現を表す。この節においては初期分布モードの時間発展に興味がある。より厳密には、時間 $t = T$ において全系 $A+F$ が状態 $|g, p; k_L\rangle$ または $|g, p; -k_L\rangle$ に見出されるため、振幅

$$\mathcal{A}_p^\pm = \langle g, p; \pm k_L | U(T) | \Psi_{in} \rangle \quad (6.25)$$

を計算したい。

最初に、振幅 \mathcal{A}_p^+ を考える。6.2 節と同じダイアグラムを用いると、 \mathcal{A}_p^+ は V_{AF} に関して二次の次数で図 6.2 のダイアグラム a, b, c にそれぞれ対応する三つの項の和であることが分る。

ダイアグラム a は零次で、b および c は二次の次数でそれぞれ前方および後方散乱過程を表す。図 6.2 の各交点に明確に現れる全運動量保存により、これ以外の \mathcal{A}_p^+ への寄与は無いことが簡単にチェックできる。全系が最初に状態 $|g, p; k_L\rangle$ にあるために、ダイアグラム a と b は振幅 $\langle g, p; k_L | \psi_{in} \rangle = c_p / \sqrt{2}$ 倍され、一方、ダイアグラム c は $\langle g, p + 2\hbar k_L; -k_L | \psi_{in} \rangle = -c_{p+2\hbar k_L} / \sqrt{2}$ 倍され、これは $A+F$ が最初に状態 $|g, p + 2\hbar k_L; -k_L\rangle$ にあるための振幅である。図 6.2 の三つのダイアグラムは同じ終状態で終わるが、これは異なる初期状態 $|g, p; k_L\rangle$ と $|g, p + 2\hbar k_L; -k_L\rangle$ から始まる。これらは式 (6.24) で与えられる初期状態 $|\psi_{in}\rangle$ が $|g, p; k_L\rangle$ と $|g, p + 2\hbar k_L; -k_L\rangle$ の線形結合であることにのみより干渉する。

ダイアグラム a と b に対しては終状態は同じであるため、 $E_{fin} - E_{in} = 0$ になり、式 (6.9) を用いる事ができる。ダイアグラム c に対しては

$$\begin{aligned} E_{fin} - E_{in} &= \frac{p^2}{2M} - \frac{(p + 2\hbar k_L)^2}{2M} \\ &= -\frac{2\hbar k_L p}{M} - \frac{2\hbar^2 k_L^2}{M} \simeq \frac{2\hbar k_L \Delta p}{M} \end{aligned} \quad (6.26)$$

となり、なぜなら式 (6.23) に対応して $p \sim \Delta p \gg \hbar k_L$ であるからである。 $\delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in})$ 関数とダイアグラム c の寄与を乗じたものは幅 \hbar/T を持つ。もし

$$E_{fin} - E_{in} \simeq \frac{\hbar k_L \Delta p}{M} \ll \frac{\hbar}{T} \quad (6.27)$$

だとすると、 $\delta^{(t)}$ 関数において $E_{fin} - E_{in}$ を 0 に置き換える事ができ、ダイアグラム b の場合と同じ結果 $T/2\pi\hbar$ を得る。式 (6.27) の物理的意味は極めて明確である。このような条件はまた

$$\frac{\Delta p}{M} T \ll \frac{1}{k_L} \sim \lambda_L \quad (6.28)$$

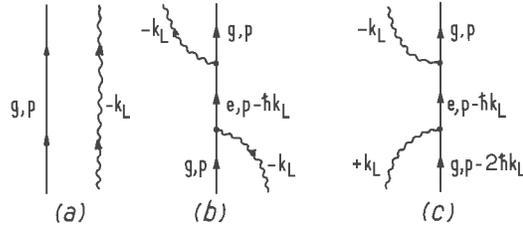


図 6.3: \mathcal{A}_p^- に寄与する過程で、 V_{AF} に関して二次の次数までのものを表す (ファインマン) ダイアグラム。

と書き表せ、これは T があまり長くはならず、このため T の間波束の空間的な広がり $\Delta p T / M$ がレーザーの波長 λ_L に比べて引き続き小さい事を意味する。そうでない場合は、もはや原子は節 $x=0$ において局在しているとみなせなくなる。

図 6.2 の三つのダイアグラムに関連する振幅の計算は 6.2 節に示したものと非常によく似ている。 V_{AF} の行列要素は、分母のエネルギーと同様、似ている。この節では運動量拡散係数に興味がある。これは 5.2.3 節の結果から Γ' に比例する。このため、式を簡単にするため、

$$\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta' = 0 \quad (6.29)$$

を仮定する。これから \mathcal{A}_p^+ に対して次のような結果が導かれる。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} c_p - \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \frac{\Gamma' \Gamma}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{p+2\hbar k_L} \frac{\Gamma' \Gamma}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_p - \frac{\Gamma' \Gamma}{2} (c_p - c_{p+2\hbar k_L}) \right], \end{aligned} \quad (6.30)$$

ここで一行目の第一項、二項、三項はそれぞれ図 6.2 のダイアグラム a、b、c に対応する。

$\Delta p \rightarrow \infty$ 、 $c_p - c_{p+2\hbar k_L} \rightarrow 0$ の極限において、 \mathcal{A}_p^+ はもはや T に依存しない。このような結果は、節に完全に局在する原子に対しては ($\Delta x \sim \hbar / \Delta p \rightarrow 0$)、ダイアグラム b と c の寄与の間の干渉は完全に打ち消し合うことを意味し、これは完全に光子の吸収を抑制する。実際には Δp は無限大にとることはできない。なぜならそうすると $|\psi_A\rangle$ のノルムが無限になってしまうからである (条件 (6.27) も見よ)。 $c_p - c_{p+2\hbar k_L}$ を

$$\epsilon = \frac{\hbar k_L}{\Delta p} \sim \frac{\Delta x}{\lambda_L} \quad (6.31)$$

のべきで展開することにより、式 (6.30) を

$$\mathcal{A}_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \left[1 + \Gamma' T (\hbar k_L \frac{c_p'}{c_p} + \hbar^2 k_L^2 \frac{c_p''}{c_p} + \dots) \right] \quad (6.32)$$

と変換することができる。状態 $g, p; -k_L\rangle$ に残り続けるための振幅 \mathcal{A}_p^- は同じ行に沿って解析できる。図 6.3 に図 6.2 のそれと似た干渉する散乱振幅が与えられている。

同様に、式 (6.30) と (6.32) に対応する式は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}} c_p + \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \frac{\Gamma' \Gamma}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{p-2\hbar k_L} \frac{\Gamma' \Gamma}{2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} c_p \left[1 - \Gamma' T (\hbar k_L \frac{c_p'}{c_p} - \hbar^2 k_L^2 \frac{c_p''}{c_p} + \dots) \right] \end{aligned} \quad (6.33)$$

となる。式 (6.32) と (6.33) を合わせると、最終的に V_{AF} と ϵ の二次の次数で時間 T における $A+F$ の状態ベクトルが得られる。

$$\begin{aligned} |\Psi(T)\rangle = & \sum_p c_p |g, p\rangle \\ & \otimes \left\{ +\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \right) |k_L\rangle \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \right) |-k_L\rangle \right\} \\ & + \pm k_L \text{ 以外のモードを含む状態} \end{aligned} \quad (6.34)$$

式 (6.34) の第 3 行までは初期分布状態 $\{|g, p; \pm k_L\rangle\}$ に対する $|\psi(T)\rangle$ の部分空間 \mathcal{E}_0 への射影を与える。

6.3.3 物理的な考察

式 (6.34) において明らかに示されるように、時間 T 後に原子の状態 $|g, p\rangle$ は光子状態 $|\psi_F(p, T)\rangle$ と相関を持つようになる。これは p と T に依存し、式 (6.34) のかっこの中の式で与えられる。 $|\psi_F(p, T)\rangle$ は c'_p/c_p および c''_p/c_p を通して p に依存するため、 $|\psi(T)\rangle$ の \mathcal{E}_0 への射影 (式 (6.34) の最初から三行めまでに与えられている) は原子の状態と光子の状態の積としては書くことができない。これらの相互作用の結果、原子と場の上に量子相関が現れている。

$|\psi_F(p, T)\rangle$ のノルムの二乗は V_{AF} と ϵ の二次の次数までにおいて、

$$\langle \psi_F(p, T) | \psi_F(p, T) \rangle = 1 + 2\Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \quad (6.35)$$

と与えられる。式 (6.35) において $\hbar^2 k_L^2 c''_p/c_p$ は $(\hbar k_L/\Delta p^2)^2 = \epsilon^2$ と同じオーダーで、このため光子の吸収は ϵ の二次のオーダーにのみ現れる。このような結果は明確な物理的意味を持っている。その有限の空間幅 Δx によって、原子の波束は距離 Δx に渡って節の近傍を探っており、そこはもはや強度はゼロではなく、 $\sin^2 k_L \Delta x \sim k_L^2 \Delta x^2 \sim \hbar^2 k_L^2 / \Delta p^2 = \epsilon^2$ に比例している。

もし ϵ の一次のオーダーに限定すれば、 $|\psi_F(p, t)\rangle$ は

$$|\psi_F(p, T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \right) |k_L\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \right) |-k_L\rangle \quad (6.36)$$

と書き表され、 T が増加してもそのノルムは 1 のまま一定に保たれる。 ϵ の一次のオーダーにおいては光子の吸収は起きないという事は入射光に何も起きないということの意味するのではない。式 (6.36) よりモード $+k_L(-k_L)$ に光子がある確率 $P_+(P_-)$ は時間的に $P_{\pm}(0)$ から $P_{\pm}(T)$ に変化することが分る。

$$P_{\pm}(0) = \frac{1}{2} \rightarrow P_{\pm}(T) = \frac{1}{2} \pm \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \quad (6.37)$$

$+k_L$ または $-k_L$ のモードの一つが占有される確率は増加し、これに対してもう一方のモードが占有される確率は同じ量だけ減少する。このような現象は入射光子の二つの初期分布モード $\pm k_L$ 間における”再分配”に相当し、場の平均運動量の変化 δp_F をもたらし、これは

$$\delta p_F = 2\hbar k_L \left(\Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \right) = 2\Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c'_p}{c_p} \quad (6.38)$$

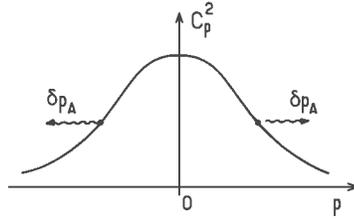


図 6.4: 原子の運動量分布。矢印は関連した再分配によってこのような運動量分布がいかに変化するかを示している。

と与えられる。全運動量の保存により、相当する平均原子運動量の変化 δp_A は

$$\delta p_A = -\delta p_F = -2\Gamma'T\hbar^2k_L^2\frac{c'_p}{c_p} \quad (6.39)$$

と与えられる。

式 (6.37) によって表される光子の再分配の非常に重要な性質は、これが原子の運動量 p に依存することである。ここでこのような関連した再分配によっていかにして節で起こる大きな運動量拡散を説明できるかを示す。図 6.4 は p に対する初期運動量分布 c_p^2 を示す。これらの変化は c_p のそれに似ており、それは c_p が実数で正と仮定しているからである。 p の正の値を考える。ここでは c'_p/c_p は負である。式 (6.39) はこのような p の値に対しては、関連した再分配過程は p の正の変化 δp_A をもたらし、これは図 6.4 で右向き矢印で表されている。同様に、式 (6.39) より $p < 0$ に対しては p の負の変化 δp_A がある (図 6.4 の左向き矢印)。 δp_A は p の奇関数なので、この解析から原子の運動量分布は関連した光子の再分配によって全体的なシフトは無しに広がるという結論が得られる。

先の議論はもっと定量的にすることが可能である。 $p_A = p$ の運動量を持つ原子に対して、 p_A の変化 δp_A は p_A^2 の分散をもたらし、これは

$$\delta(p_A^2) = 2p_A\delta p_A = 2p\delta p_A = -4\Gamma'T\hbar^2k_L^2p\frac{c'_p}{c_p} \quad (6.40)$$

と与えられる。式 (6.40) を $p_A = p$ を中心に平均化を行うため、式 (6.40) に確率 $c_p^2 dp$ をかけ、 p_A は p から $p + dp$ の値をとり、 p を中心に積分すると、

$$\overline{\delta p_A^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta p_A^2 c_p^2 dp = -4\Gamma'T\hbar^2k_L^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p c_p c'_p dp. \quad (6.41)$$

が与えられる。部分積分と c_p^2 が規格化されることにより、最終的に

$$\overline{\delta p_A^2} = 2DT \quad (6.42)$$

が与えられ、ここで運動量拡散 D は式 (6.15) と (6.21) より

$$D = \hbar^2k_L^2\Gamma' = \hbar^2k_L^2\Gamma\frac{s_0}{2} = \hbar^2k_L^2\Gamma\frac{s_{max}}{4} \quad (6.43)$$

と与えられる。これは式 (5.58) で与えられる Gordon–Ashkin 等による節における値と定量的に一致する。この節を終えるにあたって定在波の節にある原子の振る舞いに関して得られた結果を要約する。

(i) $+k_L$ と $-k_L$ の 2 モード間の光子の再分配があり、これは光子の吸収よりも重要である。なぜならこれは $\epsilon = \Delta x/\lambda$ の (二次の代わりに) 一次のオーダーであるからである。

(ii) δ' ではなく Γ' に比例するこの再分配は原子の反動的な応答ではなく、散逸的な応答に関係する。

(iii) 全体的に、この再分配は $\overline{p_A}$ ではなく $\overline{p_A^2}$ を変化させる。これは平均がゼロの力を持つ運動量拡散をもたらす。

(iv) この再分配は原子の運動量と相関がある。 $\overline{p_A^2}$ の増加率が $\Delta x \sim \hbar/\Delta p \rightarrow 0$ とすると消えない事はこの再分配によって説明される。 $\delta p_A^2 = 2p_A \delta p_A$ を与える式 (6.40) において、 p_A が Δp の増加に伴って比例的に Δp まで増加するという事が δp_A の減少を相殺している。この δp_A は式 (6.39) より、 $c'_p/c_p \sim 1/\Delta p$ のように変化する。この相殺によって Δp に依存しない拡散係数 D が導かれる。

最後にこの節の議論によって原子-場の相関の重要性が明確に示されていることを記しておく。この相関は全系 $A + F$ の状態ベクトルの式 (6.34) にはっきりと現れている。しかしこれは A の換算した時間発展のみを記述するマスター方程式を基にした通常取り扱いがこれらの相関を無視しているということではない。これらはマスター方程式の微分において考慮されている。これらが式 (6.34) 中に暗示的ではなく明示的に現れていることは節において D がゼロにならない物理的な効果をここで示した取り扱いにおいてより簡単に同定することが可能であることの説明になっている。

6.4 定在波中の全ての点にある原子

3.4 節において不均一な光の中にある原子が感じる双極子力は光を形成する多くの平面波の間の光子の再分配による反動力であることを言ってきた。この章で表した定式化は再分配過程を調べるのに非常に良く適しているため、定在波の任意の位置、特に腹にある原子に対してこれを適用しようとするのは興味がある。これによって双極子力を引き起こす再分配と先の節において解析した相関のある再分配の間に存在する違いを説明することが可能になるだろう。新しい見方は腹における運動量拡散に寄与する各種の過程や、共鳴蛍光における非ポアソン効果の起源を得ることができる。

6.4.1 原子の初期状態

ここで原子の波束 $\tilde{\psi}(x)$ を考える。これは 6.3.1 節の波束 $\psi(x)$ と同じものであるが、ここでは x_0 だけ平行移動しており、このため x_0 の周りに良く局在していることを表している。

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x - x_0) \quad (6.44)$$

式 (6.44) のフーリエ変換をとることにより

$$|\tilde{\psi}_A\rangle = \sum_p \tilde{c}_p |g, p\rangle = \sum_p c_p e^{-ipx_0/\hbar} |g, p\rangle \quad (6.45)$$

が導かれ、これは式 (6.22) を置き換える。 $|\tilde{\psi}_A\rangle$ の平面波による展開係数 \tilde{c}_p はもはや実数ではない。初期光子状態 (6.20) は変化せず、定在波モード $\sin k_L x$ の基本的な励起を記述する。

6.4.2 時間 T における状態ベクトル $A+F$ に対する新しい表現

ここでは双極子力に興味があるため、これは $\delta = 0$ において無くなるため、 $\delta = 0$ はもはや仮定しない。このため式 (6.29) は

$$\delta \neq 0 \quad \rightarrow \quad \delta' = \delta \frac{s_0}{2} \neq 0 \quad (6.46)$$

と置き換えられる。

式 (6.30)、(6.32) および (6.33) を導く全ての計算は、

$$\begin{aligned} c_p &\rightarrow \tilde{c}_p = c_p e^{-ipx_0/\hbar} \\ \frac{\Gamma'}{2} &\rightarrow \frac{\Gamma'}{2} + i\delta' \end{aligned} \quad (6.47)$$

と置き換えを行えば変わらない。これから時間 T における $A+F$ の状態ベクトルを与える式は式 (6.34) と同じ構造

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_p \tilde{c}_p |g, p\rangle \otimes |\psi_F(p, T)\rangle \\ &\quad + \pm k_L \text{ 以外のモードを含む状態} \end{aligned} \quad (6.48)$$

を持つ。ここで光子状態 $|\psi_F(p, T)\rangle$ は式 (6.36) を一般化する式によって与えられる。置き換え (6.47) は $|+k_L\rangle$ と $|-k_L\rangle$ の係数の実部を変え、これは光子の吸収および再分配が $x = 0$ と $x = x_0$ で異なる事を意味する。虚部もこれらの係数に現れるが、これはエネルギーのシフトを表す。ここではこれらの虚部は調べないことにする。そのかわり吸収および再分配の変化に焦点をあてることにする。 $|\psi_F(p, T)\rangle$ における $|+k_L\rangle$ と $|-k_L\rangle$ の係数の実部のみが保存されているとすると、 V_{AF} の二次、 ϵ の一次の次数で、

$$\begin{aligned} |\psi_F(p, T)\rangle &= \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \Gamma' T \sin^2 k_L x_0 + 2\hbar k_L \delta' T \frac{c'_p}{c_p} \sin 2k_L x_0 \right. \\ &\quad \left. + \delta' T \sin 2k_L x_0 + \hbar k_L \delta' T \frac{c'_p}{c_p} \cos 2k_L x_0 \right] |+k_L\rangle \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \Gamma' T \sin^2 k_L x_0 + 2\hbar k_L \delta' T \frac{c'_p}{c_p} \sin 2k_L x_0 \right. \\ &\quad \left. - \delta' T \sin 2k_L x_0 - \hbar k_L \delta' T \frac{c'_p}{c_p} \cos 2k_L x_0 \right] |-k_L\rangle \\ &\quad + \text{虚数項} \end{aligned} \quad (6.49)$$

が得られる。式 (6.49) において c'_p/c_p に依存しない項は $|\psi(T)\rangle$ の式 (6.48) における因数分解された原子-光子状態を導く。なぜならこれらは p に依存しない (原子状態 (6.45) は因数分解によって外に出すことができる)。これに対して、 c'_p/c_p に比例する項は p に依存し、分離することができない量子相関を含む”絡み合った”原子-光子状態を導く。

式 (6.49) より、 $t = T$ において光子がモード $+k_L(-k_L)$ にある確率 $P_+(T)(P_-(T))$ は

$$\begin{aligned} P_{\pm}(T) &= \frac{1}{2} - \Gamma' T \sin^2 k_L x_0 + 2\hbar k_L \delta' T \frac{c'_p}{c_p} \sin 2k_L x_0 \\ &\quad \pm \delta' T \sin 2k_L x_0 \pm \hbar k_L \Gamma' T \frac{c'_p}{c_p} \cos 2k_L x_0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

と与えられる。 $P_+(T)$ と $P_-(T)$ の和は入射光子が初期分布の二つのモード $\pm k_L$ の内の一つに生き残る確率 $P(T)$ を与える。

$$P(T) = 1 - 2\Gamma' T \sin^2 k_L x_0 + 4\hbar k_L \delta' T \frac{c'_p}{c_p} \sin 2k_L x_0 \quad (6.51)$$

最後に $P_+(T)$ に $+\hbar k_L$ をかけ、 $P_-(T)$ に $-\hbar k_L$ をかけ、さらに二つを足すと、時間 T 後の場の平均運動量の変化 δp_F が与えられ、これはまた $-\delta p_A$ に等しい。ここで δp_A は原子の運動量の変化である。

$$\delta p_F = 2\hbar k_L \delta' T \sin 2k_L x_0 + 2\hbar^2 k_L^2 \Gamma' T \frac{c'_p}{c_p} \cos 2k_L x_0 = -\delta p_A \quad (6.52)$$

6.4.3 入射光子の吸収

入射光子の消失は式 (6.51) によって表される。式 (6.51) の最終項は原子の運動量 p に関連のある吸収を記述しているが、これは $c_p^2 dp$ を乗じて p で積分するとお s の寄与はゼロになる。これは ϵ の一次の次数で、 $\Delta x \sim \hbar/\Delta p \rightarrow 0$ の極限においてゼロになる。

式 (6.51) の最初の項が残されているが、これは x_0 における吸収確率 $\Gamma'(x_0)$ を導き、これは

$$\Gamma'(x_0) = 2\Gamma' \sin^2 k_L x_0 = \Gamma \frac{s(x_0)}{2} \quad (6.53)$$

と与えられる。ここで $\Gamma' = \Gamma s_0/2$ (式 (6.15a) を見よ) と s_x の式 (6.21) を用いている。結果 (6.53) は x_0 にある原子に対して飽和パラメータが s_{x_0} の時に得られる通常の吸収確率と一致する。

6.4.4 非相関再分配と双極子力

式 (6.52) における c'_p/c_p に依存しない項は c'_p/c_p に依存しない項からくる。これは $P_+(T)$ と $P_-(T)$ における符号と逆である。これらの項はモード $+k_L$ と $-k_L$ の間の再分配を表し、これは反動的 (δ' に比例) で原子の運動量 p には相関が無い。これらは平均的な力 \mathcal{F}

$$\mathcal{F} = \frac{\delta p_A}{T} = -\hbar k_L \delta' \sin 2k_L x_0 \quad (6.54)$$

を起こし、これはまた

$$\mathcal{F} = -\frac{d}{dx_0} \hbar \delta'(x_0) \quad (6.55)$$

と書き表すこともできる。ここで

$$\hbar \delta'(x_0) = 2\hbar \delta' \sin^2 k_L x_0 = \hbar \delta \frac{s(x_0)}{2} \quad (6.56)$$

は x_0 における基底状態の光シフトである。このような力はポテンシャルから導き出される通常の大極子力そのものである。このポテンシャルは強度が低い時には基底状態の光シフトエネルギーに一致する

式 (6.52) において c'_p/c_p に比例する項は再分配を表し、これは散逸的で (Γ' に比例し)、また p と相関がある。このような再分配は先の 6.3 節において学んだものと同じものであるが、 δp_F が

$\cos 2k_L x_0$ 倍されている点だけが異なる。これは節においては+1に等しいがそれ以外では負の値になりうる。これよりこのような相関のある再分配は6.3節で示したような原子の運動量分布を広げる代わりに狭くすることができる。これに対応する”拡散係数”は

$$D_{\text{correl.red.}} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma' \cos 2k_L x_0 \quad (6.57)$$

と書き表される。

6.4.5 全運動量拡散係数

p_A^2 の変化 $\overline{\delta p_A^2}$ は式 (6.57) を導く相関した再分配からだけでなく吸収過程からももたらされる。

$P_+(T)$ の展開 (6.50) より、 T の間に (モード $-k_L$ には再分配されずに) モード $+k_L$ の光子が一個吸収される確率は $\Gamma' T \sin^2 k_L x_0$ に等しい。このような吸収過程においては原子の運動量は p から $p + \hbar k_L$ に変化し、 p^2 の分散は $\hbar^2 k_L^2 + 2p\hbar k_L$ に等しい。同様にモード $-k_L$ の光子が同じ確率 $\Gamma' T \sin^2 k_L x_0$ で吸収されると (式 (6.50) を見よ)、 p^2 の分散は $\hbar^2 k_L^2 - 2p\hbar k_L$ に等しくなる。これから p^2 の吸収過程による平均変化は

$$\begin{aligned} \overline{\delta p_A^2} &= \Gamma' T \sin^2 k_L x_0 [\hbar^2 k_L^2 + 2p\hbar k_L + \hbar^2 k_L^2 - 2p\hbar k_L] \\ &= 2T \hbar^2 k_L^2 \Gamma' \sin^2 k_L x_0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

と与えられ、これは $2D_{\text{abs}}T$ と書き表され、ここで

$$D_{\text{abs}} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma' \sin^2 k_L x_0 \quad (6.59)$$

は吸収に関連する拡散係数である。

式 (6.57) と (6.59) の足し合わせによりレーザー光の場に関係する全拡散係数 D_{las} が与えられる*。

$$D_{\text{las}} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma' \cos^2 k_L x_0 = \hbar^2 k_L^2 \Gamma' \frac{s_{\text{max}}}{4} \cos^2 k_L x_0 \quad (6.60)$$

ここで $\Gamma' = \Gamma s_0/2$ という関係を用いた。このような結果は Gordon–Ashkin の結果 [8] と一致する。定在波においては、これを形成する対向する光のそれぞれに吸収される光子数の平均 $\overline{N_+} = \overline{N_-}$ を考え、 $N_+ - N_-$ がポアソン統計に従うランダム変数であることを仮定することにより式 (6.59) が得られる事が容易に確かめられる。この節によって導出された結果から、定在波の節にある原子の奇妙な振る舞いを与える相関する再分配はまた $N_+ - N_-$ の揺らぎにおけるポアソン統計の補正も与えることが示される。

6.5 定在波中の原子の運動

ここで原子の波束が群速度 $v_0 = p_0/M$ を持っているとは仮定する。このため運動量空間において運動量分布は6.3節においては0であったが、これに代わりに p_0 を中心としている。この最終節においてこの p_0 がゼロでないことに起因するいくつかの物理的効果を調べる。

*6.4.4節で調べた無相関の再分配は D_{las} には寄与しない。なぜなら対応する変化 $\overline{\delta p_A^2}$ は T ではなく T^2 に比例するからで、また $2p\delta p_A$ の p に対する平均は p と δp_A の相関が無い場合、ゼロになるからである。

前節における式において最初に導入すべき変更点は式 (6.11) において与えられているエネルギーの分母 \mathcal{D} に関するもので、これは図 6.1、6.2、6.3 のダイアグラム b に相当する。ドップラーシフト $-\hbar k_L p/M$ は $-\hbar k_L p_0/M$ を中心に $\hbar k_L \Delta p/M$ の範囲で変化する。引き続き $\hbar \Gamma$ との比較において $\hbar k_L \Delta p/M$ (そして $\hbar^2 k_L^2/2M$) が無視できる。しかし平均ドップラーシフト $-k_L p_0/M = k_L v_0$ は自然幅 Γ に比べて必ずしも小さくはない。式 (6.13) においてこれを残しておく必要があり、これは

$$\mathcal{D} = \hbar \left(\delta - k_L v_0 + i \frac{\Gamma}{2} \right) \quad (6.61)$$

となる。同様の考察によって図 6.2、6.3 のダイアグラム c に関連するエネルギーの分母は式 (6.61) の $-k_L v_0$ を $+k_L v_0$ に置き換えたものに等しい事が示される。エネルギーの分母の項のこれらの変更の結果、式 (6.15) で与えられるパラメータ Γ' と δ' の v 依存性が得られ、これは吸収確率 Γ' および基底状態の光シフト $\hbar \delta'$ がドップラー効果によっていかに変更されるかを物理的に表している。

v_0 の値がゼロでないことは図 6.3 と図 6.4 のダイアグラム c のエネルギー保存を表す $\delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in})$ 関数において重要な役割を果たす (ダイアグラム b に対しては初期状態および終状態が同じで、このため式 (6.9) を用いることができる)。式 (6.26) の代わりに、ここでは

$$\begin{aligned} E_{fin} - E_{in} &= \frac{p^2}{2M} - \frac{(p + 2\hbar k_L)^2}{2M} \\ &= -\frac{2\hbar k_L p}{M} - \frac{2\hbar^2 k_L^2}{M} \simeq -2\hbar k_L v_0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

となる。ここでダイアグラム c の寄与に現れるデルタ関数を $E_{fin} - E_{in} = 0$ の場合ではなく、 $E_{fin} - E_{in}$ が (6.62) の値において評価してみる。この値は v_0 が十分大きいときにはデルタ関数の幅 \hbar/T よりも大きくなりうる。より正確には、もし

$$\hbar k_L v_0 \gg \hbar/T \quad (6.63)$$

とすると、ダイアグラム c の寄与は b に比べて無視できるようになり、c は省略可能である。条件 (6.63) はまた

$$v_0 T \gg 1/k_L = \lambda_L \quad (6.64)$$

と書き表せ、これは相互作用時間 T の間、原子がレーザー波長 λ_L の数倍程度動く事を意味する。原子は λ_L 以上に渡って空間的に平均化した力を受けることになる。

先の結果は数 λ_L 以上に渡って平均化した放射力はもはや前方散乱と後方散乱の振幅の干渉効果には敏感ではなくなる事を示している。前方散乱の振幅のみが入射光と干渉可能である。もし空間的に平均化した力にのみ興味がある場合には、低い強度においてなぜ二つの光の効果を独立に足し合わせることが可能であるかがこのようにして理解できる。二つの光に対してそれぞれのドップラーシフトの符号が反対であるため、吸収確率は異なり、ドップラー効果による二つの放射圧の間の不均衡の結果としてドップラー冷却に対する良く知られた物理的描像が得られる。

第7章 強い光の極限における物理的な機構

7.1 はじめに

先の節において強いレーザー光定在波中の原子の運動に関する結果をいくつか示してきたが、これらは明確な物理的な解釈が与えられていなかったように思われる。例えば、任意の離調 $\delta = \omega_L - \Omega_A$ に対して、速度が低い極限 ($k_L v_0 \ll \Gamma$) における空間的に平均をとった速度に依存する力の符号はレーザー強度に依存する。強度が弱い極限 ($s_0 \ll 1$) においては、この力は $\delta < 0$ に対して制動力となり、この結果、これは定在波を成す二つの対向する平面波がもたらす放射圧の間のドップラー効果による不均衡と解釈することができる (6.5 節を見よ)。しかし強度が増すと、摩擦力は”非制動力”力に移行し、このような符号の変化はダイアグラムによる方法によっては解釈することができない。なぜなら遷移強度の摂動的な展開は先の 6 章で用いたのと似て、もはや収束しない。これ以外の興味をそそる結果の一例としてはレーザー定在波中に静止する原子の運動量拡散係数に関するものがある。これはレーザー平面波の場合に起こると反対にレーザー強度を増しても飽和しない (式 (5.60) を見よ)。この章の目的は強いレーザー光中の原子の運動の異なる理論的取り扱いを示すことである。これはこのような予期しない性質に対する簡単な物理的描像を与える。

このような取り扱いは”ドレスド原子”の方法を基にしており*、これは最初に強いラジオ波と相互作用する原子を記述するのに導入され [30, 31]、その後、光学領域に拡張され、強く共鳴するまたは近共鳴するレーザー光線中の共鳴蛍光 [32]–[34]、そして光子相関 [34]–[38] を解釈するのに用いられた。この方法の原理は 7.2 節に簡単に表されているが、これは最初のステップとして先ず”原子+レーザー光子”全体の系が真のエネルギー準位を持つ孤立した系としてそれぞれ互いに相互作用しているものとして考える (ドレスド状態)。このような近似は強度が強い極限において正当化され、これは原子–レーザー光場の結合 V_{AL} が原子–真空場の結合 V_{AV} よりもはるかに大きいからである (図 1.1 を見よ)。それから次のステップでは V_{AV} の効果を考慮し、放射緩和機構として記述する。これは例えばドレスド状態間で良く定義された確率で分布の移動をもたらす。このためこの方法においては共鳴蛍光がドレスド原子の段階的放射として現れる。

