

ボーズ・アインシュタイン凝縮の生成、観測およびその理解

Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates

W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn 著 中川賢一訳

平成 14 年 3 月 4 日

1 はじめに

希薄原子気体のボーズ・アインシュタイン凝縮の実現によって [1, 2, 3, 4, 5]、いくつかの長年の目標が達成された。まず第一に、中性原子が最低エネルギー状態にまで冷却され、これによって原子の運動および位置は究極的に制御され、唯一ハイゼンベルグの不確定性関係によってその限界が与えられるまでに至った。第二に、全ての原子が同じ量子状態を占有するマクロな原子集団が作られ、これによってコヒーレントな物質波を生成する装置である原子レーザーが実現された。三番目に、生成された縮退した量子気体は量子液体である ^3He や ^4He とは全く異なる性質を持っていた。これは希薄ボーズ気体の多体問題の理論に対する検証の場を与えることになった。この理論は数 10 年前に研究されたが、今まで実験的には検証されてこなかったものである [6]。希薄原子気体の BEC は超流動、超伝導およびレーザーと類似点があるマクロな量子現象の一つである [7]。

この数年来の BEC の分野における急激な発展は目覚ましいものであった。アルカリ原子における最初の蒸発冷却の観測から BEC の実現までほんの一年しかたっていない。その後、この分野の研究の発展は当初の楽観的な期待をはるかに越えるものであった。ほとんど毎月のように BEC に関する新しい話題が現れ、BEC を単なる統計物理の一現象以上のものにした。すなわち BEC は量子世界に向けた新しい窓である。このような興奮はエンリコ・フェルミのサマースクール全体を通して感じられるものであった。

バレンナ (Varenna) において、著者の一人は 4 つの講義を行い、BEC を研究するのに用いた実験技術およびこれを用いて得られた実験結果を解説した。これらの講義ノートは同じ話題をカバーする。しかし、この急激に発展する領域の全ての話題を提供するかわりに、いくつかの話題を選んで、これを深く掘り下げてとり扱うことにした。取り上げた話題は、広範囲にわたる磁気トラップ法 (2.3 節)、各種の画像技術 (3 節)、画像解析 (4 節)、音波 (6 節) およびコヒーレンス (7 節) に関する包括的な議論である。これらの節の多彩な面およびその詳細は他では見出すことができない。これ以外の話題に関しては、より簡単ではあるが他の文献等でカバーされており、読者にはこの本における他の講義ノートおよび他の関連する文献を参考に挙げることにする。

この解説論文の主要な部分は、今までに出版された我々の研究成果および解説論文を基にしたものである。文献 [8] はボーズ凝縮の最初の実験をまとめたもので、文献 [9, 10, 11] には冷却および捕捉技術に関するより完全な説明があり、1996 年の夏の間の研究の進展に関する記述がある。文献 [12] は音波の伝搬と原子レーザーの実験が含まれており、文献 [13] はボーズ凝縮体の光によるトラップの実験に関する説明がある。文献 [14] は 1997 年末を通して行われた技術と実験に関する概説である。蒸発冷却技術は文献 [15] に解説されている。文献 [16, 17, 18, 19] はより一般読者向けの論文で、文献 [18] においては実験データのアニメーション動画が含まれており、文献 [19] は原子レーザーの概念を議論している。