文献 [39] に示されているように、ドレスド原子の方法は動いている原子にも拡張できる。もしレーザー光の場のモード関数が空間的に変化すると、ラビ周波数、そしてその結果ドレスド状態のエネルギーは位置に依存するようになり、それぞれのドレスド状態に対して位置依存のポテンシャルエネルギーおよび対応する力を定義することが可能である。Stern-Gerlach 効果におけるのと同様に、ドレスド原子の内部状態に依存する二値を持つ力が得られる。ドレスド状態間にランダムに起こる自然放出遷移は原子が感じる瞬間的な力の符号をランダムに変化させる [8, 39]。7.3 節においていかにしてこのような描像が双極子力の符号、平均値、そして揺らぎの物理的な解釈を与えるかを示す。ここでは定性的な議論に限定することにする。なぜなら定量的な結果は文献 [39] に見出すことができるからである。

これらの一般的な考え方を強いレーザー光定在波中に動く原子に適用することにより、最後に 7.4

*ドレスド原子の方法の一般的な解説とその様々な応用は文献 [2] の VI 章と補遺 A_{VI} および V_{VI} を見よ

節において新しいタイプのレーザー冷却機構、“シシフォス”冷却を紹介する。このような名称は、空間的に変調されたポテンシャル曲線中を動く原子がギリシャの神話に現れるシシフォスと同様にポテンシャルの丘を下りるよりも上る方が多いことに由来する。またシシフォス冷却の詳しい取り扱い文献 [39] に示されており、ここでは物理的な考え方に焦点を置くことにする。最後に第9章において異なる状況においてシシフォス機構に再び戻ることにする。ここで扱う強いレーザー光中の2準位原子の代わりに、9章ではいくつかの基底状態の副準位を持つ原子が弱いレーザー光中を動いている場合を考える。

7.2 ドレイド原子による方法

レーザー光場は周波数 ω_L の量子放射場の単一モードの擬古典的な励起として扱う。空間的に不均一なレーザー光中の原子の運動を調べようとしているため、このようなモードは一般的には平面波ではないが、例えば原子が中にある仮想的な共振器のモードと考えられる。共振器中の原子が“感じる”局所的な場は実際に感じるものと同じである必要がある(同じ平均値、同じ空間的依存性...)。また共振器の体積 V は共振器効果による自然放出の変化を避けるため十分大きい必要がある。レーザーモード L のハミルトニアン H_L は

$$H_L = \hbar\omega_L(a_L^\dagger a_L + \frac{1}{2}) \quad (7.1)$$

で、ここで a_L^\dagger と a_L はレーザー光子の生成および消滅演算子である。 H の固有状態 $|N\rangle$ は

$$H_L|N\rangle = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega_L|N\rangle \quad (7.2)$$

を満足し、ここで $N = 0, 1, 2, \dots$ で、これはモード L に N 個の光子がある状態を表す。 L の状態はコヒーレント状態と仮定し(文献 [40] および文献 [41] の補遺 G_V を見よ)、このため N の平均値 $\langle N \rangle$ と N の値の $\langle N \rangle$ 近傍での分散 ΔN は

$$\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle} \quad (7.3)$$

という関係がある。唯一エネルギー密度 $\langle N \rangle \hbar\omega_L / V$ が物理的意味を持つ。このため $\langle N \rangle / V$ を一定に保ったまま $\langle N \rangle$ と V を非常に大きくとることができる。このような極限においては

$$\langle N \rangle \gg \Delta \gg 1, \Gamma T, \quad (7.4)$$

となる。ここで ΓT は時間 T の間に放出される蛍光の光子数のオーダーを与える。

この節においては原子は与えられた点 r において静止しているものと仮定し、最初にこの r におけるドレイド状態を導入する。結合が無いと、“原子+レーザー光子”の結合した系のエネルギー準位は二つの量子数、原子に対しては e または g 、レーザー光子に対しては N によってラベルされる。このような“非摂動”状態は図 7.1 において左側に表されている。レーザー周波数 ω_L が原子の遷移周波数 ω_A に近づくと、これらの状態は二次元の空間に一群を形成する ... $\mathcal{E}_N = \{|g, N+1\rangle, |e, N\rangle\}$ 、 $\mathcal{E}_{N-1} = \{|g, N\rangle, |e, N-1\rangle\}$...、ある空間の二準位間隔は $\hbar\delta = \hbar(\omega_L - \omega_A)$ となり、二つの隣接する空間の間隔は $\hbar\omega_L$ となる。原子-レーザーの結合 V_{AL} は与えられた空間の二つの状態を結び付ける。例えば、 $N+1$ 個のレーザー光子の存在下の基底状態 g にいる原子は一個のレーザー光子を吸収して励起状態 e にジャンプする。これは V_{AL} が \mathcal{E}_N の二つの状態 $|g, N+1\rangle$ と $|e, N\rangle$ の間にゼロ

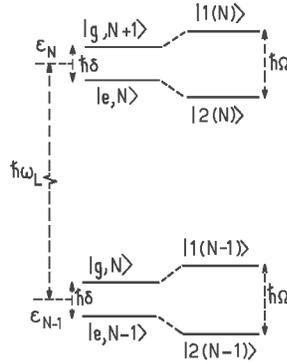


図 7.1: 左側: 組み合わさった”原子-レーザー-光子”系の非結合状態で、これは結合が無い場合、良く分離された二次元の副空間にまとめられる。右側: 原子-レーザーの結合によって生じるドレسد状態。

でない行列要素を持つことを意味する。実際、もし N が $\langle N \rangle$ を中心に ΔN の中で変化すると、

$$\langle e, N | V_{AL} | g, N+ \rangle = \frac{\hbar}{2} \Omega_1(\mathbf{r}) e^{i\phi(\mathbf{r})} \quad (7.5)$$

が示され、ここで $\phi(\mathbf{r})$ と $\Omega_1(\mathbf{r})$ はレーザーモードの擬古典的な状態に対応する位相とラビ周波数である。これらの結合は二つの摂動状態、 $|1(N)\rangle$ と $|2(N)\rangle$ を (\mathcal{E}_N に対して) 生み出す。これは図 7.1 の右辺に示してある。これらのドレسد状態は両方とも非摂動状態 $|e, N\rangle$ と $|g, N+1\rangle$ の線形結合で、 $\hbar\Omega$ だけ分裂している。ここで Ω は

$$\Omega(\mathbf{r}) = \sqrt{\delta^2 + \Omega_1^2(\mathbf{r})} \quad (7.6)$$

と与えられる。

ここで自然放出の効果を考える。放射遷移が図 7.1 のドレسد状態間に起こる。放出光の周波数は許容遷移、すなわち原子の双極子演算子 d_z の非ゼロの行列要素で結ばれる遷移間の周波数に一致する。非結合状態の基底においては、 d_z はレーザーの光子数は変化させず、 $|e, N\rangle$ と $|g, N\rangle$ を結合するだけである。 \mathcal{E}_N の両方のドレسد状態 $|1(N)\rangle$ および $|2(N)\rangle$ は $|e, N\rangle$ が混ざっているおり、また \mathcal{E}_{N-1} の両方のドレسد状態 $|1(N-1)\rangle$ および $|2(N-1)\rangle$ は $|g, N\rangle$ が混ざっているため、 \mathcal{E}_N と \mathcal{E}_{N-1} の間には四つの許容遷移がある。遷移 $|1(N)\rangle \rightarrow |2(N-1)\rangle$ は周波数 $\omega_L + \Omega$ に相当し、遷移 $|2(N)\rangle \rightarrow |1(N-1)\rangle$ は周波数 $\omega_L - \Omega$ に相当し、遷移 $|i(N)\rangle \rightarrow |i(N-1)\rangle$ ($i = 1, 2$) は両方とも周波数 ω_L に相当する。このためドレسد原子の方法は強い共鳴レーザー光線が照射された 2 準位原子から放出される”蛍光三重項”[42] の直接的な解釈を与える。同様に蛍光において観測される様々な光子相関の性質がドレسد原子からの”多段階放射”として放出される一連の蛍光光子を考えることによって簡単に理解できる。このような多段階放射を表すマスター方程式はドレسد状態を基底にし、極限

$$\Omega(\mathbf{r}) \gg \Gamma \quad (7.7)$$

において非常に簡単な形をとる。これは式 (7.6) より等価的に

$$|\delta| \gg \gamma \quad \text{または} \quad \Omega_1 \gg \Gamma \quad (7.8)$$

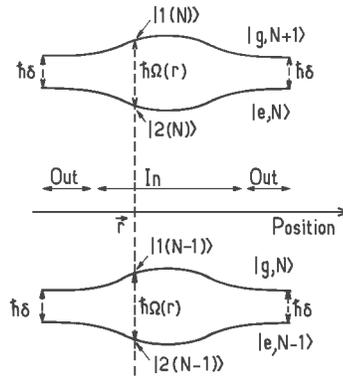


図 7.2: ドレイド原子のエネルギー準位のガウス光線を横切る方向の変化。レーザー光線から外れると、エネルギー準位は図 7.1 の $\hbar|\delta|$ だけ離れた非結合状態と一致する。レーザー光線中ではドレイド状態間の分裂は $\hbar\Omega(r) > \hbar|\delta|$ である。

となる。条件 (7.7) が満たされれば、ドレイド状態の分布間の結合やコヒーレンス (ドレイド原子の密度行列の非対角項) を無視することができる。このような”secular 近似”は分布数間およびコヒーレンス間のみを結合し、ドレイド状態間の自然放出確率によって簡単に解釈できる運動方程式を導く。ドレイド原子の方法は特に (7.7) の極限において良く適用でき、これは蛍光スペクトルにおいて良く分離した線となることを意味し、また等価的に式 (7.8) より離調が大きい、または強度が大きい場合に相当する。

7.3 双極子力のドレイド原子による解釈

ここではドレイド原子の方法をレーザー光線の強度勾配に関係する双極子力の解釈に適用する。

不均一なレーザー光線中においてはレーザー光強度は位置に依存する。このため $\Omega_1^2(\mathbf{r})$ と、この結果、式 (7.6) に対応する $\Omega(\mathbf{r})$ が空間的に変化する。図 7.2 にガウス型レーザー光線の径方向のドレイド状態のエネルギーの変化を表す。レーザー光線以外のところではドレイド準位は裸の状態のそれに一致し、その分裂はまさに $\hbar\delta$ である。レーザー光線中では $|1(N)\rangle$ または $|2(N)\rangle$ のそれぞれのドレイド準位は $|g, N+1\rangle$ と $|e, N\rangle$ の線形結合で、与えられた空間内の二つのドレイド状態間の分裂は $\hbar\Omega(\mathbf{r})$ となり、これは $\hbar|\delta|$ よりも大きい。

それぞれの空間内で図 7.2 のエネルギーダイアグラムはスピン 1/2 の磁気モーメントが不均一静磁場中にある場合のそれと似ている。このため自然放出が無い場合、二値を持つドレイド状態に依存する力を定義することができ、これはドレイド状態のエネルギーの勾配にマイナスをかけたものに等しい。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= -\nabla E_{1(N)}(\mathbf{r}) = -(\hbar/2)\nabla\Omega(\mathbf{r}), \\ \mathbf{f}_2 &= +\nabla E_{1(N)}(\mathbf{r}) = -(\hbar/2)\nabla\Omega(\mathbf{r}) = -\mathbf{f}_1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

通常シュテルン-ゲルラッハ効果と同様にドレイド原子の内部状態に依存した力があるが、ここでは基本的な相互作用は光学的双極子モーメントと不均一なレーザー光電場の間におきる (光学的

シュテルン-ゲルラッハ効果)。

自然放出の影響は時間的にランダムにドレイド状態のタイプ1とタイプ2の間の遷移を引き起こす。これは瞬間的な二値を持つドレイド状態に依存した力の符号をランダムに変える。このような瞬間的な力が二つの正負の値の間で前後するという描像によって双極子力の平均値と揺らぎを簡単に理解することができる。

最初に力の平均を考える。これは

$$F_{dip} = \Pi_1 f_1 + \Pi_2 f_2 \quad (7.10)$$

と書き表され、ここで Π_i はタイプ i ($i = 1, 2$) のドレイド状態に費やす時間に比例する量である。 $\delta > 0$ に対しては (図 7.2 の場合)、非摂動状態 $|g, N+1\rangle$ は $|e, N\rangle$ よりも高い。なぜなら $\omega_L > \omega_A$ であるからである。そしてドレイド状態 $|1(N)\rangle$ は $|2(N)\rangle$ よりも $|e, N\rangle$ 状態が混ざっていないため、自然放出に関してはより安定である。これから $\Pi_1 > \Pi_2$ が得られ、原子はタイプ2よりタイプ1のドレイド状態により多く存在する。結論として、 $\delta > 0$ に対しては力の平均の符号は準位 $|1(N)\rangle$ に対応する符号と同じある。原子は光強度の大きな領域からはじき出される。 $\delta < 0$ に対しては、結果は反対になる。ドレイド状態 $|2(N)\rangle$ はレーザー光線の外で $|g, N+1\rangle$ と結びつき、 $|1(N)\rangle$ よりも多く分布し、その符号は原子が強度が大きな領域に引き寄せられるような平均双極子力となるように決まる。最後に、 $\delta = 0$ に対しては、二つのドレイド状態は同じ量だけ $|e, N\rangle$ が含まれ、等しく分布し ($\Pi_1 = \Pi_2$)、このため力の平均はゼロになる。このようにしてどうして双極子力の平均の離調 $\delta = \omega_L - \omega_A$ に対する変化が分散形になるかが理解できる。上記の議論は定性的なだけでなく定量的なものでもある。もし Π_1 と Π_2 を各ドレイド状態間の自然放出確率を与えるマスター方程式から計算し、それらの値を式 (7.10) に代入すれば、双極子力の平均が (Γ/Ω の最低次の次数で) 厳密に求められる [39]。

ここで瞬間的な力 F が f_1 と $f_2 = -f_1$ の間で交互に変化することによる揺らぎがもたらす運動量拡散係数のおおよその大きさを求めてみる。議論を簡単にするため、 $\delta = 0$ の共鳴の場合を考える [8, 39]。このような場合、両方のドレイド状態は等しく分布し、 $\mathcal{F} = \langle F \rangle = 0$ となる。 $\delta F = F - \langle F \rangle = F$ の相関関数 $C(\tau)$ の τ に対する変化、これは $\langle F(t) \cdot F(t-\tau) \rangle$ に等しいが、これを図 7.3 に示す。 $\tau = 0$ の時、 $C(0) = \langle F^2 \rangle$ は

$$C(0) = \langle f_1^2 \rangle = \langle f_2^2 \rangle = (\hbar^2/4) \nabla \Omega_1^2 \quad (7.11)$$

という値をとる。その後 $C(\tau)$ は $F(t)$ の相関時間 τ_{corr} である特性時間で減衰する。この相関時間は自然放出によってドレイド状態が変化する平均時間と同じオーダーである。このような時間は $2/\Gamma$ のオーダーである。 $C(\tau)$ の 0 から $+\infty$ までの積分は式 (5.36) から運動量拡散係数 D_{dip} の大きさのオーダーを与えるものであるが、これは

$$D_{dip} \sim C(0) \tau_{corr} \sim \frac{\hbar^2}{4} \nabla \Omega_1^2 \frac{2}{\Gamma} \quad (7.12)$$

のオーダーである。このような見積もりは定在波に対する式 (5.60) で与えられる結果と一致する。なぜなら定在波においては $\nabla \Omega_1 \sim k_L \Omega_1$ であるからである。ドレイド原子の描像を基にし、 $\delta = 0$ の共鳴する場合に限定されない $C(\tau)$ と D_{dip} のより定量的な計算が文献 [39] に見出すことができる。

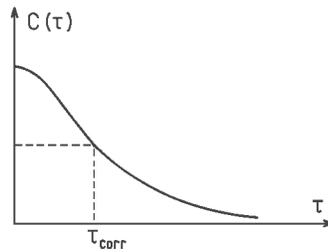


図 7.3: 瞬間的な双極子力の相関関数 $C(\tau)$ の τ に対する変化。

7.4 強いレーザー一定在波中の原子の運動-シシフォス冷却

強い一定在波中の原子の運動は何人かの人によって研究されている [8, 14, 15, 39][43]-[45]。この節ではドレスド原子の方法を基に、この問題の物理的な洞察を与える物理的な描像を示す。

平面一定在波中、 x 軸に沿ってラビ周波数 $\Omega_1(x)$ は x の周期的関数である。

$$\Omega_1(x) = 2\Omega_1 \sin k_L x \quad (7.13)$$

これらの分裂は式 (7.6) と (7.13) によって与えられるため、これから与えられた空間内の二つのドレスド状態は空間的に周期的に振動することが分る。

$$\hbar\Omega(x) = \hbar\sqrt{\delta^2 + 4\Omega_1^2 \sin^2 k_L x} \quad (7.14)$$

図 7.4 は正の離調に対するこれらのドレスド状態を表す (点線)。一定在波の節においては ($z = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$)、 $\Omega_1(x)$ は無くなり、二つのドレスド状態 $|1(N)\rangle$ と $|2(N)\rangle$ はそれぞれ $\hbar\delta$ だけ離れている非摂動状態 $|g, N+1\rangle$ と $|e, N\rangle$ (点線) に一致する。節以外では $\Omega_1(x)$ がゼロでなく、ドレスド状態は $|g, N+1\rangle$ と $|e, N\rangle$ の線形結合となり、腹 ($z = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$)、すなわち $\Omega_1(x)$ が最大になる点においてこれらの分裂は最大になる。7.2 節で見てきたように、準位 $|1(N)\rangle$ または $|2(N)\rangle$ にいる原子は自然放出光を出して準位 $|1(N-1)\rangle$ または $|2(N-1)\rangle$ に緩和する。鍵となる点は以下のことである。一定在波中では波動関数の x 依存性によりこのような自然放出過程の各種の確率は空間的に変化することである。例えばもし δ が正で、原子が準位 $|1(N)\rangle$ にいるとすると、その減衰確率は $|1(N)\rangle = |g, N+1\rangle$ となる節においてゼロになり、 $|1(N)\rangle$ 中の $|e, N\rangle$ の含まれる割合が最大になる腹において最大になる。反対に準位 $|n(N)\rangle$ にある原子に対しては節において減衰確率が最大になり、ここは $|2(N)\rangle$ と $|e, N\rangle$ が一致するところである。

今ここで、先の考え方によって通常のドップラー冷却の場合 (弱い一定在波) とは反対に δ が負の強い一定在波中でなぜ原子が減速されるのかが理解できる。例えば準位 $|1(N+1)\rangle$ (図 7.4 の実線) において一定在波の節からスタートした動いている原子の”軌跡”を追うことができる。この谷底からスタートすると、原子は頂上 (腹) に達するまで丘を上り、頂上では減衰確率が最大になる。この原子は準位 $|1(N)\rangle$ (これは自然放出光による反跳を無視すれば力学的には何も変化しない) か $|2(N)\rangle$ のどちらかに量子ジャンプする。後者の場合、原子は再び谷底にある。また新しい頂上 (腹) である最も不安定な点に達するまで再び上ることとなり、これがまた続く、原子の速度がこのような過程において減速されるのは明らかで、なぜなら原子は平均的に”下り坂”よりも”上り坂”にいる場合の方が多いためである。このような方法はシシフォスの神話を実際にマイクロなスケールで実現した

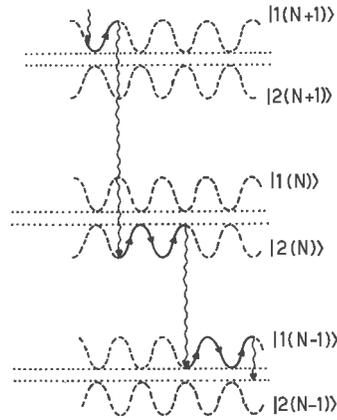


図 7.4: 正の離調 ($\delta > 0$) の光による強い定在波中のレーザー冷却。破線はドレسد原子のエネルギー状態の空間的な変化を表し、これは節では非摂動準位 (点線) と一致する。実線はゆっくり動く原子の“軌跡”を表す。ドレسد状態の波動関数の空間的な変化により、ドレسد状態 1(2) に対しては腹 (節) において自然放出がより多く起こる。二つの自然放出 (垂直方向の波線) の間においては、原子は平均的に丘を下りる部分よりも上る部分により多く遭遇し、このため原子は減速される。

ものと考えることができる。原子が丘を上る場合はいつでも自然放出によって谷底に押し戻され、再び上らなくてはならなくなる。

このような方法は原子におよぼす力の速度依存性に関する定量的な結論を導くのに用いられた [39]。速度が非常に低い場合 ($k_K v_0 \ll \Gamma$)、通常の放射圧によるモラセスに比べてはるかに大きな傾きを持つ速度依存性が得られる (その係数は Ω_1/Γ のオーダー)。その力は速度 $k_L v_0 \sim \Gamma$ の時に最大値に達する。言い換えれば、これは図 7.4 において二回の自然放出の間に原子が波長程度進むような状況である。重要な点はこの摩擦力の大きさがドレسدエネルギー準位の変調の深さ、すなわちラビ周波数 Ω_1 に直接関係しているということである。この結果、この力はレーザー強度の増加におおよそ比例して増加する。最大値を越えると、すなわち $k_L v_0$ が Γ に比べて大きくなると、この力は v_0^{-1} で減少する。最後には非常に大きな速度に対して共鳴が現れ、これはそれぞれの空間の二つのドレسد状態間の非断熱的な Landau-Zener 遷移によるものである [45]。

この解析を終わるにあたって、このシシフォス効果に関連する冷却仮定におけるエネルギー-運動量の平衡を議論することは有益である。二つの自然放出過程の間では原子の全エネルギー (運動+ポテンシャル) は保存される。原子が丘を登るとき、その運動エネルギーは二つの対向する光の間の光子で Ω_1 の確率で再分配を起こす誘導放出過程によってポテンシャルエネルギーに変換される。原子の運動量はこのためレーザー光子へ移行する。全原子のエネルギーは自然放出過程によって散逸され、これは原子のポテンシャルエネルギーの一部を持ち去る。

最後に、正に離調した強いレーザー光の定在波中に現れる大きな速度依存性があるこれらの力は Cs 原子線の横方向の速度広がり Δv を冷却するのに用いられたことを述べておく [47]。もし $k\Delta v \sim \Gamma$ だとすると、冷却効率は非常に高くなり、通常のドップラー冷却に必要とされるもよりはるかに短い相互作用距離でよい。さらにもし定在波に沿った原子の運動エネルギーが図 7.4 のポテンシャルの丘の高さよりも小さいと、原子は定在波の節または腹の辺りに閉じ込めことができ、これは離調 δ の正負に依存する。このような原子の“チャンネルング”は文献 [46] で最初に予言され

たが、これは実験的に Cs 原子において観測された [48]。これは光の波長サイズの領域に中性原子を閉じ込める最初の実験である。

第8章 光ポンピング、光シフトおよび放射圧

8.1 はじめに

このコースの第 II 部は基底状態に複数の副準位を持つ原子に充てる。より正確には J_g と J_e に等しい角運動量を持つ 2 準位 g と e 間を結ぶ原子の遷移を考え、 $J_g \neq 0$ を仮定する。概論 (第 1 章) において示唆したように、このような状況は非常に効率が新しい冷却機構を生み出し、ここでこれを解析してみたい。

長い間知られてきた二つの物理的な効果が新しい冷却機構において重要な役割を演じる。最初の効果は光ポンピングで、これは吸収-自然放出のサイクルによって g の副準位 g_μ から他の副準位 $g_{\mu'}$ へ原子が移行するものである。二番目の効果は基底状態副準位のエネルギーシフトで、これは一般的にある副準位が他の準位と異なるエネルギーになり、これが光強度に比例するものである。このようなシフトは光シフト、または AC-Stark シフトと呼ばれる。今までは、これらの影響は原子の内部自由度におけるダイナミクスとのみ結び付けて考えてきた。極最近、これらの効果が原子の並進運動の自由度におけるダイナミクスに非常に重要な役割を果たしている事が分った。この章では、この先の章で議論される新しい冷却機構を理解するのに必要な光ポンピングのいくつかの性質と光シフトを思い起こす事が有用であると考えた。

8.2 節において原子の密度行列 σ の運動方程式と 2 章において導入した 2 準位原子に対する力の平均の式を多準位原子に一般化することから始める。次に 8.3 節において低い強度および低速度の限界 ($s \ll 1, k_L v_0 \ll \Gamma$) においてこれらの式が非常に簡単にすることができることを示す。この極限はまさに新しい冷却機構が最も効率が高くなる条件である。二つの異なる時間スケール、 e の放射寿命 τ_R と g における光ポンピング時間 τ_P は $\tau_P \gg \tau_R$ であるが、これは全ての速い変数を断熱的に取り除くことを可能にし、基底状態の密度行列のみを含む運動量方程式が得られる。このような運動方程式は二種類の項を含み、一つは g におけるハミルトニアン の時間発展と光シフトを記述する項で、もう一つは光ポンピングによる g 内の緩和を記述する項である。この二種類の項の物理的な意味をそれぞれ 8.4 および 8.5 節において解析する。最後に 8.6 節において $s \ll 1, k_L v_0 \ll \Gamma$ の限界において力の平均の新しい式を議論し、基底状態の副準位の光シフトとこれらの準位からの吸収確率にそれぞれ関係する二種類の項を同定する。

8.2 多準位原子に対する基本方程式

8.2.1 近似

2.5 節において示したように重心の位置演算子 R を複素数 $r=r_0+v_0t$ に置き換える半古典的な記述を用いる。 $P_g(P_e)$ を $g(e)$ の各ゼーマン副準位によって作られる副空間への射影とする。

$$P_g = \sum_{\mu=-J_g}^{+J_g} |J_g\mu\rangle\langle J_g\mu|, \quad (8.1)$$

$$P_e = \sum_{\mu=-J_e}^{+J_e} |J_em\rangle\langle J_em|.$$

原子の密度行列 σ は

$$\sigma = \sigma_{gg} + \sigma_{ge} + \sigma_{eg} + \sigma_{ee} \quad (8.2)$$

と書き表され、ここで

$$\sigma_{ab} = P_a\sigma P_b \quad (8.3)$$

で、 $a, b = e$ または g である。ここで σ_{ab} は演算子で複素数ではないことを記しておく。二つの演算子 σ_{gg} と σ_{ee} は正方行列によって表される。これらの対角成分は g と e の各ゼーマン副準位の分布数を与える。一方、非対角項は e と g の各副準位間にあるゼーマンコヒーレンスを表す。最後に、 σ_{ge} と $\sigma_{eg} = \sigma_{ge}^\dagger$ は e の副準位の一つと g の副準位の一つの間の非対角項からなる長方形行列によって表され、これは”光コヒーレンス”と呼ばれる。

式 (2.10) を一般化する原子-レーザーの相互作用ハミルトニアン V_{AL} の新しい式は

$$V_{AL} = -d^+ \cdot E_L^+(\mathbf{r})e^{-i\omega_L t} - d^- \cdot E_L^-(\mathbf{r})e^{+i\omega_L t} \quad (8.4)$$

と与えられ、ここで

$$d^+ = P_e d P_g, \quad d^- = P_g d P_e \quad (8.5)$$

で、 $E_L^+(\mathbf{r})$ ($E_L^-(\mathbf{r})$) はレーザー電場の正 (負) の周波数成分である。

$$E_L(\mathbf{r}, t) = E_L^+(\mathbf{r})e^{-i\omega_L t} + E_L^-(\mathbf{r})e^{+i\omega_L t} \quad (8.6)$$

式 (2.10) と同様に、回転波近似を用いた。

次に続く議論において便利なように原子の内部自由度の演算子 $G^\pm(\mathbf{r})$ を導入する。これは

$$\hbar G^\pm(\mathbf{r}) = d^\pm \cdot E_L^\pm(\mathbf{r}) \quad (8.7)$$

と定義される。また無次元の双極子演算子 \hat{d}^\pm を次のように定義する。

$$\epsilon_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x \pm i\epsilon_y), \quad \epsilon_0 = \epsilon_z \quad (8.8)$$

を偏光ベクトルの球座標を基底にしたものとし、これはそれぞれ σ^\pm と π 偏光に対応する。Wigner-Eckart 理論 (文献 [49]、XIII 章) をベクトル演算子 d^+ に適用することにより

$$\langle J_em | \epsilon_q \cdot d^+ | J_g\mu \rangle = \mathcal{D} \langle J_em | J_g 1 \mu q \rangle \quad (8.9)$$

が与えられ、ここで $\langle J_e m | J_g 1 \mu q \rangle$ は Clebsch-Gordan 係数である。また \mathcal{D} は換算行列要素で、これは e と g の相対位相を適当に選ぶ事によりいつでも実数にすることができる。またこれは磁気量子数 m 、 μ と q には依存しない。行列要素 $\epsilon_q \cdot \hat{d}^+$ がちょうど Clebsch-Gordan 係数になるように

$$\mathbf{d}^+ = \mathcal{D} \hat{\mathbf{d}}^+ = (\mathbf{d}^-)^\dagger \quad (8.10)$$

とおくこととする。また r における偏光ベクトル $\epsilon(r)$ を導入し、

$$E_L(r) = \frac{1}{2} \epsilon(r) \mathcal{E}_L(r) \quad (8.11)$$

ここで振幅 $\mathcal{E}_L(r)$ を実数とする。偏光ベクトル (一般的に複素数) $\epsilon(r)$ は規格化される。

$$\epsilon^*(r) \cdot \epsilon(r) = 1 \quad (8.12)$$

\mathcal{D} と $\mathcal{E}_L(r)$ より、最終的に r におけるラビ周波数

$$\hbar \Omega_1(r) = -\mathcal{D} \mathcal{E}_L(r), \quad (8.13)$$

が定義でき、これは振幅 $\mathcal{E}_L(r)$ のレーザー光によって励起された時の Clebsch-Gordan 係数が 1 の遷移のラビ周波数に相当する。

8.2.2 光ブロッホ方程式の演算子形式

式 (2.42) を一般化する基本運動方程式はここで演算子の形式で

$$\dot{\sigma}_{ab} = -\frac{i}{\hbar} P_a [H_A^{int} + V_{AL}, \sigma] P_b + \left(\frac{d}{dt} \sigma_{ab} \right)_{sp} \quad (8.14)$$

と書き表される。ここで V_{AL} は式 (8.4) において与えられており、また

$$H_A^{int} = \hbar \omega_A P_e \quad (8.15)$$

である。

式 (8.14) の最終項は自然放出による減衰を表す。励起状態の密度行列 σ_{ee} および光コヒーレンス σ_{eg} と σ_{ge} に対しては式 (2.43.a)、(2.43.c) と (2.43.d) と同じ形式である。自然放出による σ_{ee} から σ_{gg} への供給を表す式 (2.43.b) のみ、変更する必要がある。縮退した基底状態を持つ原子に対しては式 (2.43.b) は

$$\left(\frac{d}{dt} \sigma_{gg} \right)_{sp} = \Gamma \sum_{q=-1,0,+1} (\epsilon_q^* \cdot \hat{\mathbf{d}}^-) \sigma(\epsilon_q \cdot \hat{\mathbf{d}}^+) \quad (8.16)$$

と置き換える必要があることが示される (文献 [5]、4.3.4 節を見よ)。ここで無次元演算子 $\hat{\mathbf{d}}^\pm$ と基本偏光ベクトル ϵ_q は先に式 (8.10) および (8.8) において定義されている。自然放出による移行は次の選択則を満たす事を記しておく。

$$\begin{aligned} \langle J_e m | \sigma | J_e m' \rangle &\rightarrow \langle J_g \mu | \sigma | J_g \mu' \rangle \\ \text{ただし } \mu - \mu' &= m - m' \end{aligned} \quad (8.17)$$

これは原子-真空場の相互作用ハミルトニアン V_{AV} の回転不変性の結果からくるものである。式 (8.16) より、式 (8.17) による移行確率はちょうど Γ と m と μ および m' と μ' を結ぶ二つの Clebsch-Gordan 係数の積である。

式 (8.14) の交換子を計算し、式 (8.15)、(8.4)、(2.43.a、c、d) を用いて、最終的に

$$\dot{\sigma}_{ee} = \Gamma \sigma_{ee} + i[G^+(\mathbf{r})\tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg}G^-(\mathbf{r})], \quad (8.18a)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{eg} = -\left(\frac{\Gamma}{2} - i\delta\right)\tilde{\sigma}_{eg} + i[G^+(\mathbf{r})\sigma_{gg} - \sigma_{ee}G^+(\mathbf{r})] \quad (8.18b)$$

$$\dot{\sigma}_{gg} = \left(\frac{d}{dt}\sigma_{gg}\right)_{sp} + i[G^-(\mathbf{r})\tilde{\sigma}_{eg} - \tilde{\sigma}_{ge}G^+(\mathbf{r})] \quad (8.18c)$$

が得られる。ここで σ_{eg} の代わりに

$$\tilde{\sigma}_{eg} = \sigma_{eg}e^{i\omega_L t} \quad (8.19)$$

を用いて、式の係数の明らかな時間依存性を取り除いた。もし原子が動いていると、 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0t$ を通して明らかな時間依存性がある事を記しておく。

8.2.3 力の平均の表式

式 (2.30) と (8.4) より、力の平均は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) &= -\langle \nabla V_{AL}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= + \sum_{i=x,y,z} \langle d_i^+ \rangle \nabla E_{Li}^+(\mathbf{r}) e^{-\omega_L t} + h.c. \end{aligned} \quad (8.20)$$

と書き表せる。式 (8.5) と (8.19) を用いて、式 (8.20) に現れる d_i^+ の平均値は

$$\langle d_i^+ \rangle = \text{Tr}\{P_e d_i P_g \sigma\} = \text{Tr}\{d_i \sigma_{ge}\} = \text{Tr}\{d_i \tilde{\sigma}_{ge}\} e^{i\omega_L t} \quad (8.21)$$

と再表現することができ、これを式 (8.20) に代入すると、

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=x,y,z} \text{Tr}\{d_i \tilde{\sigma}_{ge}\} \nabla E_{Li}^+(\mathbf{r}) + c.c. \quad (8.22)$$

となる。式 (8.22) は放射力の平均は光コヒーレンス $\tilde{\sigma}_{eg}$ と $\tilde{\sigma}_{ge}$ にのみ依存していることを明確に示している。

8.3 飽和より十分低い光強度および低速度限界

8.3.1 新しい近似

半古典論および回転波近似という点を除けば、式 (8.18) は厳密なものである。ここで飽和が小さい極限 ($s \ll 1$) を考える。これは新しい冷却機構に適切な極限である。このような極限において、基底状態の時間発展の特性時間は励起状態のそれよりもはるかに長くなる。これより σ_{gg} は $\tilde{\sigma}_{eg}$ や

σ_{ee} と比べると遅い変数となる。 $\tau_R = \Gamma^{-1}$ 程度続く短い過渡的な時間の後、 σ_{gg} はそのゆっくりとした変化率を $\tilde{\sigma}_{eg}$ 、 $\tilde{\sigma}_{ge}$ と σ_{ee} に課することによって他の変数の変化を”支配する”。このため

$$|\dot{\sigma}_{ee}| \ll \Gamma \sigma_{ee}, \quad |\dot{\tilde{\sigma}}_{eg}| \ll \Gamma |\tilde{\sigma}_{eg}| \quad (8.23)$$

と書き表せる。これより不等式 (8.23) を用いて式 (8.18a) と (8.18b) の左辺を右辺に現れる減衰項 $-\Gamma \sigma_{ee}$ と $-(\Gamma/2)\tilde{\sigma}_{eg}$ に比べて無視する事が可能になる。これは σ_{ee} と $\tilde{\sigma}_{eg}$ に対して σ_{gg} を用いてこれを記述しなおすことを可能にする代数方程式を与える。このような処理は”速い変数の断熱的消去”と呼ばれ、これらの速い変数に対して任意の時間においてゆっくり変化する変数によってとられる値にこれらを調整する仕方を記述する式を導く。

このような議論は静止している原子に対してのみ有効で、 σ の変化率は吸収および放出過程にのみよるものである。動いている原子に対しては、式 (8.18) の左辺に現れる時間微分 $\dot{\sigma}_{ab}$ が実際には時間に対する全微分 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ になることを忘れてはいけない。このため $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \sigma_{ab} \simeq k_L v_0 \sigma_{ab}$ の項の大きさのオーダーを考慮する必要がある。実際、新しい冷却機構において典型的な定常状態の二乗平均速度は非常に低い値に達する。

$$\eta = \frac{k_L v_0}{\Gamma} \ll 1 \quad (8.24)$$

このためこのコースの残りの部分においては η に対してはゼロ次までの計算に限定することとする。このような近似、これは式 (8.18) において $\dot{\sigma}_{ee}$ と $\dot{\tilde{\sigma}}_{eg}$ を省略可能にするものであるが、これは動いている原子に対しても η の一次の項として現れるドップラー冷却効果を考慮する可能性を排除するものである。しかしここではドップラー冷却よりもはるかに効率が高い新しい冷却機構に興味があり、こうすることによりこの新しい冷却機構に対して得られる方程式ははるかに簡単になる。最後に、式 (8.18c) において $\partial \sigma_{gg} / \partial t$ と $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \sigma_{gg}$ は無視しない。これは σ_{gg} がゆっくりと変化する変数でドップラーシフト $k_L v_0$ が σ_{gg} の時間発展の特性周波数に比べてもはや無視できないからである。

8.3.2 励起状態の断熱消去

最初に光コヒーレンスを取り除く。式 (8.18b) において $\dot{\tilde{\sigma}}_{eg}$ を無視すると、

$$\tilde{\sigma}_{eg} = -\frac{1}{\delta + i(\Gamma/2)} G^+(\mathbf{r}) \sigma_{gg} \quad (8.25a)$$

$$\tilde{\sigma}_{ge} = -\frac{1}{\delta - i(\Gamma/2)} \sigma_{gg} G^+(\mathbf{r}) \quad (8.25b)$$

が導かれる。実際、既に σ_{ee} の式 (8.25) への寄与を無視してきた。この理由は、 σ_{ee} がラビ周波数 Ω_1 の最低でも二次のオーダーであることによる (式 (8.28) を見よ)。式 (8.18a) において σ_{ee} に Ω_1 の一次のオーダーの G^+ がかけてあるので、 σ_{ee} の式 (8.25) への寄与は最低でも三次のオーダーになる。ここで Ω_1 の二次まで、より正確には式 (3.6) で与えられる飽和パラメータ s の一次までの計算に限定することにする。これは σ_{ee} が式 (8.25) に現れない理由である。

σ_{gg} によって $\tilde{\sigma}_{eg}$ と $\tilde{\sigma}_{ge}$ を記述しなおすことにより、ここで力の平均 \mathcal{F} の新しい式が得られる。

式 (8.25) を (8.22) に代入することにより

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{r}) &= \frac{-1}{\delta - i(\Gamma/2)} \sum_{i=x,y,z} \text{Tr}\{G^-(\mathbf{r})d_i^+ \sigma_{gg}\} \nabla E_{Li}^+(\mathbf{r}) + c.c. \\ &= \frac{-\hbar}{\delta - i(\Gamma/2)} \langle G^-(\mathbf{r}) (\nabla G^+(\mathbf{r})) \rangle + c.c.\end{aligned}\quad (8.26)$$

が得られる。ここで式 (8.7) とより簡単な表式

$$\langle X \rangle = \text{Tr}\{X \sigma_{gg}\} \quad (8.27)$$

を用いた。

こんどは $\dot{\sigma}_{ee}$ を与える式 (8.18a) を考える。 $\tilde{\sigma}_{eg}$ と $\tilde{\sigma}_{ge}$ を排除するため、 $\dot{\sigma}_{ee}$ を無視し、式 (8.25) を用いることにより、

$$\begin{aligned}\sigma_{ee} &= -\frac{i}{\Gamma} \frac{1}{\delta - i(\Gamma/2)} G^+(\mathbf{r}) \sigma_{gg} G^-(\mathbf{r}) + h.c. \\ &= \frac{1}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} G^+(\mathbf{r}) \sigma_{gg} G^-(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\Omega_1^2/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{d}}^+ \right) \sigma_{gg} \left(\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{d}}^- \right)\end{aligned}\quad (8.28)$$

が得られる。

8.3.3 基底状態の密度行列の運動方程式

σ_{gg} の時間発展を記述する最後の方程式 (8.18c) を変換することが残されている。式 (8.16)、(8.25)、そして (8.28) を用いて、

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{gg} &= \frac{-i}{\delta + i(\Gamma/2)} G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}) \sigma_{gg} + \frac{i}{\delta - i(\Gamma/2)} \sigma_{gg} G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{\Gamma}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \sum_{q=-1,0,+1} \boldsymbol{\epsilon}_q^* \cdot \hat{\mathbf{d}}^- G^+(\mathbf{r}) \sigma_{gg} G^-(\mathbf{r}) \boldsymbol{\epsilon}_q \cdot \hat{\mathbf{d}}^+\end{aligned}\quad (8.29)$$

が得られる。これは σ_{gg} に対する閉じた運動方程式である。なぜならこれは $\dot{\sigma}_{ee}$ を σ_{gg} にのみ関連づけるからである。式 (8.29) の最初の行はレーザーによる励起の効果を表し、一方第二行は自然放出を表す。ここで $1/(\delta \pm i\Gamma/2)$ の実部と虚部を分離する。式 (8.29) の最初の行は $(\dot{\sigma}_{gg})_{las}$ と今後表記されるが、これはこの分離によって二つの項の和に変換することができる。最初の項は交換子を含み、二番目の項は反交換子を含む。

$$\begin{aligned}(\dot{\sigma}_{gg})_{las} &= -i \frac{\delta}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} [G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}), \sigma_{gg}] \\ &\quad - \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \{G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}), \sigma_{gg}\}_+\end{aligned}\quad (8.30)$$

式 (8.30) において $\{X, Y\}_+$ は $XY + YX$ を意味する。 $G^- = (G^+)^\dagger$ より演算子 $G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r})$ はエルミート演算子で正またはゼロである。

$$(G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}))^\dagger = G^-(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}) \quad (8.31)$$

従って、その固有値は実数で非負である。式 (8.30) や (8.29) のような構造を持つ式は光ポンピングサイクルの量子理論を扱った文献 [50] と [51] において最初に導き出された。この場合と同様に励起光は単色光ではなく、広帯域なインコヒーレント光であったため、式 (8.29) と (8.30) は入射光のスペクトル分布 $I(\omega_L)$ に渡って平均化する必要があった。

式 (8.29) と (8.30) はさらに式 (8.7)、(8.10)、(8.11) と (8.13) を用いて変換可能である。 G^-G^+ にエルミートで正またはゼロの無次元の演算子

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \left(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \hat{\mathbf{d}}^- \right) \left(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{d}}^+ \right) = \Lambda^\dagger(\mathbf{r}) \quad (8.32)$$

と式 (6.15) で定義されたものと似たパラメータ Γ' と δ' を導入する。

$$\Gamma'(\mathbf{r}) = \Gamma \frac{\Omega_1^2(\mathbf{r})/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \Gamma \frac{s(\mathbf{r})}{2} \quad (8.33a)$$

$$\delta'(\mathbf{r}) = \delta \frac{\Omega_1^2(\mathbf{r})/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} = \delta \frac{s(\mathbf{r})}{2} \quad (8.33b)$$

ここで飽和パラメータ $s(\mathbf{r})$ は

$$s(\mathbf{r}) = \frac{\Omega_1^2(\mathbf{r})/4}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (8.34)$$

と与えられる。こうすることによって σ_{gg} に対して以下の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{gg} = & -i\delta'(\mathbf{r})[\Lambda(\mathbf{r}), \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma'(\mathbf{r})}{2} \{ \Lambda(\mathbf{r}), \sigma_{gg} \} + \\ & + \Gamma'(\mathbf{r}) \sum_{q=-1,0,+1} \left(\boldsymbol{\epsilon}_q^* \cdot \hat{\mathbf{d}}^- \right) \left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{d}}^+ \right) \sigma_{gg} \left(\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{d}}^- \right) \left(\boldsymbol{\epsilon}_q \cdot \hat{\mathbf{d}}^+ \right). \end{aligned} \quad (8.35)$$

8.4 基底状態磁気副準位の光シフト

8.4.1 運動方程式のハミルトニアンの部分

式 (8.30) と (8.35) の交換子を含む項は $[H_{eff}(\mathbf{r}), \sigma_{gg}]/i\hbar$ と書き表され、ここで

$$H_{eff} = \frac{\hbar\delta}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} G^-(\mathbf{r})G^+(\mathbf{r}) = \hbar\delta'(\mathbf{r})\Lambda(\mathbf{r}) \quad (8.36)$$

である。対応する変化率は有効ハミルトニアン $H_{eff}(\mathbf{r})$ から導出されるものと同じである。

$|g_\alpha(\mathbf{r})\rangle$ を $\Lambda(\mathbf{r})$ の固有状態、 $\lambda_\alpha(\mathbf{r})$ を対応する固有値と呼ぶことにする。 $\lambda_\alpha(\mathbf{r})$ は実数で非負で、これは $\Lambda(\mathbf{r})$ がエルミートで正またはゼロである。

$$\Lambda(\mathbf{r})|g_\alpha(\mathbf{r})\rangle = \lambda_\alpha(\mathbf{r})|g_\alpha(\mathbf{r})\rangle \quad (8.37)$$

ただし $\lambda_\alpha(\mathbf{r})$ は実数 および ≤ 0 .

もし σ_{gg} の運動方程式が式 (8.36) に関する項のみだとすると、(もし λ_α が全て異なると) g のゼーマン準位の縮退が解け、状態 $|g_\alpha(\mathbf{r})\rangle$ は明らかなエネルギーシフト δE_α を得ることになり、これは光シフトと呼ばれ、

$$\delta E_\alpha = \hbar\delta'\lambda_\alpha \quad (8.38)$$

に等しい。

8.4.2 光シフトの性質

光シフト δE_α は δ' と同様に Ω_1^2 に、すなわちレーザー強度 I_L に比例する。 λ_α が正であるので (式 (8.37) を見よ)、全ての δE_α は同じ符号で、これは式 (8.33b) より δ の符号と同じである。

光シフト δE_α の離調 δ に対する変化はローレンツ型分散曲線で、これは反動的効果に相当する。6.2 節の解析、特に図 6.1 のダイアグラム b を思い起こすと、光シフトは入射光の仮想的な吸収および再放出に関係しているとみなすことができる ($|g, p; k_L; \epsilon_L\rangle$ の $|e, p + \hbar k_L; 0\rangle$ の混合による)。光シフトは吸収過程に対してラムシフト (これは仮想光子の自然放出と再吸収に関係する) と等価とみなすことができる。光シフトのもう一つの等価な物理像は入射レーザー光中の原子の誘起双極子モーメントの分極エネルギーとみなすものである。これはしばしば用いられる”ac-Stark 効果”という用語を説明するものである。

光シフトの最初の発見 [52, 53, 51] は原子物理にレーザーが用いられたことより先行する。これは放電ランプからの通常光によって誘起された (このため Alfred Kastler によってこれは”ラムシフト”と呼ばれたが、この語呂合わせによってその由来とラムシフトとの類似性を示している)。光シフトが光線の偏光に依存し、基底状態の各副準位によって変化するという事実がその発見において重要であった。原子の基底状態の緩和時間の長さにより、原子の基底状態の磁気共鳴曲線は非常に狭く、たとえば基底状態の二つの副準位の光シフトがほんの数 Hz しか異なっていなくてもこのような効果が磁気共鳴曲線のシフトとして簡単に検出可能である [52]。

この項を終わるにあたって、有効ハミルトニアン (8.36) のいくつかの対称性についてここで述べておく。 Λ の式 (8.32) に現れる二つの演算子 \hat{a}^\pm はベクトル演算子である。これより H_{eff} の k 次の規約なテンソル演算子 $T_q^{(k)}$ による展開は $k = 0, 1, 2$ の項しか含まれない事になる。 H_{eff} の対応する項は各基底状態の全体的なシフト ($k = 0$)、そして仮想的な静磁場 ($k = 1$) および静電場 ($k = 2$) によってもたらされる縮退の解除に対応し、この仮想的な場の方向は偏光ベクトル $\epsilon(r)$ によって決定される。興味ある読者は文献 [54] および [55] により詳しい記述がある。

8.5 光ポンピングに付随する緩和

8.5.1 離散率

式 (8.35) の第二項はどのように原子の基底状態が吸収過程によって空になるかを記述している。この項の Λ の固有状態 $|g_\alpha\rangle$ における σ の対角項の変化率への寄与は

$$(\langle g_\alpha | \dot{\sigma} | g_\alpha \rangle)_{abs} = -\Gamma'_\alpha \langle g_\alpha | \sigma | g_\alpha \rangle \quad (8.39)$$

と書き表される。ここで

$$\Gamma'_\alpha = \Gamma' \lambda_\alpha \quad (8.40)$$

は状態 $|g_\alpha\rangle$ から離れる確率と解釈することができる。 Γ'_α は λ_α と同様に非負で (式 (8.37) を見よ)、レーザー強度 $I_L \sim \Omega_1^2$ に比例し (Γ' と同様に)、そして離調 δ に対してはローレンツ吸収曲線として変化する (散逸効果)。

λ_α が全て同じではないという事は副準位によって離れる確率が変化する事を意味する。もしある λ_α がゼロになると、対応する副準位 $|g_\alpha\rangle$ の原子に対しては光の吸収によりこの準位から離れる可能性が無くなる。このためこの副準位 $|g_\alpha\rangle$ はトラップ状態となる。

8.5.2 自然放出による基底状態への供給

光子の吸収による基底状態を離れた原子は自然放出によって再び基底状態に落ちる。このような効果は式 (8.35) の最終項に記述されており、これは二番目に Γ (散逸効果) に比例するものである。

式 (8.35) の第二項のトレースが三番目のそれとは反対である事がすぐに確認できる*。これは原子が g に戻ると同じだけの原子が単位時間あたりに g から離れることを意味する。

このような連続的な吸収-自然放出サイクルの結果、各ゼーマン副準位間の分布数差を増大することができる。これが光ポンピングの良く知られた原理である [6]。このような過程は偏光した入射光子から原子への角運動量移乗として実際にとらえることができる。例えば、入射光が z 軸方向に進み、右回り円偏光 σ_+ だとすると、これは z 方向に沿って角運動量 $+\hbar$ を持つ光子であることに相当するが、この場合には光ポンピングによって z 軸方向の磁気量子数が最大の値のゼーマン副準位に集められることが簡単に示される。第9章においてこのような状況の一例を示す。

光ポンピングは式 (8.38) の最後の二つの光によって記述されるように緩和過程として現れるが、これは原子の内部状態を新しい平衡状態へと導き、これは通常、熱平衡状態から非常に異なる状態となる。光ポンピングの特性時間定数は

$$\tau_P = \frac{1}{\Gamma'} \quad (8.41)$$

のオーダーである。ポンピング時間 τ_P はレーザー強度 I_L に反比例し、 $I_L \rightarrow 0$ の場合、非常に長くなりうる。

8.5.3 ゼーマンコヒーレンスの効果

原子が異なる対称性を持つ二つの摂動を受ける事がある。例えば、 x 軸に沿って進む σ^+ 偏光の光線は基底状態において x 軸方向の磁化をつくろうとする。もし z 軸方向に静磁場 B を加えると、この磁化は B に比例した Larmor 周波数で歳差運動を始める。もし基底状態の特性減衰時間 τ_g (励起時間 τ_P 、またはより一般的には衝突や有限の相互作用時間等の効果を含む緩和時間) の間、回転角 $\Omega_B \tau_g$ が 1 と比べてそう小さくないとすると、このような歳差運動は励起光によってもたらされた x 軸方向の異方性を消し去ることになる。これから B をゼロ付近で掃引すると、基底状態における励起光による異方性は共鳴的な変化を受ける。これは原子による光の吸収または放出の変化から検出可能である。これが良く知られた Hanle 効果で、これは最初に原子の励起状態において観測された [56]。原子の基底状態の Hanle 共鳴の興味ある点は、これが非常に狭いことで、これは τ_g が非常に長くなりうるからである。このためこの共鳴は 10^{-9} ガウス以下の非常に小さな磁場を検出するのに用いることができる [57, 58]。Hanle 共鳴は B を掃引したときの光の吸収率の共鳴的な変化にあたるため、原子の軌跡への運動量移行も共鳴的に変化する。Hanle 共鳴は最近、原子ビーム偏向を観測することにより、このようにして検出された [59]。

式 (8.35) において Hanle 共鳴がゼーマンコヒーレンス (J_z の固有状態を基底にした σ の非対角項) の共鳴変化として現れる。光ポンピングが分布数のみでは記述できないということの一例がこれによって示される (例えば文献 [51] を見よ)。

*式 (8.35) の第一項のトレースは交換子でこれはゼロになる。これは光シフト (これは反動的な効果) は基底状態の全分布するを変化させることができないことを意味する。

8.5.4 動く原子の場合

今までの全ての議論は暗黙のうちに原子が静止していると仮定しており、このため原子は一定の強度と一定の偏光を持つ励起光を”感じる”。もし原子が動いていると、またレーザー光が局所的な偏光が空間的に変化するとすると、動いている原子から見た系では時間的に変化する偏光を”感じる”ことになる。動いている原子は τ_P のオーダーの特性時間を持つこれらの光ポンピングの変化に反応するため、動いている原子の r における内部状態は同じ点に静止しつづけている原子の定常状態より遅れることになる。後に新しいレーザー冷却機構おけるこのような時間の遅れの役割を議論することにする。

8.6 力の平均の一般的な性質

ここで力の平均の近似的な式 (8.26) に立ち戻ることにする。これは光コヒーレンスを断熱的に消去することにより一般的な式 (8.22) より得られる。この最後の項において式 (8.26) の物理的な内容について議論する。そして飽和が十分小さく、また低い速度の極限における、力の平均と光シフトと吸収確率の間に存在する関係を指摘する。これらは 8.4 および 8.5 節で議論する。他の同様の扱いは文献 [60] と [61] に見い出される。

8.6.1 反動的成分と散逸的成分

式 (8.26) の $1/(\delta - i\Gamma/2)$ を実部と虚部に分ける。力の平均の内、これらの実数部および虚数部に比例する成分をそれぞれ反動的および散逸的部分と呼ぶこととする。

$$\mathcal{F}_{react}(\mathbf{r}) = -\hbar \frac{\delta}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} [\langle G^-(\mathbf{r})(\nabla G^+(\mathbf{r})) \rangle + \langle (\nabla G^-(\mathbf{r}))G^+(\mathbf{r}) \rangle], \quad (8.42a)$$

$$\mathcal{F}_{dissip}(\mathbf{r}) = i\hbar \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} [\langle (\nabla G^-(\mathbf{r}))G^+(\mathbf{r}) \rangle - \langle G^-(\mathbf{r})(\nabla G^+(\mathbf{r})) \rangle]. \quad (8.42b)$$

反動的および散逸的という名称は $1/(\delta - i\Gamma/2)$ の実部および虚部の δ 依存性に由来する。しかし \mathcal{F}_{react} と \mathcal{F}_{dissip} の δ 依存性は式 (8.42a) と (8.42b) の括弧内の項の前にかけている二つの項によっては完全には決まらない。括弧内の平均値は基底状態の密度行列 σ_{gg} に依存し、これは式 (8.29) を解くことにより求められる。このような解はそれ自身 δ および Γ の関数で、このため \mathcal{F}_{react} と \mathcal{F}_{dissip} の最終的な表式は δ および Γ のより複雑な依存性を持つことになる。また、もし $|\delta| \gg \Gamma$ の場合、 \mathcal{F}_{react} は \mathcal{F}_{dissip} よりはるかに大きいという結論を出してはいけない。なぜなら式 (8.42b) の括弧内の項は式 (8.42a) の括弧内のそれよりもはるかに大きくなりうるからである。

レーザー電場 E_L を平面波で展開することにより、 \mathcal{F}_{react} と \mathcal{F}_{dissip} に対する有用な等価的な表式が与えられる。正の周波数成分 E_L^+ に対して、展開式

$$E_L^+(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} E_{\mu}^+(\mathbf{r}) \quad (8.43)$$

を用いるとする。ここで E_L^+ の r 依存は

$$E_{\mu}^+(\mathbf{r}) \sim e^{ik_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \quad (8.44)$$

と与えられる。この時、

$$\nabla G^\pm = \pm i \sum_{\mu} \mathbf{k}_{\mu} G_{\mu}^{\pm} \quad (8.45)$$

と書き表せ、ここで式 (8.7) と (8.43) より、

$$\hbar G_{\mu}^{\pm} = \mathbf{d}^{\pm} \cdot \mathbf{E}_{\mu}^{\pm}(\mathbf{r}) \quad (8.46)$$

である。式 (8.45) を (8.42) に代入すると、最終的に

$$\mathcal{F}_{react} = -i \frac{\delta}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \hbar \mathbf{k}_{\mu} [\langle G_{\nu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle - \langle G_{\mu}^{-} G_{\nu}^{+} \rangle], \quad (8.47a)$$

$$\mathcal{F}_{dissip} = + \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \hbar \mathbf{k}_{\mu} [\langle G_{\nu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle + \langle G_{\mu}^{-} G_{\nu}^{+} \rangle] \quad (8.47b)$$

が与えられる。

8.6.2 反動的成分の解釈

\mathcal{F}_{react} の式 (8.42a) と基底状態の副準位の光シフトを記述する有効ハミルトニアン H_{eff} の式 (8.36) を比べることにより、 \mathcal{F}_{react} は

$$\mathcal{F}_{react} = -\langle \nabla H_{eff} \rangle \quad (8.48)$$

と書き表され、これは力の平均の反動的成分と光シフトとの間にある密接な関係を明らかに示している。

固有値 E_{α} と固有状態 $|g_{\alpha}\rangle$ を用いた H_{eff} の等価的な式は

$$H_{eff} = \sum_{\alpha} E_{\alpha}(\mathbf{r}) |g_{\alpha}(\mathbf{r})\rangle \langle g_{\alpha}(\mathbf{r})| \quad (8.49)$$

である。式 (8.49) の勾配から (そして表記を簡単にするために r を省略すると)、

$$\begin{aligned} \nabla H_{eff} &= \sum_{\alpha} (\nabla E_{\alpha}) |g_{\alpha}\rangle \langle g_{\alpha}| \\ &+ \sum_{\alpha} E_{\alpha} [(\nabla |g_{\alpha}\rangle) \langle g_{\alpha}| + |g_{\alpha}\rangle (\nabla \langle g_{\alpha}|)], \end{aligned} \quad (8.50)$$

が得られ、これは式 (8.48) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{react} &= - \sum_{\alpha} (\nabla E_{\alpha}) \Pi_{\alpha} \\ &- \sum_{\alpha} E_{\alpha} [(\langle g_{\alpha} | \sigma(\nabla |g_{\alpha}\rangle) + (\nabla \langle g_{\alpha}|) \sigma |g_{\alpha}\rangle)], \end{aligned} \quad (8.51)$$

が導かれる。ここで

$$\Pi_{\alpha} = \langle g_{\alpha} | \sigma |g_{\alpha}\rangle \quad (8.52)$$

は基底状態の副準位 $|g_\alpha\rangle$ の分布数である。

式 (8.51) の最初の項には 7.3 節で与えられた 2 準位原子に対する双極子力の平均のドレイド原子による解釈と似た素直な解釈がある (式 (7.10) を見よ)。この項はまさに Π_α の占有確率で重み付けされ、光シフトした基底状態の副準位の空間的な勾配に関する力 $-\nabla E_\alpha$ の平均値である。

(8.51) の第二行を解釈するため、原子が r から $r+dr$ へ変位すると仮定し、反動力に対してなされた仕事を計算すると、

$$-\mathcal{F}_{react} \cdot dr = \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \cdot dE_{\alpha} + \sum_{\alpha} E_{\alpha} [\langle g_{\alpha} | \sigma | dg_{\alpha} \rangle + \langle dg_{\alpha} | \sigma | g_{\alpha} \rangle], \quad (8.53)$$

となり、ここで

$$dE_{\alpha} = dr \cdot \nabla E_{\alpha} \quad (8.54a)$$

$$|dg_{\alpha} = dr \cdot \nabla |g_{\alpha}\rangle, \quad (8.54b)$$

と与えられる dE_{α} と $|dg_{\alpha}\rangle$ は r から $r+dr$ の間の E_{α} と $|g_{\alpha}\rangle$ の変位を表す。式 (8.53) の第二行は、これは式 (8.51) の第二行に由来するものだが、これは副準位 $|g_{\alpha}\rangle$ の波動関数の空間的変位に関する。これは dr の一次のオーダーで、

$$\sum_{\alpha} E_{\alpha} d\Pi_{\alpha}^{nonad} \quad (8.55)$$

と書き表せ、ここで

$$d\Pi_{\alpha}^{nonad} = \langle g_{\alpha}(r+dr) | \sigma | g_{\alpha}(r+dr) \rangle - \langle g_{\alpha}(r) | \sigma | g_{\alpha}(r) \rangle \quad (8.56)$$

は波動関数の空間的变化による状態 $|g_{\alpha}\rangle$ の分布数の非断熱的な変位である。よって式 (8.51) の第二行は原子の運動によって誘起される基底状態の副準位間の非断熱的な遷移の寄与を表している。これは光シフトした基底状態の副準位の波動関数の空間的変位によるものである。

最後に、レーザー場の平面波展開から帰着される式 (8.47a) の物理的な内容について議論する。レーザー光線によってもたらされる力は、このレーザー光を形成している多くの平面波 μ から運動量 $\hbar k_{\mu}$ を持つ光子 k_{μ} が消失する事に由来するものであるため、式 (8.47a) における $\hbar k_{\mu}$ の係数は平面波 μ における単位時間あたりの平均吸収光子数と解釈することができる。係数が ν に依存するという事は平面波 μ の場 E_{μ} が光 μ に誘起された原子の双極子と相互作用する事を意味する。これから

$$\frac{dN_{\mu\nu}^{react}}{dt} = -i \frac{\delta}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} [\langle G_{\nu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle - \langle G_{\mu}^{-} G_{\nu}^{+} \rangle] \quad (8.57)$$

は光 ν によって誘起された双極子モーメントの反動的成分と相互作用する光 μ から吸収される単位時間あたりの平均光子数と解釈することができる。ここでは式 (8.57) の δ 依存性より、双極子モーメントの反動的成分をとる。式 (8.57) より、

$$\frac{dN_{\mu\mu}^{react}}{dt} = 0 \quad (8.58a)$$

$$\frac{dN_{\mu\nu}^{react}}{dt} = -\frac{dN_{\nu\mu}^{react}}{dt} \quad (8.58b)$$

となる。このような結果は簡単に理解することができる。単一の光を含む反動的効果からは光子の吸収は導かれぬ。これが式 (8.58a) の意味するところである。しかし、式 (8.58b) により、光子はある一つの光、例えば μ から消失し、対 $\mu\nu$ のもう一方の光 ν に再び現れる。これが再分配過程である。このような過程を通して、場の全エネルギーは変化しない。なぜなら光 μ 、 ν は同じ周波数であるからである。しかし $k_\mu \neq k_\nu$ であるので、場の運動量変化がある。対応する原子の運動量変化は \mathcal{F}_{react} の原因にあたり、これは式 (8.57) より

$$\mathcal{F}_{react} = \sum_{(\mu,\nu)} \hbar(\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}_\nu) \frac{dN_{\mu\nu}^{react}}{dt} \quad (8.59)$$

と書き表される。

8.6.3 散逸的成分の解釈

先の項と同様の議論を用いて、式 (8.47b) より

$$\frac{dN_{\mu\nu}^{dissip}}{dt} = \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} [\langle G_\nu^- G_\mu^+ \rangle + \langle G_\mu^- G_\nu^+ \rangle] \quad (8.60)$$

が、レーザー光 ν によって誘起された双極子モーメントの散逸的成分と相互作用するもう一つの光 μ から単位時間あたり吸収される光子数であることが示される。

式 (8.58) に対応する式はここでは

$$\frac{dN_{\mu\mu}^{dissip}}{dt} = \frac{\Gamma}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \langle G_\mu^- G_\mu^+ \rangle \neq 0 \quad (8.61a)$$

$$\frac{dN_{\mu\nu}^{dissip}}{dt} = \frac{dN_{\nu\mu}^{dissip}}{dt} \quad (8.61b)$$

となる。レーザー光 μ の \mathcal{F}_{dissip} だけへの寄与はゼロではなく、

$$\frac{\Gamma}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \hbar \mathbf{k}_\mu \langle G_\mu^- G_\mu^+ \rangle \quad (8.62)$$

に等しい。このような項は他の光とは独立に光 μ によってもたらされる放射圧を表している。しかし式 (8.62) は暗黙の内に他の光 ν に依存する。なぜなら式 (8.62) に現れる平均値は σ_{gg} における値をとるため、これ自身は全レーザー光の場 E_L 、すなわち E_L を形成する全ての平面波の組によって決められる。

\mathcal{F}_{dissip} の式 (8.47b) には交差項 $\mu \neq \nu$ もあり、 (μ, ν) 対の寄与は

$$\frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \hbar(\mathbf{k}_\mu + \mathbf{k}_\nu) [\langle G_\nu^- G_\mu^+ \rangle + \langle G_\mu^- G_\nu^+ \rangle] \quad (8.63)$$

に等しい。このような項はレーザー光 μ と ν の間の干渉効果を表す。レーザー光 μ によってもたらされる放射圧は光 ν の存在によって変化させられ、その逆も起こる。式 (8.61b) は、もし光 μ の吸収が光 ν の存在によって変化する場合、光 ν の吸収も同じ量だけ μ の存在によって変化する事を意味する。ここでは先の項で示した様な再分配の過程は無く、干渉効果による両方の光の吸収の似たような増加 (または減少) がある。

8.6.4 一次元モラセズのある特定の場合

レーザー光の場が二つの平面波 1 と 2

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_2 = -\mathbf{k} \quad (8.64)$$

によって形成されると仮定する。8.6.2 項で示した様に、 \mathcal{F}_{react} は純粋な再分配による力で、これは単一の光による項は含まれない。式 (8.64) を考慮すると、式 (8.59) はここで

$$\mathcal{F}_{react} = \frac{\delta}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} 2\hbar k i [\langle G_1^- G_2^+ \rangle - \langle G_2^- G_1^+ \rangle] \quad (8.65)$$

となる。

$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$ なので、 \mathcal{F}_{dissip} の交差項 (8.63) はゼロになる。それぞれの光の放射圧はもう一方の光の存在によって増加するが、この追加された力は同じ基本単位の大きさであるが、反対の方向である。このためこれらは打ち消し合う。単一の光の項が残っており、これは

$$\mathcal{F}_{dissip} = \frac{\Gamma}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)} \hbar k [\langle G_1^- G_1^+ \rangle - \langle G_2^- G_2^+ \rangle] \quad (8.66)$$

と書き表される。これから一次元のモラセズに対しては、 \mathcal{F}_{dissip} は二つの光から独立にもたらされる放射圧の間の差とちょうど等しい事になる。

二つの対向する光の偏光 ϵ_1 および ϵ_1 に関して一言述べて終わることにする。 z 軸方向に $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ とすると、これらの偏光ベクトルは横波の場であるので z 軸に垂直である。またこのため右回りおよび左回り円偏光 σ^+ および σ^- の線形結合と見なすことができる。これから $G_\mu^- G_\nu^+$ ($\mu, \nu = 1$ または 2) の全ての行列要素は基底状態の空間において、選択則 $\Delta m = 0, \pm 2$ を満足し、ここで m は z 軸方向の磁気量子数である (G_μ^- と G_ν^+ は m を 1 または -1 だけ変化させる)。この結果、もし基底状態の角運動量 J_g が $1/2$ に等しいとすると、全ての $G_\mu^- G_\nu^+$ は J_z とまた $G^- G^+$ の固有状態の基底において対角化されるという結論が得られる。このような場合、式 (8.36) によると $G^- G^+$ に比例する有効ハミルトニアン H_{eff} の固有状態は z に依存しない。

第9章 弱い光によるシシフォス冷却

9.1 はじめに

レーザー冷却の最近数年間の目覚ましい発展によってその性能は数桁向上された。これらの発展のきっかけは Gaithersburg の NIST のグループによるドップラー限界が打破できるというデモンストラーションであった [62]。この実験およびこれに引き続き行われた多くのグループの実験の議論に対しては、読者はこの本の Phillips のコースを参照してほしい。この章とその次の章の目的は、これは今まで測定した中でも非常に低い温度が可能な新しい冷却機構をいくつか紹介する。

この章は第7章で示した強いレーザー定在波中で運動する2準位原子に対するシシフォス冷却機構の低光強度版の解析にあてることとする。第7章と同様に、二つのポテンシャル中で運動する原子は一方のポテンシャルの頂上から他方のポテンシャル曲線の谷底に選択的にジャンプする。このため平均的には原子はポテンシャルの丘を下るより上る事の方が多くなり、これはギリシャ神話のシシフォスが行ったのと同様である。しかし、ここでは二つのポテンシャルはもはや励起状態 e と基底状態 g からなる二つのドレスド状態 (より正確には $|e, N\rangle$ と $|g, N+1\rangle$ からなる) とは関連ない。ここではポテンシャルは二つの基底状態のゼーマン副準位に関係し、これは空間的に変調された光シフトをもたらし、この準位間には光ポンピングの確率が空間的に変調されている。このような場合、飽和パラメータ s が非常に小さく、また非常に光強度が低い場合に非常に効率が高いシシフォス冷却が現れる。

9.2 節において、強い偏光勾配を示すレーザー配置と平均放射圧が光シフトの空間的な勾配にのみ依存するような簡単な原子の遷移からなる一次元モデルの紹介から始める。第8章の結果を用いて、9.3 節において原子の基底状態の副準位の光シフトとこれらの副準位間の光ポンピング遷移確率を同様に決定する。次に9.4 節において動いている原子を考え、レーザー光の偏光勾配がある中でおける光シフトおよび光ポンピング確率の空間的変調がいかにしてシシフォス冷却を作り出すのを助けるかを示す。より定量的な解析は9.5 節において内部時間 T_{int} が外部時間 T_{ext} よりもはるかに短い通常の場合において紹介する。摩擦係数を評価し、平衡温度のオーダーを求める。最後に、9.6 節において原子の外部時間が内部時間よりも同程度または短いより特別な場合についていくつか示す。このような場合は実際に重要で、なぜならこれは低い強度のシシフォス冷却がその冷却限界に達する状況に相当するからである。

ここでは文献 [63] と [64] で示された方法に従う。より詳しくはこれらの中の参考文献および光ブロッホ方程式の数値計算結果が出ている文献 [65] に見出されるだろう。この分野の一般的な解説が文献 [85] に示されている。

9.2 モデルの提示

9.2.1 レーザー光の配置

z 軸に沿って互いに直交する偏光 ϵ_x と ϵ_y で同じ振幅 \mathcal{E}_0 を持つ二つの対向する光を考える (図 9.1a)。二つの光に対して適当な相対的な位相を選ぶと、 z 方向のレーザー電場は

$$E_L(z, t) = E_L^+(z)e^{-i\omega_L t} + c.c. \quad (9.1)$$

と書き表され、

$$E_L^+(z) = \frac{1}{2}(\epsilon_x e^{ikz} - i\epsilon_y e^{-ikz})\mathcal{E}_0 \quad (9.2)$$

である。式 (8.11) と同様に、これは

$$E_L^+(z) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0\sqrt{2}\epsilon(z) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_L\epsilon(z) \quad (9.3)$$

と書き表され、ここで \mathcal{E} は実数の振幅で、これは z に依存せず、 $\mathcal{E}\sqrt{2}$ に等しい。また規格化した偏光ベクトル $\epsilon(z)$ は

$$\epsilon(z) = \cos kz\epsilon_- - i\sin kz\epsilon_+ \quad (9.4)$$

と与えられる。式 (9.4) によると、レーザーの偏光は楕円で、これはある特定の場所において特に簡単になる: $z = 0$ では σ^- 偏光、 $z = \lambda/8$ では $(\epsilon_x - \epsilon_y)/\sqrt{2}$ 方向の直線偏光、 $z = \lambda/4$ では σ^+ 偏光、 $z = 3\lambda/8$ では $(\epsilon_x + \epsilon_y)/\sqrt{2}$ 方向の直線偏光、 $z = \lambda/2$ では σ^- 偏光となりこれが続く (図 9.1a を見よ)。

このため図 9.1a のレーザー光の配置は z 方向に波長の数分の一程度の長さのスケールで大きな楕円率の勾配を示す。原子の内部状態は励起光の偏光に依存するため、このような配置は大きな非断熱的な効果を導き、これはこの後で示される。これは動く原子がレーザーの偏光の変化にตอบสนองせざるをえないためである。これは低い強度において非常に長くなる内部応答時間 (光ポンピング時間) でもって運動することによる。これとは対照的に、もし二つの対向するレーザー光が同じ偏光だとすると、偏光の勾配ではなく単に強度の勾配が生じるだけである。ここで考える低い強度の領域においては、これは基底状態 g の全分布のわずかな変化のみをもたらし、 g における異方性の変化は生じない (これは基底状態の副準位間の分布数の差とゼーマンコヒーレンスによって特徴づけられる)。

9.2.2 原子の遷移。平均力に対する単純化

通常のレーザー冷却実験と同様に、 $J_g \rightarrow J_e = J_g + 1$ の遷移を考える。縮退した基底状態となる最も簡単な J_g の値、すなわち $J_g = 1/2$ をとる。図 9.1b には遷移 $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$ に相当する各 Clebsch-Gordan 係数が与えられている。

基底状態には二つのゼーマン副準位しかないので、基底状態の空間における G^-G^+ を表す行列は対角行列である (8.6.4 項の最後を見よ)。これから基底状態の副準位の光シフトを記述する有効ハミルトニアン H_{eff} は J_z の固有状態の基底 $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$ において対角行列である。そのため、 H_{eff} の固有状態、これは $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$ に一致するが、これは z に依存しない。このため \mathcal{F}_{react} の表式 (8.51)

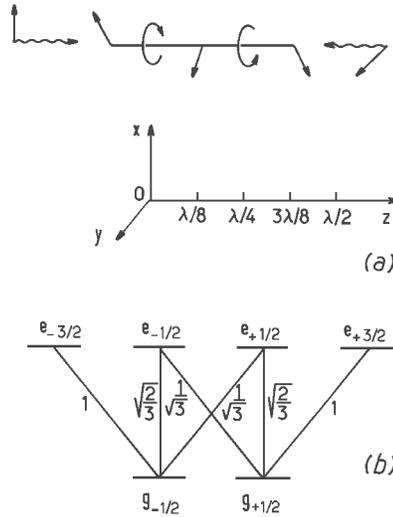


図 9.1: (a) Lin \perp Lin レーザー配置。 z 軸方向の強い偏光勾配を示す。(b) $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ 遷移に対する Clebsch-Gordan 係数。

において波動関数の勾配に関する第二行が無視でき、

$$\mathcal{F}_{react} = \Pi_{+1/2} \nabla E_{+1/2} - \Pi_{-1/2} \nabla E_{-1/2} \quad (9.5)$$

と書き表すことができる。ここで $\Pi_{\pm 1/2}$ と $E_{\pm 1/2}$ は $|g_{\pm 1/2}\rangle$ の分布数とエネルギーである。

ここでは一次元モラセズを考えるため、 \mathcal{F}_{react} の表式 (8.66) を用いることができ、これには二つの対向する光によってそれぞれもたらされる放射圧が含まれている。ここではまた、式 (8.66) に現れる二つの演算子 $G_1^- G_1^+$ と $G_2^- G_2^+$ を表す行列は J_z の固有状態の基底 $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$ において対角行列である ((8.6.4) 項の終わりを見よ)。対向する光は両方とも直線偏光なので、 $\langle G_1^- G_1^+ \rangle$ と $\langle G_2^- G_2^+ \rangle$ が等しく、 $\Pi_{-1/2} + \Pi_{+1/2} = 1$ 、すなわち原子の内部状態に依存しないことが簡単に示される。これから

$$\mathcal{F}_{dissip} = 0 \quad (9.6)$$

となる。

図 9.1b の単純な原子の遷移を選ぶことにより、基底状態の副準位の光シフトしたエネルギーの空間的な変位にのみ依存する平均化した力が導かれる。このためこの章で解析している新しい冷却機構が純粋なシシフォス効果とみなすことが可能になる。

9.3 内部自由度におけるダイナミクス

9.3.1 基底状態の副準位の光シフト

$|g_{\pm 1/2}\rangle$ の光シフト $E_{\pm 1/2}(z)$ は

$$E_{\pm 1/2}(z) = \hbar \delta' \Lambda_{\pm \pm}(z) \quad (9.7)$$

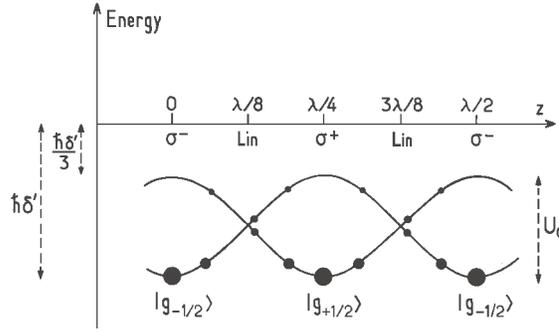


図 9.2: z に対する $|g_{\pm 1/2}\rangle$ の光シフト $E_{\pm 1/2}$ 。黒丸の大きさは z に静止する原子に対する $|g_{\pm 1/2}\rangle$ の定常状態の分布数に比例する。ここでは $\delta < 0$ を仮定している。

と書き表せ、ここで $\Lambda_{++}(z)$ と $\Lambda_{--}(z)$ は式 (8.32) で定義された演算子 $\Lambda(z)$ の対角成分で、この演算子の非負行列要素である。また δ' は式 (8.33b) で与えられる。 z におけるレーザー光の振幅 $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_0\sqrt{2}$ は z に依存しないので (式 (9.3) を見よ)、式 (8.33b) に現れるラビ周波数 ω_1 も z に依存しない。このため、式 (9.7) が唯一 z に依存するのは Λ の行列要素からくるもので、 δ' からくるものではないことを記しておく。 δ' は

$$\delta' = \delta s/2 = \delta s_0 \quad (9.8)$$

と書き表されることを記しておく。ここで s は \mathcal{E}_L に対する、 $s_0 = s/2$ は \mathcal{E}_0 に対する、すなわち二つの対向する光に対する飽和パラメータである。

式 (9.4) を式 (8.32) に代入し、 $\epsilon_q \cdot \hat{d}_{\pm}$ の行列要素に対して図 9.1b(式 (8.9) と (8.10) を見よ) の Clebsch-Gordan 係数を用いると、

$$\Lambda_{++}(z) = \sin^2 kz + \frac{1}{3} \cos^2 kz = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz \quad (9.9a)$$

$$\Lambda_{--}(z) = \cos^2 kz + \frac{1}{3} \sin^2 kz = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz \quad (9.9b)$$

が得られる。図 9.2 は $E_{\pm 1/2}(z)$ の空間的变化を表す。ここで $\delta < 0$ を仮定するため、光シフトは負になる。 $z = 0, \lambda/2, \dots$ 偏光が σ^- の所において、副準位 $|g_{-1/2}\rangle$ は (レーザー光が無い場合に相当するエネルギーゼロに対して) 副準位 $|g_{+1/2}\rangle$ よりも 3 倍下方にシフトする。なぜなら $|g_{-1/2}\rangle$ から始まる σ^- 遷移は $|g_{+1/2}\rangle$ から始まる σ^- 遷移よりも 3 倍強いからである。これは $\lambda/4$ においては状況が逆転し、ここでは偏光が σ^+ で、副準位 $|g_{+1/2}\rangle$ が $|g_{-1/2}\rangle$ より 3 倍シフトしている。最後に、 $z = \lambda/8, 3\lambda/8, \dots$ 直線偏光のところでは、両方の副準位は同じ光シフト量になる。

式 (9.9) と (9.7) を用いると、

$$E_{+1/2}(z) = -\frac{3U_0}{2} + U_0 \cos^2 kz \quad (9.10a)$$

$$E_{-1/2}(z) = -\frac{3U_0}{2} + U_0 \sin^2 kz \quad (9.10b)$$

と書き表す事もできる。ここで

$$U_0 = -\frac{2}{3}\hbar\delta' = -\frac{2}{3}\hbar\delta s_0 \quad (9.11)$$

は $E_{+1/2}(z)$ と $E_{-1/2}(z)$ の空間的振動によるポテンシャル井戸の深さである。式 (9.10) によってまた、反動的な力の表式 (9.5)、これは式 (9.6) による全力の平均と一致するが、これは

$$\mathcal{F}_{react}(z) = \mathcal{F}(z) = \epsilon_z k U_0 \mathcal{M}(z) \sin 2kz \quad (9.12)$$

と変換することが可能になる。ここで

$$\mathcal{M}(z) = \Pi_{+1/2}(z) - \Pi_{-1/2}(z) \quad (9.13)$$

は二つの副準位間の分布数差である。

9.3.2 光ポンピング確率

最初に $|g_{\pm 1/2}\rangle$ から離れる確率、 $\Gamma'_{\pm 1/2}(z)$ を考える。これは式 (8.35) の反交換子に関係があり、

$$\Gamma'_{+1/2}(z) = \Gamma' \Lambda_{++}(z) = \Gamma' \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz\right) \quad (9.14a)$$

$$\Gamma'_{-1/2}(z) = \Gamma' \Lambda_{--}(z) = \Gamma' \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz\right) \quad (9.14b)$$

と与えられる (式 (8.39) も見よ)。ここで

$$\Gamma' = \Gamma s/2 = \Gamma s_0 \quad (9.15)$$

である。

式 (8.35) の最後の項は光子一個を吸収した後どのようにして原子が基底状態に戻ってくるかを記述しているが、これは $\epsilon(z)$ の表式 (9.4) と図 9.1b の Clebsh-Gordan 係数を用いることにより簡単に計算することができる。このような項は分布数の間のみ結合を与える。これは J_g の値 $1/2$ によって σ_{gg} の非対角要素 $\langle g_m | \sigma_{gg} | g_{m'} \rangle$ のうち $m - m' = \pm 2$ のものが除かれるからである。

式 (8.35) の最後の二項の寄与を加え、式 (9.14) を用いると、最終的に $|g_{\pm 1/2}\rangle$ の分布数 $\Pi_{\pm 1/2}$ に対して、光ポンピングの効果を記述する以下のレート方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \Pi_{+1/2}(z) = -\Gamma_{+\rightarrow-}(z) \Pi_{+1/2}(z) + \Gamma_{-\rightarrow+}(z) \Pi_{-1/2}(z), \quad (9.16a)$$

$$\frac{d}{dt} \Pi_{-1/2}(z) = -\Gamma_{-\rightarrow+}(z) \Pi_{-1/2}(z) + \Gamma_{+\rightarrow-}(z) \Pi_{+1/2}(z) \quad (9.16b)$$

ここで

$$\Gamma_{+\rightarrow-}(z) = \frac{2}{9} \Gamma' \cos^2 kz \quad (9.17a)$$

$$\Gamma_{-\rightarrow+}(z) = \frac{2}{9} \Gamma' \sin^2 kz \quad (9.17b)$$

はそれぞれ $|g_{+1/2}\rangle$ から $|g_{-1/2}\rangle$ 、および $|g_{-1/2}\rangle$ から $|g_{+1/2}\rangle$ への光ポンピング確率である。

式 (9.16a) から式 (9.16b) を引き、式 (9.13) と (9.17) を用いると、 $\mathcal{M}(z)$ に対しても以下の式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(z) = -\frac{1}{\tau_p} [\mathcal{M}(z) + \cos 2kz] \quad (9.18)$$

ここで

$$\tau_P = \frac{9}{2\Gamma'} = \frac{9}{2\Gamma s_0} \quad (9.19)$$

と与えられる τ_P は分布数差が平衡値に達するまでの時間定数を特徴づける光ポンピング時間である。

式 (9.10) で与えられる光シフト $E_{\pm 1/2}(z)$ と同様に、ある副準位から他の副準位への光ポンピング率は空間的に変調されていることが式 (9.17) より明らかである。同じ z の関数 $\cos^2 kz$ が式 (9.10a) と (9.17a) に現れる。このため $|g_{+1/2}\rangle$ の光シフトの位置依存性と $|g_{+1/2}\rangle$ から $|g_{-1/2}\rangle$ への光ポンピング率の位置依存性には完全な相関がある。より詳しくいうと、 $E_{+1/2}(z)$ と $\Gamma_{+\rightarrow-}(z)$ は $\cos^2 kz = 1$ となる同じ z の値に対して最大値に達する。同様な結果が $E_{-1/2}(z)$ と $\Gamma_{-\rightarrow+}(z)$ に対して成り立つ。これは $|g_{+1/2}\rangle$ から $|g_{-1/2}\rangle$ ($|g_{-1/2}\rangle$ から $|g_{+1/2}\rangle$) の遷移確率は $|g_{+1/2}\rangle$ ($|g_{-1/2}\rangle$) のエネルギーが最も高くなるところで最大になることを意味する。動いている原子に対しては、図 9.2 の二つの振動するポテンシャル曲線の一方からそのポテンシャルの丘の頂上において原子は離れてもう一方のポテンシャルの谷底に移る過程が最も高い頻度で起こることを次の項で見ることになる。これはこの章で議論している冷却機構の鍵となる点である。

9.3.3 静止した原子の定常状態の分布数

もし原子が z において静止していると仮定すると、式 (9.18) の全ての係数は時間に依存しない。このためこの方程式は定常解があり、これは

$$\mathcal{M}^{st}(z) = \Pi_{+1/2}^{st}(z) - \Pi_{-1/2}^{st}(z) = -\cos 2kz \quad (9.20)$$

と与えられる。この式と規格化条件 $\Pi_{+1/2}^{st}(z) + \Pi_{-1/2}^{st}(z) = 1$ とを組み合わせると、

$$\Pi_{+1/2}^{st}(z) = \sin^2 kz \quad (9.21a)$$

$$\Pi_{-1/2}^{st}(z) = \cos^2 kz \quad (9.21b)$$

が得られる。図 9.2 の黒丸の大きさはこれらの定常状態の分布数に比例している。任意の z に対して、最も分布する副準位は最も低い準位である。丘の頂上では、分布数はゼロに等しく、一方、谷の底では 1 に等しい。

9.4 動いている原子に対する冷却機構

9.4.1 シシフォス効果

図 9.2 の二つのポテンシャル $E_{\pm 1/2}(z)$ 中を z 軸に沿って速度 v で動いている原子を考える。最初に v が十分大きいと仮定する。

$$\frac{1}{2}Mv^2 \ll U_0 \quad (9.22a)$$

$$kv \ll \Gamma' \quad (9.22b)$$

このため、これとは反対に原子は一方のポテンシャル井戸には捕捉されず、もう一方の副準位へ光ポンピングされる前に波長の数倍程度移動する。しかし v は十分小さいので、 kv は Γ に比べて無

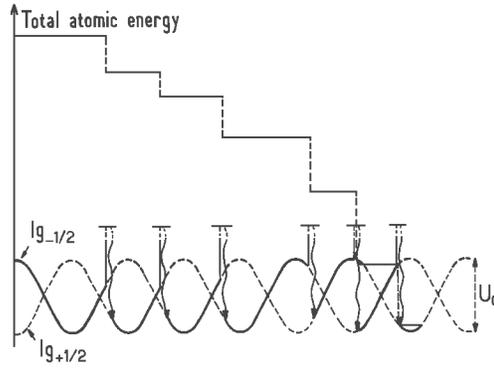


図 9.3: 動いている原子に対するシシフォス効果。光シフトと光ポンピング率の空間依存性には強い相関があるため、原子は一方の副準位から他方へジャンプするとき、ポテンシャルエネルギーを失う。図の上部に対応する全エネルギーの変化を示す。ここで示したランダムな経路は $\delta = -5\Gamma$ 、 $\Omega_1 = 2.3\Gamma$ 、およびセシウムの反跳シフト $\hbar k^2/M\Gamma = 7.8 \times 10^{-4}$ に対して得られたものである。

視できる事を記しておく (ドップラー冷却が無視できる)。

$$kv \ll \Gamma \quad (9.23)$$

条件 (9.23) は $v\Gamma^{-1} \ll \lambda$ と書き表されるが、これはまた原子が蛍光が出る 1 サイクル分の間に λ に比べて非常に小さい距離だけ移動する事を意味する。言い換えれば、光ポンピングの各サイクルは z 軸上の任意の点において瞬間的に起こると考えることができる。

原子が最初に副準位 $|g_{-1/2}\rangle$ にいると仮定する (図 9.3)。原子がこの副準位に残る限り、図 9.3 の上の部分に表されている全 (運動+ポテンシャル) エネルギーは一定に保たれる。差し当たり、原子が $|g_{-1/2}\rangle$ に戻る $|g_{-1/2}\rangle \rightarrow |e_{+1/2}\rangle$ (または $|e_{-3/2}\rangle \rightarrow |g_{-1/2}\rangle$) の蛍光サイクルにおける吸収と再放出光子による反跳を無視する。9.3.2 項の最後に議論した光ポンピング率の空間依存性により、 $|g_{-1/2}\rangle$ から $|g_{+1/2}\rangle$ への光ポンピングによる移動は $E_{-1/2}(z)$ が最大になる点の近傍でより多く起こることになり、原子は $E_{-1/2}(z)$ のポテンシャルの丘の頂上付近から $E_{+1/2}(z)$ の谷底付近にジャンプする。これに対応するポテンシャルエネルギーの変化 δU はこのため負になり、その大きさ (絶対値) は U_0 程度になる。もしここで吸収および再放出光子の反跳も無視するとすると、原子の全エネルギーは δU の量だけ突然減少することになる (図 9.3 の上部に示される曲線の最初の非連続点)。

同様な一連の過程が繰り返される。原子は平均的にはポテンシャルの丘を下りるよりも上ることが多くなり、一連の非連続的な過程によって運動エネルギーが U_0 程度またはそれよりも小さくなるまで全エネルギーは減少する (例えば図 9.3 の最後の量子ジャンプを見よ)。このような定性的な解析はより定量的な解析結果によって確かめられるが、これによって、低い強度のシシフォス冷却によって達成可能な運動エネルギーは空間的に変調された光シフトに関するポテンシャル井戸の深さ U_0 と同程度になることが示される: $Mv^2/2 \sim U_0$ 。離調が大きい場合 ($|\delta| \gg \Gamma$) は基底状態の副準位の光シフトがその幅よりも大きい興味ある場合であるが、これに対しては U_0 は $\hbar\Omega_1^2/|\delta|$ と同じ程度になり、このため

$$k_B T \sim \frac{\hbar\Omega_1^2}{|\delta|} \quad (9.24)$$

となる。

9.4.2 しきい値強度 – 冷却限界

式 (9.24) より、レーザー強度 $I_L \sim \Omega_1^2$ が減少する、または離調 δ を増加させることにより温度を減少させることができる。明らかに I_L は無限に減少させることはできない。このため式 (9.24) が無効になる前に強度のしきい値がある。

実際、式 (9.24) を導出する際に、各蛍光サイクルにおける吸収および再放出光子による反跳を無視してきた。このため、 U_0 程度の各光ポンピングサイクルのポテンシャルエネルギーの平均損失が $E_R = \hbar^2 k^2 / 2M$ 程度の反跳による運動エネルギーの平均的な増加よりもはるかに大きい事を暗黙のうちに仮定していた。もし I_L が減少すると、 U_0 もまた減少し、そして U_0 が E_R の数倍程度になると、シシフォス効果による冷却は反跳による加熱に打ち勝つにはもはや十分ではない。このためしきい値強度が

$$(U_0)_{thr} > \text{数 } E_R \quad (9.25)$$

と与えられる。

先の解析はまた低い強度のシシフォス冷却が最低エネルギーを E_R の数倍以下にすることができないことを示している。特徴的なエネルギーはここでは反跳エネルギー E_R で、ドブラー冷却の場合の $\hbar\Gamma$ ではない。

9.4.3 内部時間と外部時間との比較

この章で議論する冷却方法においては内部変数は光ポンピング時間 τ_P に等しい特性時間 T_{int} で時間発展する。

$$T_{int} \simeq \tau_P = \frac{9}{2\Gamma s_0} \quad (9.26)$$

外部変数の時間発展を特徴づけるため、原子が十分長い時間の間に冷却され、このため原子は図 9.3 のポテンシャル井戸内に擬似的に捕捉されると仮定する。そしてこの井戸内の振動周波数 Ω_{osc} を導入する。ポテンシャル井戸の底付近において、例えば $z = 0$ 付近では、式 (9.10b) より、

$$E_{-1/2}(z) \simeq -\frac{3U_0}{2} + k^2 U_0^2 z^2 \quad (|z| \ll 1/k) \quad (9.27)$$

となり、このため Ω_{osc} は

$$\Omega_{osc} = k \sqrt{\frac{2U_0}{M}} = \sqrt{\frac{4\hbar|\delta|s_0}{3M}} \quad (9.28)$$

と与えられる。外部時間 T_{ext} は振動周期と同程度である：

$$T_{ext} \simeq \frac{1}{\Omega_{osc}} \quad (9.29)$$

このため原子の運動を特徴づける重要なパラメータは

$$\Omega_{osc} \tau_P = \sqrt{\frac{27\hbar k^2 |\delta|}{M s_0 \Gamma^2}} \simeq \frac{T_{int}}{T_{ext}} \quad (9.30)$$

もし $\Omega_{osc}\tau_P \ll 1$ の場合、原子は一周期の間に $|g_{-1/2}\rangle$ と $|g_{+1/2}\rangle$ の間の遷移を数回起こす。このような”量子ジャンプする領域”においては、内部変数は外部変数よりはるかに速く変化する。これはレーザー冷却の半古典的な取り扱いにおいて従来典型的に考えられてきた領域である。断熱的に内部変数を消去し、原子の運動を速度に依存する力と運動量拡散係数によって記述することができる。このような取り扱いは文献 [63] において詳しく与えられているが、これは 9.5 節において概略を見てみる。

もし $\Omega_{osc}\tau_P \gg 1$ の場合、これまでとは逆の状況になり、原子はもう一方の副準位に光ポンピングされる前にポテンシャル井戸内で数回振動する。このような”振動する領域”においては外部変数は内部変数よりもはるかに速く変化するが、これは自由原子のレーザー冷却においては非常に特異なものである。このことはここでは重要で、なぜならもし式 (9.24) で評価される温度を下げるために、 δ を固定して Ω_1 を減少するとすると、式 (9.30) より量子ジャンプする領域から振動する領域に移ることができるからである。9.6 節においてこの領域について少々述べることにする。より詳しくは文献 [64] と [66] に見い出させれる。

この項を終わる前に、これ以外の冷却機構について言及したいと思う。これはこの章で議論したものと密接に関連するが、偏光勾配は用いていないものである [67, 68]。例えば z 軸方向に二つの対向する同じ円偏光 σ^+ の光からなるレーザー光の配置を仮定する。この場合には純粋な σ_+ 光の定在波になる。引き続き $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ 遷移を考えると、 $|g_{\pm 1/2}\rangle$ の光シフト $E_{\pm 1/2}(z)$ は空間的に振動し ($E_{+1/2} = 3E_{-1/2}$)、二つの副準位の分裂は定在波の節においてゼロに、腹において最大になる。光ポンピングによって、全ての原子は $|g_{\pm 1/2}\rangle$ にポンピングされ、 z で静止した原子のこの状態の定常状態の分布数は 1 のままで、 z に依存しない。これは $s \ll 1$ において励起状態の分布数が無視できるからである。ここで弱い静磁場 B_0 を z 軸に垂直に加えると仮定する。もし B_0 が十分小さいとすると、その効果は節の近傍においてのみ重要になる。ここでは磁場が副準位 $|g_{\pm 1/2}\rangle$ を混合し、この準位は縮退することになる。次に動いている原子を考え、これが予め副準位 $|g_{+1/2}\rangle$ に励起されているとする。このような原子が節を通り過ぎると、Landau-Zener 遷移によって原子はもう一方の副準位 $|g_{-1/2}\rangle$ に移ることができ、これは $|g_{+1/2}\rangle$ よりも光シフトが小さい。原子は光ポンピングによって $|g_{+1/2}\rangle$ に戻るまで τ_P 程度の時間、この副準位に引き続き残ることになる。このような方法によって原子が振動するポテンシャル曲線を下るより多く上ることになる新しい例を提供されることが簡単に分る。

9.5 ジャンプする領域 ($\Omega_{osc}\tau_P \ll 1$)

この項では $\Omega_{osc}\tau_P \ll 1$ を仮定する。このため、

$$T_{int} \ll T_{ext} \quad (9.31)$$

となる。これから内部変数が定常状態に達するのに必要な時間の間、またはより厳密には制御された領域においては、原子の速度は顕著には変化しない。このため内部変数の運動方程式 (9.16) においては

$$z = vt \quad (9.32)$$

と置くことができ、この方程式を解くときには v を定数とみなすことができる。

9.5.1 速度 v の原子の内部状態

式 (9.32) を分布数の差 \mathcal{M} の運動方程式 (9.18) に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}(t) + \frac{1}{\tau_P}\mathcal{M}(t) = -\frac{1}{\tau_P}\cos 2kvt \quad (9.33)$$

が導かれる。これは定数の係数による線形微分方程式で (τ_P は式 (9.19) より z 、そしてこのため t に依存しないため)、供給源の項が角周波数 $2kv$ で変調されている。式 (9.33) の制御された領域の解は

$$\mathcal{M}(t) = -\text{Re}\frac{\tau_P^{-1}}{2ikv + \tau_P^{-1}}e^{2ikvt} \quad (9.34)$$

と書き表され、これはまた式 (9.32) を呼び起こすと、

$$\mathcal{M}(z) = -\frac{1}{1+(v/v_c)^2}\cos 2kz - \frac{v/v_c}{1+(v/v_c)^2}\sin 2kz \quad (9.35)$$

となる。ここで v_c は臨界速度で、

$$v_c = \frac{1}{2k\tau_P} = \frac{\lambda}{4\pi\tau_P} = \frac{\Gamma'}{9k} \quad (9.36)$$

と定義される。

式 (9.35) より物理的な洞察を行うため、 $v \ll v_c$ に対するこの式の限界を調べるのは有用であろう。 v/v_c の一次のオーダーで、式 (9.35) は式 (9.36) と z で静止する原子に対する分布数差の定義式 (9.20) を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(z) &= -\cos 2kz - 2kv\tau_P \sin 2kz \\ &= \mathcal{M}^{st}(z) - v\tau_P \frac{d}{dz}\mathcal{M}^{st}(z) \\ &\simeq \mathcal{M}^{st}(z - v\tau_P) \end{aligned} \quad (9.37)$$

と書き表される。このような結果は、(過渡的な領域の後) 低い速度 v で z を通り過ぎる原子の内部状態は z で静止した原子の内部状態よりも遅れる事を明らかに示している。内部変数の有限の応答時間 τ_P によって、動いている原子から”見た”レーザー光の偏光の変化に対して $\mathcal{M}(z)$ は瞬間的に調整されない。原子の応答には非局所性があり、これは内部時間 τ_P の間、原子が移動する距離 $v\tau_P$ によって特徴づけられる。

9.5.2 速度に依存する平均的な力。摩擦係数

式 (9.35) を力の平均の表式 (9.12) に代入し、空間的な平均をとると、速度 v で動いている原子に作用する空間的に平均した力の z 成分が得られる。

$$\overline{\mathcal{F}_z(v)} = -\frac{kU_0}{2} \frac{v/v_c}{1+(v/v_c)^2} = -\frac{\alpha_S v}{1+(v/v_c)^2} \quad (9.38)$$

ここで α_S は式 (9.36)、(9.11) と (9.19) より、

$$\alpha_S = k^2 U_0 \tau_P = -3\hbar k^2 \frac{\delta}{\Gamma} \quad (9.39)$$

に等しい。 $v \ll v_c$ に対しては、 $\overline{\mathcal{F}_z(v)}$ は

$$\overline{\mathcal{F}_z(v)} = -\alpha_S v \quad (9.40)$$

と書き表され、これは α_S が低強度におけるシシフォス冷却の摩擦係数であることを示している。 α_S を式 (4.8) で与えられる平面レーザー光中で動く 2 準位原子に対する α_D と比較することは興味深い。式 (4.8) で α に D を加えたのは、この場合には摩擦の機構がドップラー効果によるからである。式 (9.39) で与えられる α_S の顕著な性質は、これがレーザー強度 I_L に依存しないことである。一方、式 (4.8) では α_D は s に比例し、このため $s \ll 1$ の時には I_L に比例する。一見すると、これは非常に驚くべき結果である。なぜなら I_L の減少は図 9.2 のポテンシャル井戸の深さ U_0 を減少させ、この結果、対応する勾配力も減少させる。しかし、式 (9.39) は α_S が U_0 と τ_P の積に比例することを示しており、このため I_L が減少すると、 I_L に比例して変化する U_0 の減少は、 $1/I_L$ に比例して変化する τ_P の増加によって補われる。言い換えれば、低い強度においては、光シフトの弱さは光ポンピング時間の長さによって補われる。また、式 (9.39) より、 α_S の値は $|\delta| \gg \Gamma$ に対しては、 α_D の最適値、これは式 (4.9) より $\hbar k^2/4$ 程度であるが、これよりも大きい事を記しておく。

v が増加すると、 $\overline{\mathcal{F}_z(v)}$ は $v = v_c$ の時に最大値に達する。そして $v \gg v_c$ の時、 $1/v$ で減少する。臨界速度 v_c は、光ポンピング時間 τ_P の間にこの速度で動く λ 程度の距離進む様な速度であるが、これはしばしば”捕捉速度範囲”と呼ばれる速度範囲とみなすことができ、低強度のシシフォス冷却の摩擦力が最も効率が高い速度範囲である。式 (9.36) によると、 v_c は $1/\tau_P$ 、すなわちレーザー強度 I_L に比例する。このような結果はドップラー冷却に対して起こる結果と対照をなす。ドップラー冷却では、捕捉速度範囲は第 4 章の図 4.2 の曲線の幅で与えられるが、これは最適な離調の値 $\delta = -\Gamma/2$ に対しては $kv_c \simeq \Gamma$ となり、これは I_L には依存しない。

この節において導かれた結果をまとめると、低強度のシシフォス冷却に対しては、摩擦係数 α_S は一定のままで、 I_L が減少するとこれは非常に大きくなり、一方、捕捉速度範囲は減少する。これとは反対に、ドップラー冷却においては、摩擦係数 α_D は I_L が減少するとこれも減少し、一方捕捉速度範囲は一定のままである。

9.5.3 平衡温度

低強度のシシフォス冷却に関する平衡温度 T_S を評価するため、最初に z で静止する原子に対する運動量拡散係数 D のオーダーを求める必要がある。

2 準位原子の場合と同様に、 D への寄与としては、自然放出光によって運動量が持ち去られることによる運動量の揺らぎからくる D_{vac} と、二つの対向する光のそれぞれに吸収される光子数の差における揺らぎからくる D_{abs} がある。5.2.3 項において展開したのと同様な考察によって、これら二つの寄与は、この章において考えている $s_0 \ll 1$ の場合に対しては、

$$D_{vac} \simeq D_{abs} \simeq \hbar^2 k^2 \Gamma' = \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \quad (9.41a)$$

のオーダーになる。また、原子が $1/\tau_P$ の確率でランダムに基底状態のゼーマン副準位間で光ポンピングの遷移が起きている場合における、 $-\nabla E_{+1/2}$ と $-\nabla E_{-1/2} = +\nabla E_{+1/2}$ 間で振動する瞬間的な双極子力の揺らぎからくる D への寄与 D_{dip} がある。文献 [39] の 4B 項に示されているものと非常に似た計算によって、この寄与は次のような結果となる。

$$D_{dip} = 2\hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma} s_0 \sin^4(2kz) \quad (9.41b)$$

この空間的な平均は

$$\overline{D_{dip}} = \frac{3}{4} \hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma} s_0 \quad (9.41c)$$

に等しくなる。

式 (9.41b) によると、 D_{dip} はある場所ではゼロになる。しかし、 $|g_{\pm 1/2}\rangle$ から離れる確率は決してゼロにはならないので (式 (9.14) を見よ)、 D_{vac} と D_{abs} はゼロにはならない。

もし $|\delta| \gg \Gamma$ の場合、 $\overline{D_{dip}}$ は D_{vac} と D_{abs} よりも $\delta^2/\Gamma^2 \gg 1$ 程度大きくなる。このため、

$$D \simeq \overline{D_{dip}} = \frac{3}{4} \hbar^2 k^2 \frac{\delta^2}{\Gamma} s_0 \quad (9.42)$$

摩擦係数 α_S で表される冷却と、運動量拡散による加熱の間の競合の結果から平衡温度 T_S が決まる。このため、 $|\delta| \gg \Gamma$ に対しては、

$$k_B T = \frac{D}{\alpha_S} \simeq -\frac{1}{4} \hbar \delta s_0 = \frac{3}{8} U_0 \quad (9.43)$$

となる。これは先に予想した結果の定量的な検証である (式 (9.24) を見よ)。それによれば平衡エネルギーが図 9.2 のポテンシャル井戸の深さ U_0 程度であると予想した。 s_0 の定義 (3.6) を用いることにより、 $|\delta| \gg \Gamma$ に対して、

$$k_B T \simeq \frac{\hbar \Omega_1^2}{8|\delta|} \quad (9.44)$$

となり、ここで Ω_1 は二つの対向するそれぞれの光に対するラビ周波数である。セシウムによる実験 [69] によって、 T が非常に大きな範囲において $\Omega_1^2/|\delta|$ に比例するという結果が得られた。この式 (9.44) との一致は少々予想しなかったことである。なぜならここで示した理論は一次元および $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ 遷移に対してのみ有効で、一方、実験は三次元で $J_g = 4 \leftrightarrow J_e = 5$ 遷移においてなされたからである。

最後に全速度分布が $\overline{\mathcal{F}_z(v)}$ の直線の部分に落ちるのはどのような条件下においてかという疑問が生じる。このような条件は

$$v_{rms} \ll v_c \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 \gg \sqrt{\frac{\hbar k^2 |\delta|^3}{M \Gamma^2}} \quad (9.45)$$

と書き表され、これは $\Omega_{osc} \tau_P \ll 1$ と等価であることが分り、これはこの節において考えてきた量子ジャンプする領域の有効な条件である。

9.6 弱い光によるシシフォス冷却の冷却限界

先の節で紹介した扱いは半古典近似に依存し (原子の空間的コヒーレンス長 ξ がレーザー波長 λ よりもはるかに小さいこと-2.3.2 項の議論を見よ)、また $T_{int} \ll T_{ext}$ という仮定にも依存している。この平衡温度 (9.44) に対する予想は Ω_1 が非常に小さい場合には確かに間違いである。低強度のシシフォス冷却によって達成可能な最低温度を決定するためには、より正確な理論が必要となる。

9.6.1 完全に量子力学的な取り扱いによる結果

文献 [64] において低強度のシシフォス冷却の完全に量子力学的な扱いが示されている。これにおいては原子の内部および外部自由度の両方に対して量子化している。ここではこのような計算に詳しくは立ち入らないことにする。いくつかの重要な結果を単に示すことにする。

最初に離調 δ が一定のもとでの平均運動エネルギー $\langle P^2/2M \rangle$ の U_0 に対する変化に関する予想を考えてみる。 $U_0 \gg E_R$ に対しては、量子論による結果は半古典論による結果と一致し、直線が得られる。 U_0 が減少すると、 $\langle P^2/2M \rangle$ は減少し、最低値を経てその後は発散する (文献 [64] の図 4.1b を見よ)。これは 9.4.2 項における U_0 のしきい値の存在に対する定性的な予想を確かめるものである。 $\langle P^2/2M \rangle$ の最低値 $\langle P^2/2M \rangle_{min}$ に関する二つの重要な結果を述べておく必要がある。最初に、この最低値に対応する δ と U_0 の値に対して、 $\Delta p \sim \langle P^2 \rangle^{1/2}$ によって特徴づけられる p の可能な値に対する分散 Δp は、いつでも $\hbar k$ よりも大きい。実際、 $U_0 = 95E_R$ および $|\delta| \gg \gamma$ に対して達成される $\langle P^2 \rangle^{1/2}$ の可能な最低値は $5.5\hbar k$ に等しい。これは半古典近似がそんなに悪くないことを意味する。なぜならコヒレンス長 $\xi_A \sim \hbar/\Delta p$ はいつでも $\lambda = 2\pi/k$ よりも小さいからである。二番目に、 $\langle P^2/2M \rangle_{min}$ に相当する U_0 の値に対して、 $\Omega_{osc\tau_P}$ はもはや 1 に比べて小さくない。実際、最低値 $\langle P^2/2M \rangle_{min}$ は $\Omega_{osc\tau_P} \rightarrow \infty$ の極限において達成される。これらの結果は最適なシシフォス冷却は 9.5 節の扱いによっては記述できない。これは半古典近似を用いているからではなく、これはそんなに悪い近似ではない。これは $T_{int} \ll T_{ext}$ という近似のせいで、これは不等号の向きを反転する必要がある。

文献 [64] において、量子力学的な運動方程式において行われるいくつかの近似が示されており、これは 5.3 節と同様に原子のウィグナー関数を $\hbar k/\Delta p$ の 2 次の次数までのべき展開をするという意味においてまだ半古典なものである。5.3 節の扱いとの違いは内部変数がもはや断熱的に消去されてはいないことである。これによってこれ以外のいくつかの近似が導入されている。ここでは極限 $\Omega_{osc\tau_P} \gg 1$ 的に絞ることとする。これによっていわゆる”secular 近似”によって中性原子のレーザー冷却を、イオントラップ中のイオンのレーザー冷却を記述するのに用いられたものと良く似た物理的描像によって記述することを可能にする。

9.6.2 振動する領域 ($\Omega_{osc\tau_P} \gg 1$)

この領域においては、原子はもう一方の副準位に光ポンピングされる前に、図 9.2 のポテンシャル井戸の一つの中で何回か振動する。このため、最初にステップでは、原子-場間の結合の散逸部分を無視する。これは原子による実の吸収および放出に関係するものである。そして光シフトの源であるこの結合の反動的な部分のみを考えることにする。これは散逸過程抜きに二重ポテンシャル $E_{\pm 1/2}(z)$ 中の原子の運動を考えることに等しい。文献 [66] に示したのと同様に、対応するハミルトニアンに対角化によって一連のエネルギー準位が得られ、これは実際には $E_{\pm 1/2}(z)$ の周期性によりエネルギーバンドを形成している。最低次のバンドは非常に狭く、これは隣接するポテンシャル井戸との間のトンネル効果が小さいためである。例えば、 $\delta = -20\Gamma$ 、 $\Omega_1 = 1.5\Gamma$ 、及びセシウム原子の反跳シフトの場合、 $U_0 \simeq 100E_R$ となり、これは 6 つのバンドがあり [66]、最低次のバンドの幅は $10^{-6}E_R$ よりも小さく、隣のバンドとの間隔は $\hbar\Omega_{osc}$ 程度で、 $\Omega_{osc}/2\pi \simeq 40kHz$ となる。

このような近似の第二番目のステップにおいて光ポンピングの効果を導入する。これは異なるエネルギーバンド間または与えられたバンド内の遷移を誘起する。条件 $\Omega_{osc\tau_P} \gg 1$ によって、エネルギー準位の分布数間の非 secular な結合と、 $\hbar\Omega_{osc}$ 程度離れた異なるエネルギー準位間の密度行列の非対角要素を無視する事ができる。文献 [66] はこのような”secular 近似”(対称性の考慮の補遺) からいかにしてエネルギー準位の分布数のみを含む一組のレート方程式が導かれるかが示されている。このような方程式は光ポンピング確率による明確な物理的意味を持っている。またこれらの式は、 z 方向の原子の運動量 p による $|g_{\pm 1/2}, p\rangle$ を基底とした完全な量子力学的な方程式よりもより簡単に数値計算により解く事ができる。例えば、先に与えられたパラメータの値に対して、50%以

上の原子が二つの最低次の束縛状態のバンドに捕捉されることが分る。そして $\langle P^2/2M \rangle$ に対してこのようにして得られる値は文献 [64] において得られた結果と非常に良く一致する。

このような近似は束縛状態間の (自発的な) 反ストークス-ラマン遷移によるレーザー冷却の記述を与える。これはイオントラップ中のイオンのレーザー冷却に対して与えられる記述と非常に似ている [21]。これは光モラセズ中に捕捉された中性原子において新しい現象が観測される可能性を示唆する。例えば、捕捉原子の蛍光スペクトルにおいて ω_L から $\pm\Omega_{osc}$ 程度の大きさだけ周波数がシフトした離散的なサイドバンドを観測できる可能性がある。このようなサイドバンドは ω_L から Ω_{osc} だけ離れているが、これは $1/\tau_P$ のオーダーのサイドバンドの幅よりもはるかに大きいため、容易に分離可能である。これらの観測は光モラセズ中の量子化された原子の運動に対する直接的な証拠を示すものである。このような効果は最近の実験によって観測された [86][87]。

第10章 $\sigma^+ - \sigma^-$ 配置 – 半古典論

10.1 はじめに

この章の目的はドップラー冷却限界を打ち破る事を可能にする新しいレーザー冷却機構のもう一つの例を紹介することにある。前章と同様に、この機構は複数の基底状態のゼーマン副準位の存在と偏光勾配を基にしている。しかし偏光勾配は異なる性質のもので、9章で議論したシシフォス効果とは全く異なった物理的過程を引き起こす。この $\sigma^+ - \sigma^-$ 配置を調べるもう一つの重要な動機は、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移の特定な場合において、“コヒーレントポピュレーショントラッピング”のアイデアを紹介できることにある。この現象はまた別の冷却方法を基にしており、これは11章で解析するが、これによって単一光子の反跳限界以下の温度が得られる。

9章と同様に、 z 方向に進む、同じ振幅 \mathcal{E}_0 で同じ周波数 ω_L の二つの対向するレーザー光を考える。しかし直交する直線偏光の代わりに、ここでは二つの直交する円偏光、 z 方向に進行する光に対しては偏光 σ^+ 、対向する光に対しては σ^- とする (図 10.1 を見よ)。

二つの光の位相差を適当に選ぶと、 z におけるレーザー電場は

$$\mathbf{E}_L(z, t) = \mathbf{E}_L^+(z)e^{-i\omega_L t} + c.c. \quad (10.1)$$

と書き表され、ここで

$$\mathbf{E}_L^+(z) = \frac{1}{2}(\epsilon_+ e^{ikz} + \epsilon_- e^{-ikz})\mathcal{E}_0 \quad (10.2)$$

である。 $\epsilon_{\pm} = \mp(\epsilon_x \pm i\epsilon_y)/\sqrt{2}$ を用いると、

$$\mathbf{E}_L(z, t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon(z) = -\frac{i}{2}\mathcal{E}_L\epsilon(z) \quad (10.3)$$

となり、ここで $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_0\sqrt{2}$ は z に依存しない実数の振幅で、規格化された線形偏光ベクトル $\epsilon(z)$

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= \frac{i}{\sqrt{2}}[\epsilon_+ e^{ikz} + \epsilon_- e^{-ikz}] \\ &= \epsilon_x \sin kz + \epsilon_y \cos kz \end{aligned} \quad (10.4)$$

は z 軸を中心とした $\phi = -kz$ の回転によって ϵ_y から得られる。これからレーザー電場は全ての z の値に対して、同じ振幅 \mathcal{E}_L で、 z が変化すると回転し、 λ のピッチで螺旋を形作るような直線偏光 $\epsilon(z)$ を持つことになる (図 10.1)。

異なる2点 z_1 と z_2 におけるレーザー電場は純粋な回転によってお互いに他方から変換できるため、基底状態の副準位の光シフトは z_1 と z_2 において同じ大きさになり、一方対応する波動関数は互いに回転によって他方に変換される。これから、9章で調べた状況とは対照的に、光シフトしたエネルギーは空間的な勾配を示さず、一方、明確な光シフトを示す基底状態のゼーマン副準位の波動関数は位置に依存する。これは光シフトした基底状態の副準位のエネルギーは空間的には振動せ

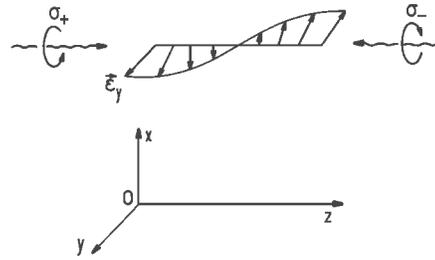


図 10.1: $\sigma^+-\sigma^-$ 配置この結果得られるレーザー電場は直線偏光で、その向きは空間的に回転してピッチが λ の螺旋を形成する。

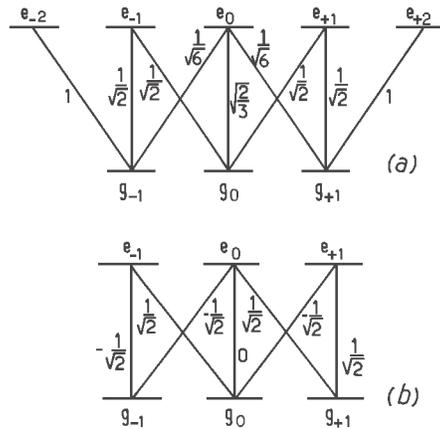


図 10.2: 遷移 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ (a) および $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ (b) に対する Clebsch-Gordan 係数。

ず、これによって $\sigma^+-\sigma^-$ 配置に対してはシシフォス効果の可能性が全く排除される。このような配置においては、式 (8.51) で与えられる力の平均的反動的成分は完全に波動関数の空間的な勾配によるものである。このためこの状況はある意味では 9 章で解析したものの相補的なものである。

レーザー電場の偏光 $\epsilon(z)$ が直線であるということは重要な結論をもたらす。光シフトは $\epsilon(z)$ に平行な静電場によって作られる DC の Stark シフトと同じ対称性を持っているが、これは $\epsilon(z)$ 方向の磁気量子数の符号が反対な二つのゼーマン副準位に対しては等しくなる。このため 9 章と同様に $J_g = 1/2$ とおくと、基底状態のゼーマン縮退は光シフトによっては解けないため、この場合にはエネルギーの勾配も、また波動関数の勾配も生じない。 $J_g = 1/2$ に対しては二つの対向する光の放射圧はいつでも等しいため (もしドップラー冷却を無視すれば)、この $J_g = 1/2$ の場合には新しい冷却効果は生じないという結論に達する。この章において $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ と $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ の二つの原子の遷移について考慮するのはこのためである。これらは $\sigma^+-\sigma^-$ 配置における新しい冷却機構を導く最も簡単な J_g の値を持つものである (図 10.2 を見よ)。最初のもは標準的な遷移の $J_g \leftrightarrow J_e = J_g + 1$ である。二番目は、コヒーレントポピュレーショントラッピングのアイデアを簡単に紹介するためにここで考慮した。

(10.2 節において) 力の平均の一般的な表式を与えることから始める。これはここでは光シフトしたゼーマン副準位の波動関数の空間的な勾配によるものと、二つの対向する光がもたらす放射圧の間の差によるものの和である。この後、10.3 節において光シフトと z において静止している原子の定常状態の分布数を調べる。動いている原子に対しては、10.4 節において原子の時間発展が時間に依存しないハミルトニアンによって解析することができる回転して動いている系を導入することができることを示す。このような変換は 10.5 節において、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対して現れる新しい冷却機構を簡単な方法で解釈することを可能にする。重要な物理的な効果は基本的には非常に敏感な運動がもたらす基底状態の副準位間に現れる分布数の差で、これは二つの対向する光によってもたらされる放射圧の間の不均衡を生じさせる。最後に、10.6 節においてコヒーレントポピュレーショントラッピングの現象をもたらす $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移の場合について解析する。

$\sigma^+ - \sigma^-$ 配置は新しいレーザー冷却機構に対する最初の説明 [70, 71] において最初から考慮されていた。ここでは文献 [63] のより定量的な説明に従うつもりである。また数値計算によるいくつかの結果が文献 [65] に示されている。また $\sigma^+ - \sigma^-$ レーザー光に静磁場を与えた場合については文献 [72] に示されている。

10.2 力の平均の一般的な表現

9 章と同様に

$$\delta' = \delta s / 2 = \delta s_0 \quad (10.5a)$$

$$\Gamma' = \Gamma s / 2 = \Gamma s_0 \quad (10.5b)$$

を導入する。ここで s_0 は二つの対向する光のそれぞれの振幅 \mathcal{E}_0 に対する飽和パラメータで、 $s = 2s_0$ は $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_0\sqrt{2}$ に対する飽和パラメータである。

10.2.1 光シフトに関する有効ハミルトニアン

式 (8.36) によると、この様なハミルトニアンは

$$H_{eff} = \hbar\delta' \sum_{m,m'} |g_m\rangle \langle g'_m| \langle g_m | \Lambda(z) | g'_m \rangle \quad (10.6)$$

と書き表される。ここで $\Lambda(z)$ は式 (8.32) において与えられている。 $\epsilon(z)$ の ϵ_+ および ϵ_- による展開式 (10.4) と図 10.2 の Clebsch-Gordan 係数を用いて、 $\Lambda(z)$ の行列要素を簡単に計算することができる。これらを式 (10.6) に代入することにより、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} H_{eff}(1 \leftrightarrow 2) = & + \frac{\hbar\delta'}{2} |g_0\rangle \langle g_0| + \frac{7\hbar\delta'}{12} [|g_1\rangle \langle g_1| + |g_{-1}\rangle \langle g_{-1}|] \\ & + \frac{\hbar\delta'}{12} [|g_1\rangle \langle g_{-1}| e^{2ikz} + |g_{-1}\rangle \langle g_1| e^{-2ikz}] \end{aligned} \quad (10.7a)$$

が得られ、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} H_{eff}(1 \leftrightarrow 1) = & + \frac{\hbar\delta'}{2} |g_0\rangle \langle g_0| + \frac{\hbar\delta'}{4} [|g_1\rangle \langle g_1| + |g_{-1}\rangle \langle g_{-1}|] \\ & - \frac{\hbar\delta'}{4} [|g_1\rangle \langle g_{-1}| e^{2ikz} + |g_{-1}\rangle \langle g_1| e^{-2ikz}] \end{aligned} \quad (10.7b)$$

が得られる。

J_z の固有状態の基底 $\{|g_m\rangle\}$ による H_{eff} のゼロでない非対角要素は $|g_1\rangle$ と $|g_{-1}\rangle$ 、またはその逆の間を結びものだけであることが式 (10.7) において明らかに分る。これは 8.6.4 項の終わりの方で示唆した $\Delta m = \pm 2$ の選択則によるものである。また z に依存する式 (10.7) の項は $|g_1\rangle$ と $|g_{-1}\rangle$ の両方が現れる項だけである。これはこれらの項が両方の対向する光を含んでいる事 (再分配過程) によるもので、これらの光の位相は z が変化すると $\exp(\pm ikz)$ のように変化する。

10.2.2 復元力

この力の表式 (8.48) を用いると、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) &= -\langle \nabla H_{eff}(1 \leftrightarrow 2) \rangle \\ &= -\frac{i}{6} \hbar k \delta' \epsilon [\sigma_{g_{-1}g_1} e^{2ikz} - \sigma_{g_1g_{-1}} e^{-2ikz}]\end{aligned}\quad (10.8a)$$

が得られ、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1) &= -\langle \nabla H_{eff}(1 \leftrightarrow 1) \rangle \\ &= +\frac{i}{2} \hbar k \delta' \epsilon [\sigma_{g_{-1}g_1} e^{2ikz} - \sigma_{g_1g_{-1}} e^{-2ikz}]\end{aligned}\quad (10.8b)$$

が得られる。

この後の計算に対して新しい表記

$$\tilde{\sigma}_{g_1g_{-1}} = \sigma_{g_1g_{-1}} e^{-2ikz} = \tilde{\sigma}_{g_{-1}g_1}^* \quad (10.9)$$

を密度行列の非対角要素に対して導入すると便利である。 $\sigma_{g_1g_{-1}}$ と $\tilde{\sigma}_{g_1g_{-1}}$ の間の変換の物理的な解釈は 10.4 節において与えられる。ここで $\tilde{\sigma}_{g_1g_{-1}}$ の実部および虚部を C_r と C_i とする。

$$\tilde{\sigma}_{g_1g_{-1}} = C_r + iC_i \quad (10.10)$$

式 (10.9) と (10.10) を用いて式 (10.8) を

$$\mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) = -\frac{\hbar k}{3} \delta' C_i \epsilon_z \quad (10.11a)$$

$$\mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1) = +\hbar k \delta' C_i \epsilon_z \quad (10.11b)$$

と書き直す事ができる。式 (10.11) より力の平均の反動的成分は g_1 と g_{-1} の間のゼーマンコヒーレンスの虚部に等しい事が明らかである。このことは反動的な力は再分配力 (8.6.2 項を見よ) で、二つの対向する光は直交する円偏光 σ^+ と σ^- であることに反映している。

10.2.3 散乱力

式 (8.66) で与えられる、このような力は二つの光によってもたらされる放射圧の間の差である。 G_μ^\pm とそれぞれの光に対する飽和パラメータ s_0 を用ると、光 1 (波数ベクトル $k\epsilon_z$ 、偏光 σ^+) によってもたらされる放射圧は $(\hbar k \Gamma s_0 / 2)$ と、各ゼーマン副準位 g_m の分布数 Π_m に g_m が始状態の σ^+ 遷移の Clebsch-Gordan 係数によって重みづけを行って和をとったものとの積に等しい事が容易に

分る。 ϵ_z を $-\epsilon_z$ に、また σ^+ を σ^- に置き換える事により、同様の結果が光2によってもたらされる放射圧に対しても成り立つ。これから $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2) &= +\hbar k \frac{\Gamma'}{2} \epsilon_z \\ &\times \left[\Pi_1 + \frac{\Pi_0}{2} + \frac{\Pi_{-1}}{6} - \frac{\Pi_1}{6} - \frac{\Pi_0}{2} - \Pi_{-1} \right] \\ &= +\frac{5}{12} \hbar k \Gamma' \epsilon_z [\Pi_1 - \Pi_{-1}] \end{aligned} \quad (10.12a)$$

が得られ、また $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 1) &= +\hbar k \frac{\Gamma'}{2} \epsilon_z \\ &\times \left[\frac{\Pi_0}{2} + \frac{\Pi_{-1}}{2} - \frac{\Pi_1}{2} - \frac{\Pi_0}{2} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \hbar k \Gamma' \epsilon_z [\Pi_1 - \Pi_{-1}] \end{aligned} \quad (10.12b)$$

となる。

式 (10.12) には力の平均の散逸成分が二つのゼーマン副準位間の分布数差 $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ に比例することが明らかに現れている。また (10.12a) と (10.12b) では符号が変化していることを記しておく。これは $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては最も強い σ^+ 遷移は g_1 が始状態であるからで、一方 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対してはこれが g_{-1} が始状態であるからである (図 10.2 を見よ)。

10.3 静止した原子の内部状態

10.3.1 光シフト

式 (10.7) で与えられる有効ハミルトニアンは簡単に対角化することができる。最初に、他のどの状態とも結合しない状態 $|g_0\rangle$ は明らかに H_{eff} の固有状態である。次に、 $\{|g_0\rangle\}$ 空間における H_{eff} を表す 2×2 行列は等しい対角要素を持っている。これから $|g_1\rangle e^{ikz}$ と $|g_{-1}\rangle e^{-ikz}$ の対称および反対称な足し合わせもまた H_{eff} の固有状態であることになる。もし

$$|\psi_S(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g_1\rangle e^{ikz} + |g_{-1}\rangle e^{-ikz}] \quad (10.13a)$$

$$|\psi_A(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g_1\rangle e^{ikz} - |g_{-1}\rangle e^{-ikz}] \quad (10.13b)$$

とおくと、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} H_{eff}(1 \leftrightarrow 2)|g_0\rangle &= (\hbar\delta'/2)|g_0\rangle, \\ H_{eff}(1 \leftrightarrow 2)|\psi_S(z)\rangle &= (2\hbar\delta'/3)|\psi_S(z)\rangle, \\ H_{eff}(1 \leftrightarrow 2)|\psi_A(z)\rangle &= (\hbar\delta'/2)|\psi_A(z)\rangle, \end{aligned} \quad (10.14a)$$

が得られ、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} H_{eff}(1 \leftrightarrow 1)|g_0\rangle &= (\hbar\delta'/2)|g_0\rangle, \\ H_{eff}(1 \leftrightarrow 1)|\psi_S(z)\rangle &= 0|\psi_S(z)\rangle, \\ H_{eff}(1 \leftrightarrow 1)|\psi_A(z)\rangle &= (\hbar\delta'/2)|\psi_A(z)\rangle, \end{aligned} \quad (10.14b)$$

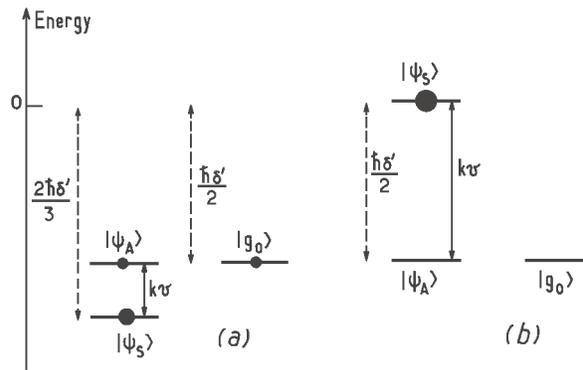


図 10.3: $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移 (a) および $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移 (b) に対する基底状態のゼーマン副準位の光シフト。黒丸の大きさは z において静止した原子に対応する副準位の定常状態の分布数に比例する。 $\delta < 0$ を仮定している。垂直線は運動による $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の間の結合を表し、これは角周波数 $k\nu$ によって特徴づけられる。

が得られる。先に (10.1 節を見よ) 予想したように、光シフトは z に依存しない事が分る。一方、 H_{eff} の固有状態は z に依存する。図 10.3 は両方の遷移に対する基底状態のゼーマン副準位の光シフトを表す。9 章と同様に、 $\delta < 0$ を仮定しており、このため光シフトは負の方向である。 $|g_0\rangle$ と $|\psi_A(z)\rangle$ の光シフトは同じで、これらは縮退したままである。

式 (10.14) で得られた結果と図 10.3 に表されている結果は、 z におけるレーザー光の偏光が直線で、式 (10.4) で与えられる単位ベクトル ϵ_z に平行であることを記すことにより、より速く見出すことができるかもしれない。これから角運動量 J の固有状態の成分 $\epsilon_z \cdot J$ が明確な光シフトを持ち、これが $\hbar\delta'$ と図 10.2 の π 遷移の Clebsch-Gordan 係数の二乗の積に等しい事は明らかである。これから直ちに式 (10.14) に示されている固有値とそれらの縮退が与えられる。また式 (10.13a) で与えられている $|\psi_S(z)\rangle$ が固有値 0 の $\epsilon_z \cdot J$ の固有状態に一致し、一方、式 (10.13b) で与えられる $|g_0\rangle$ と $|\psi_A(z)\rangle$ が $\epsilon_z \cdot J$ の固有状態で固有値がそれぞれ $+\hbar$ と $-\hbar$ の二つの状態の足し合わせでそれぞれ直交するものであることが確認できる。しかし H_{eff} を対角化するために導入した二つの状態 $|\psi_S(z)\rangle$ と $|\psi_A(z)\rangle$ は次に続く節において重要な役割を果たし、 $\epsilon_z \cdot J$ の固有状態を用いるよりも便利であることが分る。最初に、原子の運動が $|\psi_S(z)\rangle$ と $|\psi_A(z)\rangle$ の間だけを結合する事が 10.4 節において分る。二番目に、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては状態 $|\psi_S(z)\rangle$ が、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては状態 $|\psi_A(z)\rangle$ が $|g_{-1}\rangle$ と $|g_1\rangle$ の線形結合になり、これは励起状態 $|e_0\rangle$ とは (z において静止している原子に対して) レーザー-原子相互作用ハミルトニアン V_{AL} によって結合しない。これは簡単に

$$\langle e_0 | V_{AL} (1 \leftrightarrow 2) | \psi_A(z) \rangle = 0 \quad (10.15a)$$

$$\langle e_0 | V_{AL} (1 \leftrightarrow 0) | \psi_S(z) \rangle = 0 \quad (10.15b)$$

と確かめることができる。この結果の物理的な解釈は $|g_{-1}\rangle$ からの σ^+ 光子の吸収に対すると、 $|g_{+1}\rangle$ からの σ^- 光子の吸収に対する吸収確率の振幅は、もし原子が $|g_{+1}\rangle$ と $|g_{-1}\rangle$ のある適当な線形な重ね合わせ状態にあるとすると、これらは互いに干渉して打ち消し合う事ができる。二つの非結合状態 (10.15a) と (10.15b) の間の符号の違いは e_0 が終状態の σ^+ と σ^- 遷移の Clebsch-Gordan 係数が、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては等しいのに対して、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対してはこれ

が反対である事による (図 10.2 を見よ)。後で非結合状態 (10.15b) がコヒーレントポピュレーショントラッピング現象において重要な役割を果たすことが見出されるだろう。

10.3.2 光ポンピングと定常状態の分布数

$|g_0\rangle$ 、 $|\psi_S(z)\rangle$ 、 $|\psi_A(z)\rangle$ からの離れる確率は明確に定義され (式 (8.39) を見よ)、これは Γ' と Λ の固有値の積に等しく、これは式 (10.14) の $\hbar\delta'$ の係数である。このようにして $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned}\Gamma'_0(1 \leftrightarrow 2) &= \Gamma'_A(1 \leftrightarrow 2) = \frac{\Gamma'}{2} \\ \Gamma'_S(1 \leftrightarrow 2) &= \frac{2\Gamma'}{3}\end{aligned}\tag{10.16a}$$

が得られ、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned}\Gamma'_0(1 \leftrightarrow 1) &= \Gamma'_A(1 \leftrightarrow 1) = \frac{\Gamma'}{2} \\ \Gamma'_S(1 \leftrightarrow 1) &= 0\end{aligned}\tag{10.16b}$$

が得られる。 $\Gamma'_S(1 \leftrightarrow 1)$ がゼロになることにより、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては $|\psi_S(z)\rangle$ が非結合状態になる。 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては、 $|\psi_A(z)\rangle$ は e_0 とは結合しないが、 $|e_{+2}\rangle$ と $|e_{-2}\rangle$ とは結合し続ける。このことが $\Gamma'_A(1 \leftrightarrow 2)$ が $\Gamma'_S(1 \leftrightarrow 1)$ と同じようにゼロにならない事の説明である。

z で静止している原子に対する定常状態の密度行列は式 (8.35) の右辺の第二および三項にそれぞれ関係する離れる確率と戻ってくる確率の間の競合の結果から得られるが、これを得るために、 $\epsilon_z \cdot J$ の固有状態の基底を用いる。この場合、レーザー光は π 偏光とみなされ、定常状態の密度行列は対角行列である。最初に $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移を考える。 π 光子の吸収と σ^+ 光子の自然放出による g_0 から g_{-1} への遷移の数は π 光子の吸収と σ^- 光子の自然放出による g_{-1} から g_0 への遷移の数と等しい必要があるという単純な詳細平衡理論よって、固有値 $-\hbar$ 、 0 、 $+\hbar$ を持つ $\epsilon_z \cdot J$ の固有状態の分布数がそれぞれ $4/17$ 、 $9/17$ 、 $4/17$ であることが示される。これから基底 $\{|g_0\rangle, |\psi_S\rangle, |\psi_A\rangle\}$ において密度行列もまた対角行列となり、対応する分布数は

$$\begin{aligned}\Pi_0(1 \leftrightarrow 2) &= \Pi_A(1 \leftrightarrow 2) = \frac{4}{17} \\ \Pi_S(1 \leftrightarrow 2) &= \frac{9}{17}\end{aligned}\tag{10.17a}$$

に等しくなる。これらの z に依存しない定常状態の分布数は図 10.3a において黒丸によって表されている。今度は $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移を考える。 $|\psi_S\rangle$ から離れる確率はゼロになるので、全ての原子の分布数は原子がずっとトラップされ続ける $|\psi_S\rangle$ に光ポンピングされることになる。これから

$$\begin{aligned}\Pi_0(1 \leftrightarrow 1) &= \Pi_A(1 \leftrightarrow 1) = 0, \\ \Pi_S(1 \leftrightarrow 1) &= 1.\end{aligned}\tag{10.17b}$$

となる。このような結果は $\epsilon_z \cdot J$ の固有状態の基底を用いることによっても得ることができる。この基底においては原子は π 光子の吸収と σ^+ または σ^- 光子の自然放出によって g_0 に光ポンピングされる。そして g_0 が始状態の Clebsch-Gordan 係数がゼロになることにより、原子は g_0 にトラップされ続ける (図 10.2b を見よ)。

10.4 動いている原子の内部状態

ここで z 軸方向に速度 v で動いている原子を考える。このため

$$z = vt \quad (10.18)$$

となり、また

$$T_{int} \ll T_{ext} \quad (10.19)$$

を仮定する。このため内部変数が平衡状態に達するのに必要とされる時間 T_{int} の間の v の変化を無視することができる。

10.4.1 回転しながら並進運動する系への変換

$\epsilon(z)$ の表式 (10.4) 中の z を vt に置き換えることにより、原子が静止している z 軸に沿って速度 v で動く系においては原子は z 軸方向に回転する偏光で角運動量 $-kv$ を持つレーザー光の場を感じる事が示される。これはレーザー光の場が回転および並進運動する系において一定の方向に保たれるような回転する系を原子が静止している系に導入する事を示唆する。

このような変換はユニタリー変換

$$T(t) = \exp(-ikvtJ_z/\hbar) \quad (10.20)$$

を適用することにより達成される。新しい表記においてはレーザー-原子間の相互作用ハミルトニアンが原子の双極子モーメントと ϵ_y に平行な固定の直線偏光のレーザー電場との間の結合を記述する事が容易に確かめられる (文献 [63] の付録 A を見よ)。

新しい表記においては、原子の密度行列は

$$\tilde{\sigma} = \exp(-ikvtJ_z/\hbar)\sigma\exp(+ikvtJ_z/\hbar) \quad (10.21)$$

に等しい。これは先に式 (10.9) で導入した変数の変化が回転系への変換に対応することを示している。三つのゼーマン副準位 $|g_{-1}\rangle$ 、 $|g_0\rangle$ 、 $|g_{+1}\rangle$ の分布数 Π_{-1} 、 Π_0 、 Π_{+1} はこの変換 (10.20) によっては変更されないことを記しておく。

10.4.2 新しいハミルトニアン – 新しい運動方程式

$T(t)$ が t に依存するため、新しい表記におけるダイナミクスはハミルトニアン

$$\tilde{H} = T(t)HT^+(t) + i\hbar \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] T^+(t) \quad (10.22)$$

によって支配される。ここで H は古い表記のハミルトニアンである。 $T(t)HT^+(t)$ が ϵ_y に平行な固定の直線偏光のレーザー場と結合する原子のダイナミクスを記述することを既に示唆した。このためこのダイナミクスは式 (8.35) によって記述され、ここで $\epsilon(r)$ は ϵ_y に、 σ は $\tilde{\sigma}$ に置き換えられる。

式 (10.20) を用いることにより、式 (10.22) の最終項は

$$i\hbar \left[\frac{dT(t)}{dt} \right] T^+(t) = V_{rot} = kvJ_z \quad (10.23)$$

に等しい事が示される。時間に依存しないこのような項は (仮想的な) 静磁場 B_f との相互作用ハミルトニアンと同様の形をしている。この磁場は z 軸に平行で、その振幅の大きさはこれに対応する Larmor 周波数が kv に等しい。実際、このような仮想的な場は新しい系が回転することによってこの系に現れる慣性による場以外の何物でもない。

最後に動いている原子のダイナミクスは $z = 0$ で静止し、これに z 軸に平行な静磁場 B_f の影響を受けた原子のダイナミクスと同じである。式 (8.35) と (10.23) より、新しい表記における $\tilde{\sigma}_{gg}$ の運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{gg} = & -i\delta'[\Lambda(z=0), \tilde{\sigma}] - \frac{\Gamma'}{2}\{\Lambda(z=0), \tilde{\sigma}\}_+ \\ & + \Gamma' \sum_{q=-1,0,+1} (\epsilon_q^* \cdot \hat{\mathbf{d}}^-)(\epsilon_y \cdot \hat{\mathbf{d}}^+) \tilde{\sigma}_{gg} (\epsilon_y^* \cdot \hat{\mathbf{d}}^-)(\epsilon_q \cdot \hat{\mathbf{d}}^+) \\ & - ikv[J_z/\hbar, \tilde{\sigma}_{gg}]. \end{aligned} \quad (10.24)$$

と書き表される。

式 (10.24) において $\Lambda(z)$ は式 (10.7) における $\hbar\delta'$ の係数である。式 (10.7)、(10.10)、および図 10.2 の Clebsch-Gordan 係数を用いて、式 (10.24) から Π_{-1} 、 Π_0 、 Π_1 、 C_r 、 C_i に対する五つの閉じた方程式の組が帰着され、これは $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 = & -\frac{5\Gamma'}{72}\Pi_1 + \frac{9\Gamma'}{72}\Pi_0 + \frac{\Gamma'}{72}\Pi_{-1} - \frac{\Gamma'}{18}C_r - \frac{\delta'}{6}C_i, \\ \dot{\Pi}_{-1} = & +\frac{\Gamma'}{72}\Pi_1 + \frac{9\Gamma'}{72}\Pi_0 - \frac{5\Gamma'}{72}\Pi_{-1} - \frac{\Gamma'}{18}C_r + \frac{\delta'}{6}C_i, \\ \dot{\Pi}_0 = & -(\dot{\Pi}_1 + \dot{\Pi}_{-1}), \\ \dot{C}_r = & +\frac{\Gamma'}{24}\Pi_1 + \frac{\Gamma'}{8}\Pi_0 + \frac{\Gamma'}{24}\Pi_{-1} - \frac{5\Gamma'}{12}C_r + 2kvC_i, \\ \dot{C}_i = & +\frac{\delta'}{12}(\Pi_1 - \Pi_{-1}) - 2kvC_r - \frac{5\Gamma'}{12}C_i, \end{aligned} \quad (10.25a)$$

と、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 = & -\frac{\Gamma'}{8}\Pi_1 + \frac{\Gamma'}{8}\Pi_0 + \frac{\Gamma'}{8}\Pi_{-1} + \frac{\delta'}{2}C_i, \\ \dot{\Pi}_{-1} = & +\frac{\Gamma'}{8}\Pi_1 + \frac{\Gamma'}{8}\Pi_0 - \frac{\Gamma'}{8}\Pi_{-1} - \frac{\delta'}{2}C_i, \\ \dot{\Pi}_0 = & -(\dot{\Pi}_1 + \dot{\Pi}_{-1}) = -\frac{\Gamma'}{4}\Pi_0, \\ \dot{C}_r = & \frac{\Gamma'}{8} - \frac{\Gamma'}{4}C_r + 2kvC_i, \\ \dot{C}_i = & -\frac{\delta'}{4}(\Pi_1 - \Pi_{-1}) - 2kvC_r - \frac{\Gamma'}{4}C_i, \end{aligned} \quad (10.25b)$$

とそれぞれ書き表される。ゼーマンコヒーレンス $\Delta m = \pm 1$ は Π_{-1} 、 Π_0 、 Π_1 とは結合しない。これは Λ に続く選択則 $\Delta m = 0, \pm 2$ と、 $|g_m\rangle$ が J_z の固有状態であるからである。式 (10.25) の全ての係数は時間に依存しないため、これらの式は定常状態における解を持つ。

三番目の方程式 (10.25b) は、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては Π_0 が $\Gamma'/4$ の確率で減衰することを示している。これは最初に g_0 にいた原子は $g_{\pm 1}$ に光ポンピングされることによるものである。 $g_{\pm 1}$ からは e_0 に再励起されるが、 g_0 には決して戻らない。なぜなら遷移 $e_0 \leftrightarrow g_0$ の Clebsch-Gordan 係数がゼロになるからである (図 10.2b を見よ)。

10.4.3 平均力に対する新しい表現

原子は定常状態に達しており、このため式 (10.25) の全ての左辺をゼロに置くことができると仮定する。

最初に $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移を考える。最初の式から二番目の式 (10.25a) を引くと、

$$J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2 \text{ に対して} \quad \Pi_1 - \Pi_{-1} = -\frac{4\delta'}{\Gamma'} C_i, \quad (10.26)$$

が得られる。式 (10.26) は式 (10.11a) と (10.12a) と組み合わせる事により

$$\mathcal{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2) = 5\mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) \quad (10.27)$$

を暗黙のうちに意味する。散逸力は反動力に比例し、その 5 倍大きいため、力の全平均は

$$\mathcal{F}(1 \leftrightarrow 2) = \frac{6}{5}\mathcal{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2) = \frac{1}{2}\hbar k\Gamma'\epsilon_z(\Pi_1 - \Pi_{-1}). \quad (10.28)$$

に等しくなる。このため $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移の場合、主な効果は二つの対向する光による放射圧の間の不均衡である。 $|\delta| \gg \Gamma$ の場合 (これは $|\delta'| \gg \Gamma'$ を含む) でも反動力が散逸力よりも小さくなるのに驚くかもしれない。これは反動力の源である再分配過程は $\sigma^+ - \sigma^-$ 配置の場合には有限の回数に限定されている事による。 g_{-1} から始まって、原子は $k\epsilon_z$ モードの光の σ^+ 光子を吸収して e_0 にジャンプし、次に $-k\epsilon_z$ モードの光の σ^- 光子を誘導放出し、原子は g_{+1} に落ち、その後再び $k\epsilon_z$ モードの光の σ^+ 光子を吸収して e_2 にジャンプする。しかし、 e_2 からは σ^- 光子を誘導放出することはもはやできず、再分配過程は止まる。もし 9 章のように二つの対向する光の両方が σ^+ と σ^- の混合した光を含んでいた場合にはこうはならない。

次に $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移を考える。 Π_0 は定常状態においてはゼロになるため、最初の二つの式 (10.25b) は定常状態においては同一になり、

$$J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1 \text{ に対して} \quad \Pi_1 - \Pi_{-1} = +\frac{4\delta'}{\Gamma'} C_i, \quad (10.29)$$

を導く。これは式 (10.11b) と (10.12b) と組み合わせる事により

$$\mathcal{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 1) = \mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1). \quad (10.30)$$

を与える。これは反動力と散逸力が等しい大きさで、反対の符号であることを示している。 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては、全平均放射力は動いている原子に対してもいつでもゼロになる。

$$\mathcal{F}(1 \leftrightarrow 1) = \mathcal{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1) + \mathcal{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 1) = 0. \quad (10.31)$$

このためこの場合においては摩擦力は無い。しかし次の章で摩擦力ではなく、運動量拡散と速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピングに基づく新しい冷却機構がこのような遷移に対して現れることを示す。

10.5 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対する摩擦力

10.5.1 摩擦係数

原子が感じる力の全平均 (10.28) を計算するために、式 (10.25a) を解き、 $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ の定常状態の値を得る必要がある。

最初に速度が非常に小さい極限を考える。 $z = 0$ で $v = 0$ の原子に対しては、式 (10.17a) で与えられる定常状態の密度行列を知っており、これから Π_1 、 Π_0 、 Π_{-1} 、 C_r 、 C_i の定常状態の値を求める事ができる。

$$\begin{aligned} v = 0 \text{ に対して} \quad \Pi_1 = \Pi_{-1} &= 13/34, \\ \Pi_0 &= 4/17, \\ C_r &= 5/34, \\ C_i &= 0. \end{aligned} \tag{10.32}$$

これから $v \neq 0$ で式 (10.25a) を用いることによって $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ の v に比例する項を回転しながら並進運動する系において $z = 0$ で静止する原子に対して求める事ができる。式 (10.26) を用いて、最後の式 (10.25a) を変換して、定常状態において $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ を C_r の関数として表す事ができる。 C_r はこの式ではすでに kv がかけてあるため、 C_r を式 (10.32) で与えられる零次のオーダーの値で置き換えることができる。このようにして

$$\Pi_1 - \Pi_{-1} = \frac{240}{17} \frac{kv\delta'}{4\delta'^2 + 5\Gamma'^2}, \tag{10.33}$$

が得られ、従って、式 (10.33) を式 (10.28) に代入すると、

$$\frac{kv}{|\delta'|} \ll 1 \rightarrow \mathcal{F}_z(1 \rightarrow 2) = -\alpha v, \tag{10.34}$$

となり、ここで摩擦係数 α は

$$\alpha = -\frac{120}{17} \hbar k^2 \frac{\Gamma'\delta'}{4\delta'^2 + 5\Gamma'^2} = -\frac{120}{17} \hbar k^2 \frac{\Gamma\delta}{4\delta^2 + 5\Gamma^2}. \tag{10.35}$$

と与えられる。ここでは式 (10.5) を用いた。

$|\delta| \gg \Gamma$ の極限において式 (10.35) のより物理的な導出が可能である。この時、 $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ と α は式 (10.33) と (10.35) より、

$$|\delta| \gg \Gamma \rightarrow \Pi_1 - \Pi_{-1} \simeq +\frac{60}{17} \frac{kv}{\delta'}, \tag{10.36a}$$

$$\alpha \simeq -\frac{30}{17} \hbar k^2 \frac{\Gamma}{\delta}. \tag{10.36b}$$

と与えられる。ここで静止した原子に対する $|g_0\rangle$ 、 $|\psi_S\rangle$ 、 $|\psi_A\rangle$ の光シフトや定常状態の分布数が与えられている図 10.3a に戻ってみる。そして式 (10.23) で与えられるハミルトニアン V_{rot} で記述される原子の運動による摂動を理解しようとしてみる。 $J_z|g_0\rangle = 0$ なので、 V_{rot} は $|g_0\rangle = 0$ と他のどの状態とも結合させることはできない。さらに、式 (10.13a) を用いて (原子は回転しながら並進運動する系において $z = 0$ で静止しているため、指数関数 $\exp(\pm ikz)$ は無い)、 V_{rot} が $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ に対して対角項が無い事が容易に確認できる。 V_{rot} の唯一のゼロでない行列要素は $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の間の要素で、これは

$$\langle \psi_S | V_{rot} | \psi_A \rangle = \hbar kv. \tag{10.37}$$

に等しい。これは図 10.3a の垂直の矢印で示されている。 $kv \ll |\delta'|$ の極限において、これは式 (10.36) が有効なための条件で、 $|\Pi_1 - \Pi_{-1}| \ll 1$ を導く事になるが、この場合、 ψ_S と ψ_A 間の運動による結合 $\hbar kv$ は分裂 $E_S - E_A$ よりも小さくなる。この分裂は式 (10.14a) より、

$$E_S - E_A = \frac{2}{3} \hbar \delta' - \frac{1}{2} \hbar \delta' = \frac{\hbar \delta'}{6}. \tag{10.38}$$

に等しい。このため V_{rot} の効果は摂動論によって扱うことができる。 kv/δ' の最低次で、すなわち一のオーダーにおいて V_{rot} の主な効果は波動関数を変化させることである。波動関数 ψ_A には ψ_S が混ざることになり、またその逆も起こる。もし $|\overline{\psi_S}\rangle$ と $|\overline{\psi_A}\rangle$ が $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の摂動を受けた状態だとすると、 kv/δ' の一次のオーダーにおいて

$$\begin{aligned} |\overline{\psi_S}\rangle &= |\psi_S\rangle + \frac{\hbar kv}{E_S - E_A} |\psi_A\rangle = |\psi_S\rangle + \frac{6kv}{\delta'} |\psi_A\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{6kv}{\delta'}\right) |g_{+1}\rangle + \left(1 - \frac{6kv}{\delta'}\right) |g_{-1}\rangle \right], \end{aligned} \quad (10.39a)$$

$$\begin{aligned} |\overline{\psi_A}\rangle &= |\psi_A\rangle + \frac{\hbar kv}{E_A - E_S} |\psi_S\rangle = |\psi_A\rangle - \frac{6kv}{\delta'} |\psi_S\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{6kv}{\delta'}\right) |g_{+1}\rangle - \left(1 + \frac{6kv}{\delta'}\right) |g_{-1}\rangle \right]. \end{aligned} \quad (10.39b)$$

となる。一方、 $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ は同じ割合で $|g_1\rangle$ と $|g_2\rangle$ が含まれているが、 $|\overline{\psi_S}\rangle$ と $|\overline{\psi_A}\rangle$ に対してはこれはもはや正しくない。例えば、 $\delta' < 0$ なので、 $|\overline{\psi_S}\rangle$ における $|g_{-1}\rangle$ の比率は $|g_1\rangle$ のそれよりも大きい。これは $|\overline{\psi_A}\rangle$ に対しては逆転する。準位 $|\overline{\psi_S}\rangle$ と $|\overline{\psi_A}\rangle$ の分布数が等しくないことから、 $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の間の運動による結合 $\hbar kv$ からいかにして Π_1 と Π_{-1} の間に差が生じるかが理解できる。文献 [36] と同様に、このような議論は定量的に定式化することができ*、そしてちょうど式 (10.36) が導かれる。ここで運動によって誘導された分布数差 Π_1 と Π_{-1} は kv/δ に対して変化し、ドップラー冷却の場合の様に kv/Γ に対しては変化しない事を強調しておきたい。レーザー光が低強度においては $|\delta'| \ll \Gamma$ であるので、ここで議論している新しい冷却機構はドップラー冷却よりもはるかに速度に対して敏感である。

9章と同様に摩擦係数はレーザー強度 I_L に依存しないことが式 (10.35) において明らかである。この結果は、式 (10.28) における吸収率 Γ' の I_L 依存性、これは I_L が減少すると I_L に比例して減少するが、これと $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ の I_L 依存性、これは $1/I_L$ に比例して増加するが、この両者が互いに打ち消しあうことによる (式 (10.33) と (10.36a) を見よ)。特に、図 10.3a において、 I_L が減少すると、 ψ_S と ψ_A の間隔は減少し、これは I_L を減少すると、 ψ_S と ψ_A の間の運動による結合 $\hbar kv$ によって誘導される波動関数の混合が増加することを説明するものである。また、式 (10.36b) によると、 α は $|\delta| \gg \Gamma$ に対しては $-(30/17)\hbar k^2 \Gamma/\delta$ となる。このような値は9章において見出された α_S の式 (9.39) における対応する値よりも Γ^2/δ^2 のオーダーだけ小さく、これは $|\delta| \gg \Gamma$ の場合、小さい値になる。しかし 10.5.3 項において、運動量拡散係数は同じ大きさ Γ^2/δ^2 だけ小さくなるため、平衡温度は $\sigma^+ - \sigma^-$ と $\text{Lin} \perp \text{Lin}$ (直線 \perp 直線) 配置の両方に対して同じオーダーになる。

10.5.2 取り込み速度範囲

ここからは $|\delta| \gg \Gamma$ を仮定することにする。 kv が $|\delta'|$ よりももはや小さい時には、 kv/δ' が小さい事を基にしている先の節における全ての摂動計算はもはや無効となる。このため式 (10.25a) に立ち戻って、この厳密な定常状態の解を数値計算によって、もしくは解析的に求める必要がある。これから力の平均 (10.28) の v に対する変化は分散曲線になることが分かり、臨界速度 v_c 、または

*文献 [36] においては、計算は $\epsilon \cdot \mathbf{J}$ の基底においてなされている。運動による結合 V_{rot} は二つのゼロでない非対角要素を持つ。ここで行ったのと同様に、基底 $\{|g_0\rangle, |\psi_S\rangle, |\psi_A\rangle\}$ を用いることにより、計算を簡単にすることができる。なぜなら $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ だけが V_{rot} によって結合するからである。

捕捉速度範囲において力の係数は最大になる。

$$kv_c \sim |\delta'|. \quad (10.40)$$

文献 [63] の図 5.1 はドップラー冷却の効果も含んでいるが、これはこのような計算の一例である。

低強度のシシフォス冷却に対して見出された取り込み速度範囲 (9.36) と同様に、 v_c の値 (10.40) はレーザー強度 I_L に比例する。しかし式 (9.36) と (10.40) の間には重要な違いがある。Lin⊥Lin 配置の場合には、 kv_c は吸収率 Γ' に比例するが、一方、 $\sigma^+-\sigma^-$ 配置の場合には、 kv_c は光シフト δ' に比例する。

この項における議論は、原子が基底状態において異なる対称性を持つ二つの摂動を受けていることを考えることにより、より物理的な用語によって表すことができる。最初にレーザー-原子相互作用があり、これは回転しながら並進運動する系においては、 ϵ_y に平行な静電場の対称性を持ち、またこれは δ' に比例するハミルトニアン項と、 Γ' に比例する緩和項によって特徴づけられる。また原子の運動の効果があり、これは ϵ_z に平行な静磁場の対称性を持ち、これは kv に比例する。 kv と $|\delta'|$ の相対的な値に依存して、一方の摂動が他方より大きくなる。 $v = v_c$ に対しては、両者は同じオーダーの大きさになる。この意味において、力の平均 (10.28) の v に対する変化と原子の基底状態において観測される狭い Hanle 共鳴の間にはある種の類似性がある (8.5.3 項を見よ)。

10.5.3 平衡温度のおおよその値

最初に運動量拡散係数 D を z において静止する原子に対して評価しようとしてみる。9.5.3 項と同じ表記と同じ議論を用いることにより、 D_{vac} と D_{abs} に対して式 (9.41a) と同じ結果が得られる。これはようするに D_{vac} と D_{abs} が 2 準位原子の場合と同様に同じオーダーの大きさだと仮定することである (5.2.3 項を見よ)。次の項で、 D_{abs} に対してはこれがあまり良い近似ではない事が分るだろう。

$\sigma^+-\sigma^-$ 配置においては光シフトの空間的な勾配は無いので、双極子力は無く、また式 (9.41b) と同様の D_{dip} の D への寄与は無い。これから

$$D \sim D_{vac} \sim D_{abs} \sim \hbar^2 k^2 \Gamma' \quad (10.41)$$

となる。

式 (10.41) と式 (9.42) を比べると、 $\sigma^+-\sigma^-$ 配置においては D が Γ^2/δ^2 程度小さい事が分る。この D の減少は先の α の減少を補い、このため、平衡温度

$$k_B T \sim \frac{D}{\alpha} \sim \hbar |\delta'| \sim \frac{\hbar \Omega_1^2}{|\delta|} \quad (10.42)$$

は $\sigma^+-\sigma^-$ 配置および Lin⊥Lin 配置の両方の場合に対して同じオーダーになる。

10.5.4 異常運動量拡散

運動量拡散係数の量子力学的計算が文献 [73] において行われている。このような計算から D_{vac} は式 (10.41) で与えられている大きさ程度となるが、 D_{abs} はある特定の δ と kv の値に対しては D_{vac} よりもはるかに大きくなりうる事が示される。ここではこのような上記の運動量拡散の物理的な意味を議論してみる。より詳しくは文献 [73] において見出されるだろう。また文献 [63][65] と [74] も見よ。

D_{abs} の増大は連続的に吸収される二つ光子の方向の間の相関によるものである。光ポンピングにより、 σ^+ 光子の吸収直後に、 σ^+ 光子を吸収する確率が σ^- 光子よりも高いところから原子は高い確率で g_1 にいる。これは g_1 が始状態の σ^+ 遷移は σ^- 遷移よりも 6 倍強いからである (図 10.2a を見よ)。これから原子は続けて数個の σ^+ 光子を吸収して、次に原子は σ^- 光子を吸収し、これは原子を g_{-1} に光ポンピングし、ここで原子は続けて数個の σ^- 光子を吸収し、またこれと同様の過程が続く、この結果、(吸収による) 運動量空間におけるランダムウォークのステップは $\hbar k$ に代わって $\hbar k$ の数倍になり、これが D_{abs} の増加を説明する。このような効果はより大きな J_g に対してはより重要になる。

このような D_{abs} の増大は J_z の固有状態が $\tau_P = 1/\Gamma'$ 程度の時間間隔が離れて続けて起こる二つの蛍光サイクルの間で固定と考えられる場合のみ起こる。これは $kv \gg |\delta'|$ の動いている原子に対して、または離調が小さい場合の遅い原子に対してのみ達成される ($kv \ll |\delta'|$ 、 $|\delta'| \ll \Gamma'$)。最初のケースの場合 ($kv \gg |\delta'|$)、摂動 $V_{rot} = kvJ_z$ は H_{eff} によって記述される光シフトの効果を上回る。二番目のケースの場合、 V_{rot} は H_{eff} に比べて無視できるが ($kv \ll |\delta'|$ なので)、 H_{eff} によって誘導される J_z の固有状態の間の歳差運動が周波数 $|\delta'|$ で起こる。この周波数は吸収確率 Γ' に比べて非常に小さく、二つの蛍光サイクルの間には何も観測しうる効果をもたらさない。

先の議論によって、 D_{abs} が任意の大きな δ の値においてなぜ kv に対して急激に変化するのかが説明される。このようにして運動の完全に量子力学的な方程式の数値積分から求められた運動量分布の形状を理解することが可能である [74]。この分布に現れる広い台座上の分布はおおきな J_g に対して顕著になるが、これは v が増加する時の D_{abs} の増加を反映している。しかし、この分布に現れる $p = 0$ 近傍の狭いピークの幅は $\hbar k$ に比べて大きいままであるため、半古典近似はそんなに悪くない。しかし、大きな J_g に対しては、原子は最も大きな磁気量子数 $m = J_g$ を持つ副準位から始まる多くの σ^+ 遷移を次々と起こし、 T_{int} の時間の間この副準位にトラップされたままになる。この時間は T_{ext} と同程度もしくはこれよりも長くなりうる。低強度のシシフォス冷却の場合と同様に (9.6.1 項を見よ)、通常のレーザー冷却の扱いが問題になるような状況の新しい例をここで見出した。問題は半古典近似によるものではなく、通常の仮定 $T_{int} \ll T_{ext}$ がもはや有効でないことによる。

10.6 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対するコヒーレントポピュレーショントラッピング

$J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては力の全平均がたとえ原子が動いていてもゼロになるという事はこのような遷移に対しては興味ある効果が何も起きないという意味ではない。この節において原子の運動がいかにか原子の内部自由度のダイナミクスを大きく変化させるかを示す。

10.6.1 定性的な議論

10.4.2 項の最後で既に述べたように、最初に g_0 にいた原子は g_{\pm} に光ポンピングされ、ここからは原子は決して g_0 には戻ってこない。 g_0 と g_{\pm} の間には運動による結合は無いため、 g_0 を完全に無視することができ、基底状態は二つの関連する副準位 g_1 と g_{-1} 、または式 (10.13) で $z = 0$ において与えられるこれらの線形結合 ψ_S と ψ_A だけがあるとみなすことができる。

$v = 0$ に対しては、原子の全分布は $|\psi_S\rangle$ に光ポンピングされる (図 10.3b を見よ)。原子が動く

と、運動による結合 $\hbar kv$ が二つの状態 $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の間に現れ (図 10.3b の垂直方向の矢印)、この二準位は

$$E_S - E_A = -\frac{\hbar\delta'}{2} \quad (10.43)$$

だけ離れている。 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移と同様にして、 $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の波動関数は摂動を受け、これによって $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ はゼロでなくなる。しかしここで新たに驚くべき効果をつけ加える。これは $v = 0$ の時、 $|\psi_S\rangle$ からの吸収確率がゼロになることからくる (式 (10.16b) を見よ)。原子の運動によって $|\psi_S\rangle$ に $|\psi_A\rangle$ が混ざるとは $|\psi_S\rangle$ に $|\psi_A\rangle$ の不安定性の一部分が移る事になる。そして $|\psi_S\rangle$ が摂動を受けた状態 $|\overline{\psi_S}\rangle$ からの吸収確率はもはやゼロではなくなる。言い換えれば、 $v = 0$ のときには全ての原子が吸収が無い状態 $|\psi_S\rangle$ にいるため、全蛍光発光確率 R_F はゼロになるが、原子が動いていると、 $|\psi_S\rangle$ からのわずかな吸収が起こるため、再びこれはゼロでなくなる。このような効果は摂動の大きさを表すパラメータ $kv/(E_S - E_A) \sim kv/\delta'$ によって特徴づけられ、 v に対する R_F の変化が $v = 0$ 近傍の非常に狭い速度範囲において起こり、この範囲は式 (10.40) で与えられる v_c 程度である。

$J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ 遷移に対しては、運動による $|\psi_S\rangle$ と $|\psi_A\rangle$ の間の結合 $\hbar kv$ はこれらの副準位からの吸収確率も変化させる。この場合、 $|e_0\rangle$ と結合しないのは副準位 $|\psi_A\rangle$ で (式 (10.15a) を見よ)、 $|\psi_S\rangle$ が混ざると部分的に結合するようになる。しかしこの効果はそんなに劇的ではなく、 $v = 0$ においても、状態 $|\psi_A\rangle$ は光を吸収する (式 (10.16a) を見よ)。これはこの準位はいつでも e_2 と e_{-2} と結合しているからである。このため $v = 0$ の近傍で v がわずかに変化すると全蛍光確率の変化が期待されるが、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移の場合のように蛍光は決して完全には止まらない。

原子が速度 v で動いている時、原子から見ると二つの対向するレーザー光は反対のドップラシフト $\pm kv$ を受けることになるため、これら二つの光の周波数は明らかに周波数シフト $\Delta = 2kv$ だけ異なる $\omega_L \pm kv$ となり、これは $v = 0$ の時にはゼロになる。原子の内部自由度に対するダイナミクスにのみ興味がある限り、原子がいつでも静止している系において異なる周波数 $\omega_L \pm \Delta/2$ を持つ二つのレーザー光 (必ずしも対向している必要は無い) と相互作用するような問題を考えることにより同じ方程式および同じ結果が得られるだろう。 $\Delta = 0$ の時、原子は $|\psi_S\rangle$ にトラップされることになり、蛍光は止まる。 Δ がわずかにゼロから変化すると、蛍光は再び現れる。最後に同様な方程式は、 $g_1 = g$ と $g_{-1} = g'$ が異なるエネルギー E と E' を持ち、二つのレーザー光が遷移 $g \leftrightarrow e_0$ と $g' \leftrightarrow e_0$ をそれぞれ励起する異なる周波数 ω_L, ω'_L を持つような状況においても適用することができる。 $E + \hbar\omega_L = E' + \hbar\omega'_L$ 、すなわち二つのレーザー光の離調が等しい時に蛍光は止まり、 ω_L, E, E' を固定して ω'_L がわずかに変化した時、または ω_L と ω'_L を固定して、 $E - E'$ がわずかに変化した時に再び蛍光が現れる。このような現象は”コヒーレントポピュレーショントラッピング”と呼ばれ、これは 2 モードのレーザー光が照射された磁場勾配中のナトリウム原子において初めて観測された [75]。対応するゼーマン効果の空間的な変化によって、ナトリウムのセルの蛍光はレーザー光線に沿ったある点、すなわち二つの異なる超微細準位に属する二つのゼーマン副準位が二つのレーザー光の周波数差に等しい大きさに分裂している所においてこれが消えることになる。

10.6.2 全蛍光発光率の速度依存性

ここでコヒーレントポピュレーショントラッピングのより定量的な記述を与える。始状態 g_1 および g_{-1} から達することが可能な励起状態のゼーマン副準位は r_0 だけなので (図 10.2b を見よ)、全

蛍光発光確率 R_F は

$$R_F = \Gamma \sigma_{e_0 e_0} \quad (10.44)$$

と与えられる。式 (8.28) によれば、 e_0 の分布数 $\sigma_{e_0 e_0}$ は基底状態の密度行列を用いて表すことができる。式 (8.28)、(10.4)、(10.5) および図 10.2b の Clebsch-Gordan 係数を用いて、

$$R_F = \frac{\Gamma'}{4} [\Pi_1 + \Pi_{-1} - 2C_r] = \frac{\Gamma'}{4} (1 - 2C_r) \quad (10.45)$$

が得られる。

C_r を評価するため、式 (10.25b) に戻る。定常状態においては $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ と C_i は比例関係にあることを既に学んでいる (式 (10.29))。このため最後の二つの式は C_r と C_i のみを結合させ、これによって C_r の定常値を計算することが可能になる。

$$C_r = \frac{1}{2} \frac{4\delta'^2 + \Gamma'^2}{4\delta'^2 + \Gamma'^2 + 64k^2v^2} \quad (10.46)$$

これは式 (10.45) に代入することにより、

$$R_F(v) = \Gamma' \frac{16k^2v^2}{4\delta'^2 + \Gamma'^2 + 64k^2v^2} \quad (10.47)$$

となる。式 (10.47) より R_F が $v = 0$ の時にゼロになることが明らかである。そして v が増加するとこれも振幅 $\Gamma'/4$ で半値半幅

$$\Delta v = \frac{\sqrt{4\delta'^2 + \Gamma'^2}}{8k} \quad (10.48)$$

の反転ローレンツ曲線の様に増加する。この幅は I_L が減少すると I_L と共に減少する。 $v \ll \Delta v$ に対しては R_F は

$$v \ll \Delta v \rightarrow R_F(v) \simeq 16k^2v^2 \frac{\Gamma'}{4\delta'^2 + \Gamma'^2} = \frac{8k^2v^2\Gamma}{\Omega_1^2} \quad (10.49)$$

の様に変化し、これは離調 δ にはもはや依存しない (式 (10.5) と、それぞれの光に対するラビ周波数 Ω_1 による s_0 の定義を用いた)。

先の計算と同様の光ブロッホ方程式を基にした計算がコヒーレントポピュレーショントラッピングが発見された直後に行われた [76]。ここで紹介した状態 $|\psi_A\rangle$ と $|\psi_S\rangle$ に似た結合および非結合状態を用いたドレスド原子による解釈もまた与えられている (例えば文献 [77] と [78] を見よ)。

10.6.3 原子の運動にもたらされる結果

原子の外部自由度のダイナミクスに戻る。平均摩擦力はゼロになるが、蛍光発光確率 R_F が $v = 0$ 近傍で v に対して急激に変化する事は原子の運動に興味深い結果をもたらす。

最初に、運動量拡散係数も $v = 0$ 近傍で v に対して急激に変化し、 $v \rightarrow 0$ の時にはゼロに近づく。これはこのような現象が蛍光サイクルによってランダムな運動量交換を行う事によるからである。

先の全ての議論において、固定の速度 v を持つ原子を考え、 v の変化を無視してきた。これはレーザー冷却の半古典的な取り扱いにおいては普通のことである。この場合、固定の v に対する摩擦および拡散係数を計算している。実際には蛍光サイクルの後のランダムな運動量変化によって、原子

の速度は速度空間においてランダムウォークを行う。通常の扱いにおいては無い、ここで新たに現れる重要な新しい性質は、このようなランダムウォークは蛍光発光確率の強い速度依存性によって大きな摂動を受けるということである。

次の章において、このような速度に依存するランダムウォークから非常に狭い速度分布、すなわち非常に低温の原子を得るための新しい方法がいかにして与えられるかを見てみることにする。

第11章 反跳限界以下のレーザー冷却

11.1 はじめに

11.1.1 単一光子の反跳限界

先の章で記述した全ての冷却機構は原子の速度を減衰させる摩擦力を基にしている。自然放出過程が原子の外部自由度から取ったエネルギーを散逸する事にも基本的な役割を果たしている。例えば、シシフォス冷却においては、強い強度 (7章) または弱い強度 (9章) のどの場合においても、原子がポテンシャルを上る時、自発的なアンチストークス・ラマン過程が原子から得られたポテンシャルエネルギーの増加 (原子の運動エネルギーの減少を伴う) を散逸させている。ドップラー冷却および $\sigma^+ - \sigma^-$ 配置の偏光勾配冷却に対しては、自然放出光のドップラーシフトは青色に (高い方に) シフトしており、これによってエネルギーの散逸が説明できる (文献 [63] の 3.B.6 項の議論を見よ)。

これら全ての冷却機構においては蛍光サイクルは決して止まらないため、自然放出光および対応する単一光子の反跳エネルギー

$$E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = k_B T_R \quad (11.1)$$

によるランダムな反跳は避けるのは不可能であるように思われる。式 (11.1) によって定義された温度 T_R は単一光子の反跳限界と呼ばれ、これは自然放出を用いたどの冷却過程に対しても基本的な限界として現れる。対応する速度

$$v_R = \frac{\hbar k}{M} \quad (11.2)$$

は反跳速度と呼ばれる。共鳴線によるナトリウム原子の冷却の場合、 $T_R \simeq 2.4\mu\text{K}$ 、 $v_R \simeq 3\text{cm/s}$ となる。セシウムの場合、 $T_R \simeq 0.13\mu\text{K}$ 、 $v_R \simeq 3\text{mm/s}$ となり、 $\lambda = 1.08\mu\text{m}$ の $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ 遷移によるヘリウム原子の冷却の場合にはこれは $T_R \simeq 4\mu\text{K}$ 、 $v_R \simeq 9\text{cm/s}$ となる。

11.1.2 速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピング

T_R 以下の温度を得るためには、極低温に冷却したい原子に対しては自然放出過程を止めなくてはならない事が先の議論より明らかである。これから 9.6 節で議論した $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移と $\sigma^+ - \sigma^-$ レーザー光配置における現象を用いる事が示唆される。この場合、速度がゼロの原子に対しては蛍光確率 R_F はゼロになり (式 (10.47) と (10.49) を見よ)、これは原子が基底状態の副準位の線形結合の吸収が無いトラッピング状態として現れる状態に光ポンピングされるからである。このトラップは $v = 0$ に対しては完全で、 v が増加すると徐々に完全ではなくなる。このためこのような現象は速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピングと呼ばれる。これは非常に低い速度を持つ極低温原子を選択し、自然放出の”悪い”効果を防ぐ。

実際に冷却を達成するには、 $v = 0$ を中心に速度分布を圧縮する必要もある。この冷却には、ここでは $v = 0$ 近傍の狭い速度範囲 δv にある原子の蛍光確率を消失する速度選択機構だけでは不十分である。この速度範囲における原子密度を増加することも必要である。

11.1.3 速度空間における光ポンピング

吸収光子による原子への運動量の移行と、蛍光光子による原子から運動量が持ち去られることにより、各蛍光サイクル後には原子の運動量にはランダムな変化がある。 $v > \delta v$ の原子がこのようなサイクルを経験し、 $v < \delta v$ になってこれが終わる事が起こりうる。このため運動量拡散は速度空間における光ポンピング過程とみなすことができ、光子の吸収によって原子はある速度グループから吸収が無い $v = 0$ 付近の速度範囲 δv の領域に移る。この速度範囲においては原子は相互作用時間 θ にはこの状態にトラップされて続け、そして原子はだんだん溜まって速度分布に狭いピークを形作る。

ここで述べた新しい冷却機構は最初に文献 [79] および [80] において提案および実演されたが、これは他の冷却機構と根本的に異なっている。なぜならこれは摩擦ではなく、運動量拡散と速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピングとを組み合わせたものを基にしたものである*。次の節においてこの冷却限界が相互作用時間 θ によってのみ与えられる事が示される。もう一つの重要な性質はこれがレーザー光の離調に依存しないことである。

11.1.4 半古典論的な扱いの誤り

10 章で示した半古典的な扱いはレーザー光中で非常に良く局在している原子を扱っている。例えば、式 (10.13a) において“ z において静止した”原子に対して導入し、 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対しては吸収が無い状態である (式 (10.15b) を見よ)、状態 $|\psi_S\rangle$ は、その重心が z を中心として良く局在した波束によって表される原子に対する内部状態のことを指している。このような波束の時間発展は完全に量子力学的には必ずしも記述する必要はない。式 (10.13a) において z は固定のパラメータとみなされている。もし原子が速度 v で動いていると、 z は複素数 vt に置き換えられる (式 (10.18) を見よ)。

もし冷却機構によって原子の運動量広がり δp が $\hbar k$ 以下に減少される、すなわち単一光子の反跳限界以下のレーザー冷却の場合においては、空間的なコヒーレンス長 $\xi_A \sim \hbar/\delta p$ はレーザー波長よりも長くなり、原子はもはやレーザー光中に良く局在しているとはみなせなくなる。このため全ての自由度に対する完全な量子力学的な扱いが必要になる。このような扱いを次の項に示す。吸収が無い状態が引き続き式 (10.13a) によって与えられ、 $\psi_S(z)$ がもはや z に局在する単一の波束の内部状態ではなく、2 成分の z の波動関数になる事が分るだろう。

11.2 1次元の量子論的な扱い

ここでは $\sigma^+ - \sigma^-$ レーザー光配置と $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移を考える。

*またこれは並進運動の空間における光ポンピングを、トラップ内の速度選択的なりサイクリングによる反跳限界以下の並進運動の自由度に対する冷却に用いたと言えるかもしれない [81]。

11.2.1 レーザー光と結合しない原子の量子状態

ここで原子の状態は二つの量子数、一つは内部状態に対して、もう一つは外部状態に対する量子数によってラベルされるとする。10章(10.4.2項の終わりを見よ)において既に $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移に対して関連する内部状態は基底状態の g_1 と g_{-1} 、励起状態の e_0 だけであることを見てきた。外部状態を記述するために、今後 z 軸に沿った運動量 p を用いることにし、例えば $|g_1, p\rangle$ は原子が g_1 状態にいて、 z 軸方向の運動量 p であることを表す。

原子の外部自由度が量子化されると、レーザー電場 $E_L(z, t)$ の式(10.1)に現れる重心の座標 z は演算子 Z になる。レーザー-原子の相互作用ハミルトニアン(8.4)は式(10.2)、 \mathcal{E}_0 のラビ周波数 Ω_1 、そして図10.2bの Clebsch-Gordan 係数を用いて

$$V_{AL} = \frac{\hbar\Omega_1}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikZ} |e_0\rangle \langle g_{-1}| + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ikZ} |e_0\rangle \langle g_1| \right] e^{-\omega_L t} + h.c. \quad (11.3)$$

と書き表される。式(11.3)に現れる演算子 $e^{\pm ikZ}$ は運動量空間における並進運動演算子であるため、

$$V_{AL} |g_{-1}, p\rangle = -\frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} e^{-\omega_L t} |e_0, p + \hbar k\rangle, \quad (11.4a)$$

$$V_{AL} |g_{+1}, p\rangle = +\frac{\hbar\Omega_1}{2\sqrt{2}} e^{-\omega_L t} |e_0, p - \hbar k\rangle. \quad (11.4b)$$

となる。式(11.4a)の解釈は非常に明解である。 g_1 から始まって、原子は光子を吸収して e_0 にのみ励起され、この光子は σ^+ である必要がある(角運動量保存)。この σ^+ 光子は z 軸を正の方向に進み(図10.1)、このため運動量 $+\hbar k$ を運び、これは吸収過程において原子に移行する。このため原子の運動量は p から $p + \hbar k$ に変化する。式(11.4b)も同様に考えることができる。

式(11.4)より、状態

$$|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g_{-1}, p - \hbar k\rangle + |g_{+1}, p + \hbar k\rangle], \quad (11.5)$$

を新たに導入する事が示唆される。これはレーザー光とは結合せず、

$$V_{AL} |\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{4} e^{-\omega_L t} [-|e_0, p\rangle + |e_0, p\rangle] = 0 \quad (11.6)$$

であるからである。 $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ および $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ から始まり両方とも同じ終状態 $|e_0, p\rangle$ で終わる二つの吸収の確率振幅は干渉して互いに打ち消し合う。式(11.5)と(11.6)は先の章における外部自由度が量子化されていない式(10.13b)と(10.15b)を一般化する。式(11.5)において線形結合されている二つの状態には異なる原子の運動量 $p - \hbar k$ と $p + \hbar k$ が現れる。これは g_{-1} または g_1 にいる原子によって吸収される光子は反対方向の運動量 $+\hbar k$ および $-\hbar k$ を持つことによる。終状態は二つの経路に対して同じである必要があるため、 g_{-1} と g_1 に対応する二つの始状態は $2\hbar k$ だけ異なる運動量を持っている必要がある。

また状態

$$|\psi_C(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [-|g_{-1}, p - \hbar k\rangle + |g_{+1}, p + \hbar k\rangle], \quad (11.7)$$

を導入することも、もちろん可能で、これはすなわち $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ と $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ の線形結合で、非結合状態(11.5)と直交する状態である。このような状態に対しては、 $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ および $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$

から始まり、終状態 $|e_0, p\rangle$ で終わる二つの吸収の確率振幅は干渉して打ち消し合う代わりに互いに強め合う。このためこれらの状態はレーザー光と結合する。

$$V_{AL}|\psi_C(p)\rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{2}e^{-\omega_L t}|e_0, p\rangle \quad (11.8)$$

V_{AL} が $|e_0, p\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ だけを結合することは簡単に確認できる。

$$V_{AL}|e_0, p\rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{2}e^{-\omega_L t}|\psi_C(p)\rangle \quad (11.9)$$

このため V_{AL} のゼロでない行列要素は

$$\langle e_0, p|V_{AL}|\psi_C(p)\rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{2}e^{-\omega_L t} = \langle \psi_C(p)|V_{AL}|e_0, p\rangle^* \quad (11.10)$$

だけである。

11.2.2 原子の運動によって誘起される結合

原子の外部自由度が量子化されると、原子のハミルトニアン H_A は重心の運動エネルギーを表す H_A^{ext} の寄与が含まれる。式 (2.2) を多準位原子に対して一般化した式は

$$H_A = H_A^{ext} + H_A^{int} = \frac{P^2}{2M} + \hbar\omega_A P_e \quad (11.11)$$

で、ここで P_e は励起状態のゼーマン副準位の空間への射影である。これはここで基底状態のゼーマン副準位が全て同じ内部エネルギーで値がゼロを持っていると仮定しているからである。式 (11.11) において P は z 軸方向の運動量演算子で、これはこの節では一次元に限定しているからである。

状態 $|g_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$ は H_A

$$H_A|g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle = \frac{(p \pm \hbar k)^2}{2M}|g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle \quad (11.12)$$

の固有状態で、対応する固有値は原子の運動量 $p \pm \hbar k$ に対する運動エネルギーである。式 (11.12) より、

$$\begin{aligned} H_A|\psi_{NC}(p)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(p - \hbar k)^2}{2M}|g_{-1}, p - \hbar k\rangle + \frac{(p + \hbar k)^2}{2M}|g_1, p + \hbar k\rangle \right] \\ &= \left(\frac{p^2}{2M} + E_R \right) |\psi_{NC}(p)\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\psi_C(p)\rangle, \end{aligned} \quad (11.13a)$$

$$H_A|\psi_C(p)\rangle = \left(\frac{p^2}{2M} + E_R \right) |\psi_C(p)\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle, \quad (11.13b)$$

に帰着される。このような結果は H_A が二つの状態 $|\psi_C(p)\rangle$ 、 $|\psi_{NC}(p)\rangle$ に対して同じ量 $(p^2/2M) + E_R$ だけエネルギーをシフトすることを示しており、ここで E_R は式 (11.1) で与えられている反跳エネルギーである。また H_A はこらら二つの状態間に”運動による結合”

$$\langle \psi_C(p)|H_A|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{\hbar k p}{M} \quad (11.14)$$

をもたらす、これは速度 p/M に関連するドップラーシフト $k p/M$ に等しい角周波数によって特徴づけられる。

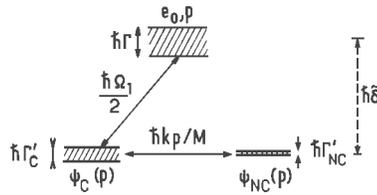


図 11.1: グループ $\mathcal{F}(p)$ の三つの状態 $|e_0, p\rangle$ 、 $|\psi_C(p)\rangle$ と $|\psi_{NC}(p)\rangle$ の間の各結合。 $|e_0, p\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ (または $|\psi_{NC}(p)\rangle$) の間のエネルギー間隔は $-(\hbar\delta + E_R) = -\hbar\tilde{\delta}$ である (V_{AL} の時間依存を取り除いた後)。二つの状態 $|e_0, p\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ は H_A (行列要素 $\hbar kp/M$) によって結合される。 V_{AL} と H_A が無い場合、グループの中で比較的不安定な状態は唯一 $|e_0, p\rangle$ である (自然幅または緩和率 Γ)。 V_{AL} および H_A によって $|\psi_C(p)\rangle$ と $|\psi_{NC}(p)\rangle$ には $|e_0, p\rangle$ が混ざるため、二つの状態 $|\psi_C(p)\rangle$ と $|\psi_{NC}(p)\rangle$ もまた有限の幅または緩和率を持ち、これは Γ'_C および Γ'_{NC} と記す。

11.2.3 自然放出による減衰率

自然放出を無視する限り、三つの状態 $|e_0, p\rangle$ 、 $|g_1, p + \hbar k\rangle$ 、 $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ は三次元の部分空間、もしくはグループを形成し、ここではこれを $\mathcal{F}(p)$ と名づける。これは原子-レーザー間の結合 V_{AL} と原子のハミルトニアン H_A の効果の下でも安定なままである。自然放出が無いと、最初に $\mathcal{F}(p)$ に属していた原子の状態は $\mathcal{F}(p)$ から離れない。 $|\psi_C(p)\rangle$ と $|\psi_{NC}(p)\rangle$ は $|g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle$ の線形結合であるので、 $\mathcal{F}(p)$ もまた三つの直交する状態 $|e_0, p\rangle$ 、 $|\psi_C(p)\rangle$ 、 $|\psi_{NC}(p)\rangle$ によって作られると考えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p) &= \{|e_0, p\rangle, |g_{+1}, p + \hbar k\rangle, |g_{-1}, p - \hbar k\rangle\} \\ &= \{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

図 11.1 にこれら三つの状態とこれらの中に存在する V_{AL} ($|e_0, p\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$) の間の行列要素 $\hbar\Omega_1/2$ と H_A ($|\psi_C(p)\rangle$ と $|\psi_{NC}(p)\rangle$) の間の行列要素 $\hbar kp$ による各種の結合を表す。変換式 (8.19) を用いることにより (またはレーザーモードを量子化することにより)、式 (11.3) に現れる指数関数 $\exp(\pm i\omega_L t)$ を消去した。この変換式は ω_A を $\omega_A - \omega_L = -\delta$ に置き換えることになる。 $\mathcal{F}(p)$ の三つの状態の非摂動エネルギーに H_A の対角要素が含まれているとすると、 $|e_0, p\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ (または $|\psi_{NC}(p)\rangle$) の間のエネルギー間隔は $-\hbar\delta$ になり、ここで

$$\hbar\tilde{\delta} = \hbar\delta + E_R. \quad (11.16)$$

である。

この項では自然放出によって $\mathcal{F}(p)$ から離れる確率を調べる。もし V_{AL} と H_A を無視すると、 $\mathcal{F}(p)$ の放射遷移により不安定な状態は $|e_0, p\rangle$ で、これは二つの基底状態の副準位 $|g_1\rangle$ と $|g_{-1}\rangle$ のどれからも実際の* 自然放出過程が起きないからである。 $|e_0, p\rangle$ から離れる確率は $|e_0, p\rangle$ の自然幅 Γ に等しい。 $\mathcal{F}(p)$ に属する初期状態の減衰の確率振幅にのみ興味があり、自然放出による緩和によって

* 式 (2.1) に現れる原子-真空場間の相互作用ハミルトニアン V_{AV} に回転波近似を行わない場合には、光子は仮想的には g_1 および g_{-1} から放出および再吸収されると考えられる。これらの“仮想的な”過程は g_1 と g_{-1} のエネルギーシフトを引き起こし、このシフトの大きさは V_{AV} の回転不変性の結果、二つの準位に対して同じになる。これらの g_1 と g_{-1} のラムシフト、同様に e_0 のラムシフトはここでは原子の周波数 ω_A に含まれていると仮定することができる。

移る終状態には興味がないとすると、 $\mathcal{F}(p)$ の中の量子力学的な時間発展は $|e_0, p\rangle$ のエネルギーに虚数部 $-i\hbar\Gamma/2$ を単に加えるだけで正しく記述されることが示される*。このため $\mathcal{F}(p)$ の中の量子力学的な時間発展は次に示す 3×3 の非エルミートの有効ハミルトニアンによって支配される。

$$H_{eff} = \hbar \begin{pmatrix} -\tilde{\delta} - i\Gamma/2 & \Omega_1/2 & 0 \\ \Omega_1/2 & 0 & kp/M \\ 0 & kp/M & 0 \end{pmatrix} \quad (11.17)$$

これは一般には異なる虚数部を持つ三つの複素数の固有値を持つ。このことは通常、 $\mathcal{F}(p)$ から三つの異なる自然放出による緩和モードがあることを意味する。ここではこれら三つのモードの物理的な意味を摂動計算の極限において議論したい。これは V_{AL} と H_A による結合 $\hbar\Omega_1/2$ と $\hbar kp/M$ が十分小さい極限である。

最初に特に $p = 0$ の場合を考える。図 11.1 より状態 $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$

$$|\psi_{NC}(p=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|g_{-1}, -\hbar k\rangle + |g_{+1}, +\hbar k\rangle] \quad (11.18)$$

が完全に他の二つの状態から孤立していることは明らかである。これは $p = 0$ に対しては $|\psi_{NC}(p)\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ の間の結合 $\hbar kp/M$ はゼロになるからである。これは $t = 0$ において $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$ に置かれた原子は無限にこの状態に残り続けることを意味する。このため式 (11.18) で与えられる状態 $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$ は完全なトラップである。 $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$ から離れる確率 $\Gamma'_{NC}(p=0)$ は厳密にゼロである。

$$\Gamma'_{NC}(p=0) = 0 \quad (11.19)$$

他の二つの $\mathcal{F}(p)$ から離れる確率は式 (11.17) を用いることにより見出され、これは $p = 0$ の時には二つの部分行列に分解され、一つは 1×1 の部分行列で $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$ に対応するもので、もう一つは部分空間 $\{|e_0, p=0\rangle, |\psi_C(p=0)\rangle\}$ 中の 2×2 の部分行列

$$\hbar \begin{pmatrix} -\tilde{\delta} - i\Gamma/2 & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

である。もし

$$\Omega_1 \ll \sqrt{\tilde{\delta}^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (11.21)$$

すなわち $\Omega_1 \ll \Gamma$ または $\Omega_1 \ll |\tilde{\delta}|$ の場合、式 (11.20) の固有値は摂動計算によって見出される。 $\Omega_1 \rightarrow 0$ のときにゼロになる固有値は良く知られた二次の摂動の式によって与えられる。

$$\frac{(\hbar\Omega_1/2)^2}{\hbar(\tilde{\delta} + i(\Gamma/2))} = \hbar \left(\delta'_C - i\frac{\Gamma'_C}{2} \right) \quad (11.22)$$

ここで

$$\Gamma'_C = \Gamma \frac{(\Omega_1/2)^2}{\tilde{\delta}^2 + (\Gamma^2/4)}, \quad (11.23a)$$

$$\delta'_C = \tilde{\delta} \frac{(\Omega_1/2)^2}{\tilde{\delta}^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (11.23b)$$

*このような結果を示す可能な方法は、 $\mathcal{F}(p)$ の三つの状態によって作られる部分空間の中での分解演算子の制限を調べることである

である。このような結果は、 V_{AL} の効果のもとでは状態 $|\psi_C(p=0)\rangle$ は $\hbar\delta'_C$ だけ光シフトし、有限の幅 Γ'_C を持ち、これは $|\psi_C(p=0)\rangle$ からの光子の散乱確率とみなすことができることを意味する。この $|\psi_C(p=0)\rangle$ から離れる確率は明らかに V_{AL} によって $|\psi_C(p=0)\rangle$ に $|e_0, p=0\rangle$ が混ざる事による。式 (11.20) の他の固有値は $-\hbar\tilde{\delta} - i\hbar\Gamma/2$ に非常に近い。

ここで p がゼロではないが、しかし非常に小さいものと仮定する。より正確には、 $|\psi_{NC}(p)\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ の間の結合 $\hbar kp/M$ は光シフトまたは先の計算で $p=0$ とおいた $|\psi_C(p)\rangle$ の幅に比べて非常に小さいと仮定する。

$$\frac{k|p|}{M} \ll |\delta'_C| \quad \text{または} \quad \Gamma'_C \quad (11.24)$$

このため、式 (11.17) の三つの固有値の内の二つは式 (11.20) の二つの固有値、すなわち $-\hbar\tilde{\delta} - i\hbar(\Gamma/2)$ と $\hbar\delta'_C - i\hbar\Gamma'_C/2$ に非常に近い。三番目の固有値に対しては、二次の摂動論を H_A に誘導された $|\psi_{NC}(p)\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ の間の結合 $\hbar kp/M$ に適用することによりこれが得られる。この結合は V_{AL} によって誘導された $|\psi_C(p)\rangle$ と $|e_0, p\rangle$ の間の結合 $\hbar\Omega_1/2$ からきたものである。このようにして式 (11.23) を用いて

$$\frac{(\hbar\Omega_1/2)^2}{\hbar(-\delta'_C + i(\Gamma'_C/2))} = \hbar \left(\delta'_{NC} - i\frac{\Gamma'_{NC}}{2} \right) \quad (11.25)$$

が得られ、ここでは

$$\delta'_{NC}(p) = \frac{(kp/M)^2}{\delta_C'^2 + (\Gamma_C'^2/4)} \delta'_C = \frac{4k^2 p^2}{M^2 \Omega_1^2} \tilde{\delta}, \quad (11.26a)$$

$$\Gamma'_{NC}(p) = \frac{(kp/M)^2}{\delta_C'^2 + (\Gamma_C'^2/4)} \Gamma'_C = \frac{4k^2 p^2}{M^2 \Omega_1^2} \Gamma \quad (11.26b)$$

である。式 (11.25) において $\hbar\delta'_{NC}(p)$ は $|\psi_{NC}(p)\rangle$ の光シフトで、一方、 $\Gamma'_{NC}(p)$ は $|\psi_{NC}(p)\rangle$ から、より正確には式 (11.17) の固有状態 $|\psi_{NC}(p)\rangle$ から離れる確率で、これは $p \rightarrow 0$ の時には $|\psi_{NC}(p)\rangle$ になる ($|\psi_{NC}(p)\rangle$ は (11.15) の三つの状態の線形結合で、この場合、 $|\psi_{NC}(p)\rangle$ は最も大きなウェイトを占める)。ここではまた $|\psi_{NC}(p)\rangle$ から離れる確率は $|\psi_{NC}(p)\rangle$ に $|e_0, p\rangle$ が混ざる事による。しかしこの混合はここでは二つの混合からくるものである：一つは V_{AL} による $|\psi_C(p)\rangle$ と $|e_0, p\rangle$ の間の混合で、これは $|e_0, p\rangle$ が少し混ざった摂動状態 $|\psi_C(p)\rangle$ を引き起こし、もう一つは H_A による $|\psi_{NC}(p)\rangle$ と $|\psi_C(p)\rangle$ の混合である。

式 (11.26b) より、 p が小さいときには離れる確率 $\Gamma'_{NC}(p)$ は非常に小さく、 $p=0$ の時にはゼロになることが明らかである*。これは時間 $t=0$ において $|\psi_{NC}(p)\rangle$ にある原子は p が十分小さいと非常に長い時間、 $(\Gamma'_{NC}(p))^{-1}$ の時間程度この状態に留まる事ができる事を意味する。逆に言えば、任意の相互作用時間 Θ の間、 $p=0$ 付近の p に対する範囲 δp を得ることができる。これは、もし $|p| < \delta p$ のとき、 $|\psi_{NC}(p)\rangle$ にある原子は全相互作用時間 Θ の間、高い確率で $|\psi_{NC}(p)\rangle$ にトラップし続けるようなものである。対応する δp の値は条件

$$\Gamma'_{NC}(\delta p)\Theta < 1 \quad (11.27)$$

によって与えられる。これから式 (11.26b) を用いて

$$\delta p < \frac{M}{2k\sqrt{\Gamma}} \frac{\Omega_1}{\sqrt{\Theta}} \quad (11.28)$$

*自然放出減衰率 $\Gamma'_{NC}(p)$ は式 (10.49) に見出される半古典的な蛍光確率 $R_F(v=p/M)$ の半分に等しい。係数 $1/2$ は定常状態においては状態 $|\psi_C(p)\rangle$ もまた分布しており、これも等しく蛍光発生率に寄与する事による。

が導かれる。

こうして先の解析は速度選択的な機構を示している。 $|p| < \delta p$ の状態 $|\overline{\psi_{NC}(p)}\rangle$ の集合は自然放出の”悪い”影響から保護されているとみなすことができ、これは相互作用時間 θ の間はこのような状態からの減衰(緩和)過程が非常に希であることによる。このため 10.6 節において半古典論によって紹介した速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピングの現象の完全な量子力学的な記述を与える事が可能になった。ここで正しいトラップ状態は内部状態 g_1 と g_{-1} の違いだけでなく、 g_+ に対しては運動量 $p + \hbar k$ 、 g_{-1} に対しては $p - \hbar k$ と運動量が違う状態の重ね合わせになることが分る。また δp は好きなだけ小さく、特に $\hbar k$ よりも小さくすることが θ を十分長くすることによって可能であることが分かり、これは式 (11.28) より δp が $1/\sqrt{\theta}$ のように変わるからである。

11.2.4 異なる状態グループ間の自然放出による移動

先の項において、原子が自然放出によってどのようにして $\mathcal{F}(p)$ のグループから離れるのかを学んだ。ここで原子が自然放出過程の後に新しいグループに移る事を示す。この運動量空間における拡散は $|p| \ll \delta p$ のトラップ状態 $|\overline{\psi_{NC}(p)}\rangle$ に原子を移す事に対して重要なものである。

時間 t において $\mathcal{F}(p)$ のケットベクトル $|\psi(t)\rangle$ によって記述される状態にある原子は z 軸方向に $\hbar k_z = u$ の成分を持つ運動量 $\hbar k$ の光子を自然放出する。このような放出は $|\psi(t)\rangle$ が不安定状態 $|e_0, k\rangle$ を含む場合にのみ可能である。一時的に原子の運動量に対して、 p の z 軸方向の成分 p だけでなく、ベクトル p を用いる。自然放出過程の直後では、原子は自然放出された光子の方向 k と偏光によって決まる $|g_1, p - \hbar k\rangle$ と $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ の線形結合状態にある。もし原子の運動量の x と y 成分には興味がないとすると、すなわち最終的な密度行列をこれらの量子数に対して $\hbar k_z = u$ を一定にしてトレースをとると、そして放出光子の偏光の平均および k の方位方向の平均をとるとすると、最終的な原子の密度行列は $|g_1, p - u\rangle$ と $|g_{-1}, p - u\rangle$ を同じ重みで統計的な混合を行ったものになることが見出される。このような結果は z 軸方向の全運動量保存の明確な現れである。

図 11.2 は $\mathcal{F}(p)$ の三つの状態 $|g_1, p + \hbar k\rangle$ 、 $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ と $|e_0, p\rangle$ と二つの可能な終状態 $|g_1, p - u\rangle$ (a) と $|g_{-1}, p - u\rangle$ (b) を表し、これは z 軸方向に運動量 u を持つ光子を自然放出した後に得られる統計的混合状態である。式 (11.5) より、 $|g_1, p - u\rangle$ は $\mathcal{F}(p - \hbar k - u)$ に属し、一方 $|g_{-1}, p - u\rangle$ は $\mathcal{F}(p + \hbar k - u)$ に属す。 u は $-\hbar k$ と $\hbar k$ の間の任意の値をとりうるので、これは自然放出による移動は $p - 2\hbar k \leq p' \leq p + 2\hbar k$ の範囲で $\mathcal{F}(p)$ から $\mathcal{F}'(p)$ へ起こることが示される。

この項の結果と先の結果を組み合わせると、原子の時間発展のモンテカルロシミュレーションを行うことができる。自然放出過程の直後には原子の状態、例えば状態 $|g_1, p - u\rangle$ または $|g_{-1}, p - u\rangle$ であることを知ることができる。この初期状態とこの初期状態のグループに相当する有効ハミルトニアン (11.17) を知ることにより、時間 t 後に、次の自然放出が起きる確率を計算することができる。このような過程が起ると、新しい原子の初期状態と新しいグループを知り、これが繰り返される。ここで概略を示した計算と間欠的な蛍光や量子ジャンプの現象を解釈するのに用いられる遅延関数の計算との間にはある類似点がある(文献 [37] と [2] の VI 章 E.3.c 項を見よ)。二つの計算において、同じ原子から 2 個連続して放出される光子の間の遅延時間の分布を計算し、非常にゆっくりとした減衰確率が存在することによって蛍光が非常に長い時間止まる事を説明している。このような解析によって、またトラップ状態 $|\overline{\psi_{NC}}\rangle$ に入る機構をも説明している。自然放出直後、原子は例えば $|g_1, p - u\rangle$ にいるとする。これは $|g_1, p - u\rangle$ が属するグループ $\mathcal{F}(p - u - \hbar k)$ に相当する有効ハミルトニアンの三つの固有状態の線形結合である。しかしこれら三つの状態は全く異なる確率

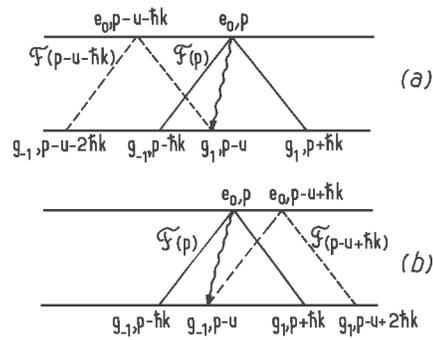


図 11.2: 自然放出によるグループ間の移動。 $\mathcal{F}(p)$ に属する $|e_0, p\rangle$ から始まり、原子は z 軸方向の運動量 u の光子を自然放出することによって、 $\mathcal{F}(p-u-\hbar k)$ に属する $|g_1, p-u\rangle$ (a) に移るか、もしくは $\mathcal{F}(p-u+\hbar k)$ に属する $|g_{-1}, p-u\rangle$ (b) に移る。

で減衰するため、十分長い時間たっても自然放出過程が起きないとすると、初期状態はふるいにかけられ、 $|\psi_{NC}(p-\hbar k-u)\rangle$ に帰着する。最後にここでの解析と文献 [37] におけるそれとの重要な違いを記す。ここでは自然放出に続く運動量変化を考慮している。ゆっくりとした減衰確率は p に非常に敏感であるため (式 (11.26b) を見よ)、蛍光が止まる暗時間の長さは時間発展の間に顕著に変化することになる。最近、このようなモンテカルロシミュレーションが行われている [88]。

11.2.5 期待される最終的な運動量分布

状態 $\psi_{NC}(p)$ にいる原子を考える。このような状態は原子の運動量演算子 P の成分 P_z の固有状態ではない。式 (11.5) によれば、 $\psi_{NC}(p)$ にいる原子の P_z の観測値は等しい確率で二つの可能な値 $p-\hbar k$ と $p+\hbar k$ となる。相互作用時間 θ の後に、多くの割合の原子が $|p| \ll \delta p$ の状態 $\overline{\psi_{NC}(p)}$ (これは $\psi_{NC}(p)$ に非常に近い) にトラップされることになり、ここで δp は式 (11.28) によって θ と関係している。このため最終的な原子の運動量分布に (すなわち相互作用時間 θ 後に) $+\hbar k$ と $-\hbar k$ を中心に、それぞれ幅 δp を持つ二つのピークが期待される。もし θ が十分長くて δp が $\hbar k$ より小さければ、これら二つのピークは完全に分離されることが期待される。 θ を増加することはこれらのピークの幅を減少させることになり、そしてうまく行けばそれらの重みも増加する事となる。これは原子が運動量空間において $p=0$ に向かって拡散する時間がより長くなるからである。

これらの予想は全て量子力学的な運動方程式の数値積分によって定量的に確かめられている* [80]。興味ある読者はこのような計算の詳細とその結論が文献 [80] に見出せるだろう。特に、 $\pm\hbar k$ の二つのピークの幅 δp は $\Omega_1/\sqrt{\theta}$ のように変化するという (11.28) の予想は非常に良く確かめられている。ここで量子力学的な運動量方程式 5.3.3 項の様に結合した Fokker-Plank 方程式には変換不可能であることを記しておく。原子の運動量分布には幅 δp の鋭いピークがあり、この幅は $\hbar k$ よりも小さくなりうることから、密度行列要素を $\hbar k/\delta p$ のべきで展開することはもはや不可能である。

最後にこの節で示した種類の一次元のレーザー冷却は準安定状態の ^4He 原子線において最近、実現されていることをここに記しておく [79]。二つの対向する σ^+ と σ^- のレーザー光線が直交する

*しかし長い相互作用時間の極限におけるピークの重みの時間発展の問題はまだ未解決である

^4He の原子ビームの $\lambda = 1.08\mu\text{m}$ の $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1$ 遷移を励起する。最終的な運動量分布において $\hbar k$ 以下の幅 δp の二つのピーク構造が観測され、これは一次元の温度 $2\mu\text{K}$ に相当し、 ^4He のこの遷移の反跳限界に相当する $4\mu\text{K}$ よりも小さい。

11.3 高次元への一般化

この最後の節においては先の節で解析した一次元の冷却方法の高次元への拡張の可能性を示す。速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピングの二次元 [80, 82]、または三次元 [82, 83] への拡張に対するいくつかの提案が出されている。ここで文献 [83] に従い、特に $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移の場合に限定することにする。他の遷移は他の文献において考慮されている [84]。

11.3.1 吸収強度に対する等価式

二次元または三次元においては基底状態の副準位 g_0 と二つの励起状態のゼーマン副準位 e_{-1} と e_1 を無視することは不可能である。位置を用いた表記においては低準位 g の原子の量子状態 (内部および外部の両方) を表す最も一般的な波動関数は

$$\Psi_g(\mathbf{r}) = \psi_{-1}(\mathbf{r})|g_{-1}\rangle + \psi_0(\mathbf{r})|g_0\rangle + \psi_{+1}(\mathbf{r})|g_{+1}\rangle \quad (11.29)$$

と書き表される。実際、これは三つの成分からなる波動関数で、一つの波動関数 $\psi_m(\mathbf{r})$ は g の三つのゼーマン副準位 $|g_m\rangle$ にそれぞれ関連している。球座標における基底 $\{g_m\}$ からデカルト座標の基底へ変えることにより

$$\begin{aligned} |g_x\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|g_{+1}\rangle - |g_{-1}\rangle), \\ |g_y\rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(|g_{+1}\rangle + |g_{-1}\rangle), \\ |g_z\rangle &= +|g_0\rangle \end{aligned} \quad (11.30)$$

式 (11.29) は

$$\Psi_g(\mathbf{r}) = \psi_x(\mathbf{r})|g_x\rangle + \psi_y(\mathbf{r})|g_y\rangle + \psi_z(\mathbf{r})|g_z\rangle \quad (11.31)$$

に変換され、ここで $\phi_x(\mathbf{r})$ 、 $\phi_y(\mathbf{r})$ 、 $\phi_z(\mathbf{r})$ は回転によってベクトル場 $\psi_g(\mathbf{r})$ の三つの成分に変換される三つの波動関数である。

$$\psi_g(\mathbf{r}) = \{\psi_x(\mathbf{r}), \psi_y(\mathbf{r}), \psi_z(\mathbf{r})\} \quad (11.32)$$

同様の議論により上準位 e の最も一般的な量子状態はベクトル場 $\phi_e(\mathbf{r})$ によって記述される。

$$\phi_e(\mathbf{r}) = \{\phi_x(\mathbf{r}), \phi_y(\mathbf{r}), \phi_z(\mathbf{r})\} \quad (11.33)$$

ここで原子が状態 $\phi_g(\mathbf{r})$ から状態 $\phi_e(\mathbf{r})$ へ一個のレーザー光子の吸収によって励起される確率の振幅 \mathcal{A} を考える。このような振幅は初期および終状態 $\phi_g(\mathbf{r})$ および $\phi_e(\mathbf{r})$ だけに依存するわけではなく、レーザー電場 $\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r})$ にも依存し、これは $\phi_g(\mathbf{r})$ および $\phi_e(\mathbf{r})$ と同様にベクトル場である。 $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ 遷移の Clebsch-Gordan 係数より、

$$\mathcal{A} = \langle \Phi_e | V_{AL} | \Phi_g \rangle = C \int d^3r \psi_e(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \times \psi_g(\mathbf{r})] \quad (11.34)$$

が示され、ここで C は定数である。実際、二つのベクトル場 $\phi_g(\mathbf{r})$ と $\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r})$ から作られる唯一のベクトル場が $\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \times \psi_g(\mathbf{r})$ である事から、式 (11.34) の構造は簡単に理解することができる。

11.3.2 トラップ状態が存在する条件

先の節において得られた方法を思い返すと、ここで二つの一般的な条件を確認することができる。これは原子が g にいる状態 $\psi_g^T(\mathbf{r})$ をもし完全なトラップ状態にしたいとする場合、すなわち $t = 0$ において原子を $\psi_g^T(\mathbf{r})$ の状態ににすると、永久にこの状態に居続けるようににしたい場合に満足しなくてはならない条件である。

最初に、この状態はレーザー光の影響を受けない必要がある。より正確には、

$$V_{AL}|\Psi_g^T\rangle = 0 \quad (11.35)$$

となり、これは式 (11.6) を一般化する、または式 (11.34) よりこれは等価的に

$$\int d^3r \phi_e(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \times \psi_g^T(\mathbf{r})] = 0 \quad \forall \phi_e(\mathbf{r}) \quad (11.36)$$

となる。

二番目に、原子のハミルトニアン H_A は Ψ_g^T をレーザー光と結合しうる他のどんな状態とも結合させてはならない。このような条件は Ψ_g^T が H_A の固有関数でなくてはならない、または等価的に Ψ_g^T は H_A に関して定常状態である必要があることを暗に示唆している。磁場が無い時、 g の三つの副準位は同じ内部エネルギーを持つため、 Ψ_g^T が H_A の固有関数でなくてはならないという要請は

$$H_A^{ext}|\Psi_g^T\rangle = \frac{\mathbf{P}^2}{2M}|\Psi_g^T\rangle = \frac{p^2}{2M}|\Psi_g^T\rangle \quad (11.37)$$

と置き換えることができる。ここで P は原子の運動量演算子で固有値 $p^2/2M$ は複素数である。

11.3.3 トラップ状態を探す

ここで両方の条件 (11.36) と (11.37) を満たす非常に簡単な方法は

$$\psi_g^T(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \quad (11.38)$$

とおくことである事を示す。ここで μ は定数である。式 (11.38) は、その波動関数がレーザー電場と同じベクトル場によって記述される g にある原子を定義する。先ず最初に式 (11.36) と満足する事は明らかで、これは

$$\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \times \psi_g^T(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (11.39)$$

であるからである。二番目に、周波数 ω_L の単色光のレーザー電場 $\mathbf{E}_L^+(\mathbf{r})$ は全て同じ絶対値 $k_L = \omega_L/c$ を持つ波数ベクトルの平面波の重ね合わせである必要がある。このため

$$\nabla^2 \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) = -k_L^2 \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \quad (11.40)$$

となる。 $P = -i\hbar\nabla$ であるため、式 (11.38) と (11.40) から

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2M} \psi_g^T = -\frac{\mu \hbar^2}{2M} \nabla^2 \mathbf{E}_L^+ = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2M} \psi_g^T \quad (11.41)$$

が導出され、これは ψ_g^T が式 (11.37) も満足する事を示している。なぜならこれは $P^2/2M$ の固有関数で、固有値 $E_R = \hbar^2 k_L^2/2M$ を持つものであるからである。

しかし条件 (11.36) と (11.37) は三次元のトラップ状態に対して必然的に満足されなくてはならないが、このような状態を定義するには十分ではないことを記しておく。例えば、三つの同一平面上の平面波によって形成されるレーザー光の配置を考える。この波数ベクトル k_1 、 k_2 、 k_3 は全て xy 平面にあり、

$$|k_1| = |k_2| = |k_3| = k_L = \omega_L/c \quad (11.42)$$

である。ここで式 (11.38) において定数 μ とおいた代わりに、 μ を $e^{i\kappa z}$ に置き換える。このため ψ_g^T に対して

$$\psi_g^T(\mathbf{r}) = \exp(i\kappa z) \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \quad (11.43)$$

とおくことにする。式 (11.43) は引き続き式 (11.36) を満足することは明らかで、これは $\psi_g^T \times \mathbf{E}_L^+$ が引き続きゼロであることによる。一方、式 (11.43) において $e^{i\kappa z}$ を乗じることにより、 \mathbf{E}_L^+ を形成している三つの平面波の波数ベクトル k_i ($i = 1, 2, 3$) にベクトル $\kappa = \kappa \epsilon_z$ を足すことになる。これからベクトル波動関数 (11.43) は波数ベクトル $k_i + \kappa$ ($i = 1, 2, 3$) を持つ三つのド・ブロイ平面波の和となる。 z 軸に平行な κ は、全て xy 平面にある k_1 、 k_2 、 k_3 に垂直であるため、三つの波数ベクトル $k_i + \kappa$ は同じ絶対値 $(k_L^2 + \kappa^2)^{1/2}$ を持つ。このため式 (11.43) は引き続き $P^2/2M$ 固有関数で固有値は $\hbar^2(k_L^2 + \kappa^2)/2M$ である。

$$\frac{P^2}{2M} \exp(i\kappa z) \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2(k_L^2 + \kappa^2)}{2M} \exp(i\kappa z) \mathbf{E}_L^+(\mathbf{r}) \quad (11.44)$$

このため式 (11.43) は引き続き式 (11.36) と (11.37) を満足する事が示されている。しかし κ は任意の値をとれるため、式 (11.43) はここでは z 軸方向の運動量の値だけ異なる異なったトラップ状態の集合を定義する。言い換えれば、三つの同一平面上の平面波によって形成されるレーザー光の場合においては、 \mathbf{E}_L^+ に比例した ψ_g^T をとることは三次元的なトラップ状態を導くものではない。なぜならこれによって三つの光を含む平面に垂直な方向の運動量だけ異なる無限のトラップ状態があることになるからである。

先の議論から次のことが示唆される。一意的な三次元のトラップ状態を得るためには少なくとも四つの平面波 k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) からなるレーザー光の配置をとる必要があり、こらら四つの光の波数ベクトル k_i の方向は、 k_i の先端が中心が 0 の単一の球 (半径 $k_L = \omega_L/c$) に含まれるようにする必要がある。任意の平行移動 κ は四つのベクトル $k_i + \kappa$ の絶対値が等しくならなくする。このため ($J_g = 1 \leftrightarrow J_e =$ 遷移に対する) 三次元の原子のトラップ状態は少なくとも四つの状態 $|g_i, \mathbf{k}_i\rangle$ ($|\mathbf{k}_i| = k_L$) の重ね合わせである必要がある。これらは運動量の方向 k_i/k_i が違うだけでなく、内部状態 g_i も異なる。式 (11.38) より、それぞれの状態 $|g_i, \mathbf{k}_i\rangle$ はレーザー平面波のレプリカで、またこのような光は横波であるので、原子の内部状態 g_i もまた k_i に対して横方向である必要がある。

このような原子の内部と外部自由度の間に分離不可能な量子相関を示す三次元のトラップ状態の存在を示す事は非常に興味深いだろう。これには多くの調査すべき問題が残っている。例えば、重力の影響を取り除く必要がある。また、トラップ状態への注入効率は運動量拡散に依存するが、これは一次元に比べて三次元の場合の方がよりはるかに小さくなり、多分、低い p の値へ向かって運動量拡散を増加するための付加的な他の方法の助けが有用になるだろう。

謝辞

Ecole Normale Supérieure の全ての同僚、特に Jean Dalibard のこのコースに関する多くの有用な議論およびコメントに対して感謝する。また Paul Lett に対しては原稿を注意深く読んでもらい、Michele Sanchez と Isabelle Gazan に対してはこの講義ノートの準備してもらい大変ありがたいと思う。

関連図書

- [1] B. R. Mollow, Phys. Rev. **A 12**, 1919 (1975).
- [2] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Processus d'interaction entre photons et atomes (InterEditions et Editions du CNRS, Paris, 1988). 英訳版: Atom-Photon Interactions. Basic Processes and Applications (Wiley, New York, 1992).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, in Les Houches, Session XXXVIII, 1982 - New trends in atomic physics, eds. G. Grynberg and R. Stora (Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1984).
- [4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, Photons et atomes, Introduction à l'électrodynamique quantique (InterEditions et Editions du CNRS, Paris, 1987). 英訳版: Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics (Wiley, New York, 1989).
- [5] C. Cohen-Tannoudji, in Les Houches, Session XXVII, 1975 - Frontiers in laser spectroscopy, eds. R. Balian, S. Haroche and S. Liberman (North-Holland, Amsterdam, 1977).
- [6] A. Kastler, J. Phys. Rad. **11**, 255 (1950).
- [7] J. Dalibard, S. Reynaud and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. **B 17**, 4577 (1984).
- [8] J. P. Gordon and A. Ashkin, Phys Rev. **A 21**, 1606 (1980).
- [9] J. R. Ackerhalt and J. H. Eberly, Phys Rev. **D 10**, 3350 (1974).
- [10] J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. **43**, 1617 (1982); *ibid.* **45**, 637 (1984).
- [11] R. J. Cook, Phys. Rev. **A 20**, 224 (1979).
- [12] E. Joos and H. D. Zeh, Z. Phys. **B 59**, 223 (1985).
- [13] T. W. Hansch and A. L. Schawlow, Opt. Commun. **13**, 68 (1975).
- [14] V. G. Minogin and T. Serimaa, Opt. Commun. **30**, 373 (1979).
- [15] E. Kyrola and S. Stenholm, Opt. Commun. **22**, 123 (1977).
- [16] N. G. van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- [17] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. **18**, 1661 (1985)
- [18] M. Lax, Phys. Rev. **172**, 350 (1968).

- [19] L. Mandel, *Opt. Lett.* **4**, 205 (1979).
- [20] J. Dalibard, S. Reynaud and C. Cohen-Tannoudji, *Opt. Commun.* **47**, 395 (1983).
- [21] D. Wineland and W. Itano, *Phys. Rev. A* **20**, 1521 (1979).
- [22] S. Stenholm, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 699 (1986).
- [23] J. Dalibard, *Phys. Scr.*, **T 12**, 28 (1986).
- [24] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [25] V. S. Letkov and V. G. Minogin, *Phys. Rep.* **73** 1, 1981.
- [26] R. J. Cook, *Phys. Rev. A* **22**, 1078 (1980).
- [27] A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovitch and V. P. Yakovlev, *J. Phys. (Paris)* **42**, 1231 (1981).
- [28] S. Stenholm, *Phys. Rev. A* **27**, 2513 (1983).
- [29] P. Martin, in *Many-Body Physics*, eds. C. de Witt and R. Balian, (Gordon and Breach, New York, 1968) p.37.
- [30] C. Cohen-Tannoudji, in *Cargese Lectures in Physics*, Vol. 2, p.347, M. Levy ed. (Gordon and Breach, New York, 1968).
- [31] S. Haroche, Thesis, Paris, published in *Ann. Phys. (Paris)* **6**, 189 (1971).
- [32] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys.* **10**, 345 (1977).
- [33] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, in *Multiphoton processes*, eds. J. Eberly and P. Lambropoulos (Wiley, New York, 1978) p.103
- [34] S. Reynaud, Thesis, Paris 1981, published in *Ann. Phys. (Paris)* **8**, 315 (1983).
- [35] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **A 293**, 233 (1979).
- [36] A. Aspect, G. Roger, S. Reynaud, J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 617 (1980).
- [37] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **1**, 441 (1986).
- [38] S. Reynaud, J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *IEEE J. Quantum Electron.* **24**, 1395 (1988).
- [39] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1707 (1985). ここに記述されている方法の多準位原子への拡張は次の文献。E. Bonderup and K. Mølmer, *J. Opt. Soc. Am.* **6**, 2125 (1989).
- [40] R. J. Glauber, in *Quantum Optics and Electronics*, Les Houches (1964), eds. C. de Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York, 1968) p.63.

- [41] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, Quantum Mechanics (Wiley and Hermann, Paris, Paris, 1977).
- [42] B. R. Mollow, Phys. Rev. **188**, 1969 (1969).
- [43] A. P. Kazantsev, Zh. Eksp. Tehr. Foz. **66**, 1599 (1974) [Sov. Phys. JETP **39**, 784 (1974)].
- [44] A. P. Kazantsev, Sov. Phys. Usp. **21**, 58 (1978).
- [45] A. P. Kazantsev, V. S. Smirnov, G. I. Surdutovitch, D. O. Chudesnikov and V. P. Yakovlev, J. Opt. Soc. Am. **B 2**, 1731 (1985). K. Mølmer, Thesis, University of Aarhus (1990) も見よ.
- [46] V. S. Letkov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **7**, 348 (1968) [JETP Lett. **7**, 272 (1968)].
- [47] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon and C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **57**, 48 (1986).
- [48] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf and C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **59**, 1659(1987). チャネリングを間接的に示したものはまた次の文献に報告されている。M. G. Prentiss and S. Ezekiel, Phys. Rev. Lett. **56**, 46 (1986).
- [49] A. Messiah, Quantum Mechanics (North-Holland, Amsterdam, 1962). 邦訳版: 「量子力学」メシア著
- [50] J. P. Barrat and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. Rad. **22**, 329 and 443 (1961).
- [51] C. Cohen-Tannoudji, Thesis, Paris (1962), Ann. Phys. **7** 423 and 469 (1962).
- [52] C. Cohen-Tannoudji, C. R. Acad. Sci. **252**, 394 (1961).
- [53] M. Arditì and T. R. Carver, Phys. Rev. **124**, 800 (1961).
- [54] W. Happer and S. Mathur, Phys. Rev. **163**, 12 (1967).
- [55] C. Cohen-Tannoudji and J. Dupont-Roc, Phys. Rev. **A 5**, 968 (1972).
- [56] W. Hanle, Z. Phys. **30**, 93 (1924), and Z. Phys. **35** 346 (1926).
- [57] J. Dupont-Roc, S. Haroche and C. Cohen-Tannoudji, Phys. Letters **A 28**, 638 (1969).
- [58] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche and F. Laloë, Phys. Rev. Lett. **22**, 758 (1969).
- [59] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo and C. Cohen-Tannoudji, Z. Phys. **D 18**, 17 (1991).
- [60] G. Nienhuis, Proceedings of Light Induced Kinetic Effects, eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo and F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991).
- [61] H. Wallis, Thesis, Bonn (1990).
- [62] P. Lett, R. Watts, C. Westbrook, W. D. Phillips, P. Gould and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **61**, 169 (1988).

- [63] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am.* **B 6**, 2023 (1989).
- [64] Y. Castin, J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Proceedings of Light Induced Kinetic Effects*, eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo and F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991).
- [65] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis and S. Chu, *J. Opt. Soc. Am.* **B 6**, 2058 (1989).
- [66] Y. Castin and J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **14**, 761 (1991).
- [67] D. S. Weiss, E. Riis, Y. Shevy, P. J. Ungar and S. Chu, *J. Opt. Soc. Am.* **B 6**, 2072 (1989).
- [68] B. Sheehy, S. Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatamian and H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 858 (1990).
- [69] C. Salomon, J. Dalibard, W. D. Phillips, A. Clairon and S. Guellati, *Europhys. Lett.* **12**, 683 (1990). C. Monroe, W. Swann, H. Robinson and C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990) も見よ.
- [70] J. Dalibard, C. Salomon, A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, in *Atomic Physics 11*, eds. S. Haroche, J. C. Gay and G. Grynberg (World Scientific, Singapore, 1989) p.199.
- [71] S. Chu, D. S. Weiss, Y. Shevy and P. J. Ungar, in *Atomic Physics 11*, eds. S. Haroche, J. C. Gay and G. Grynberg (World Scientific, Singapore, 1989) p.636.
- [72] H. J. Metcalf, *Proceedings of Light Induced Kinetic Effects*, eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo and F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991).
- [73] Y. Castin and K. Mølmer, *J. Phys.* **B 23**, 4101 (1990).
- [74] Y. Castin, K. Mølmer, J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, in *Laser Spectroscopy IX*, eds. M. Feld, J. Thomas and A. Mooradian (Adademic Press, Sandiego, 1989).
- [75] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi and G. Orriols, *Nuovo Cimento* **B 36**, 5 (1976).
- [76] E. Arimondo and G. Orriols, *Lett. Nuovo Cimento*, **17**, 333 (1976).
- [77] P. M. Radmore and P. L. Knight, *J. Phys.* **B 15**, 561 (1982).
- [78] J. Dalibard, S. Reynaud and C. Cohen-Tannoudji, in *Interaction of Radiation with Matter, a Volume in Honor of A. Gozzini*, Scuola Normale Superiore, Pisa (1987).
- [79] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
- [80] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am.* **B 6**, 2112 (1989).
- [81] D. E. Pritchard, K. Helmerson, V. S. Bagnato, G. P. Lafyatis and A. G. Martin, in *Laser Spectroscopy VIII*, eds. S. Svanberg and W. Persson (Springer Verlag, Heidelberg, 1987) p.68.

- [82] F. Mauri, F. Papoff and E. Arimondo, Proceedings of Light Induced Kinetic Effects, eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo and F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991).
- [83] M. A. Ol'shanii and V. G. Minogin, Proceedings of Light Induced Kinetic Effects, eds. L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo and F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991).
- [84] F. Papoff, F. Mauri and E. Arimondo, *J. Opt. Soc. Am.* **B 9**, 321 (1992).
- [85] C. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips, *Physics Today*, October 1990, p.33.
- [86] P. Verkerk, B. Lounis, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, J. Y. Courtois and G. Grijnberg, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3861 (1992).
- [87] P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 49 (1992).
- [88] C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou and A. Aspect, in *Laser Spectroscopy X*, eds. M. Ducloy, E. Giacobino and G. Camy (World Scientific, Singapore, 1992) p. 3.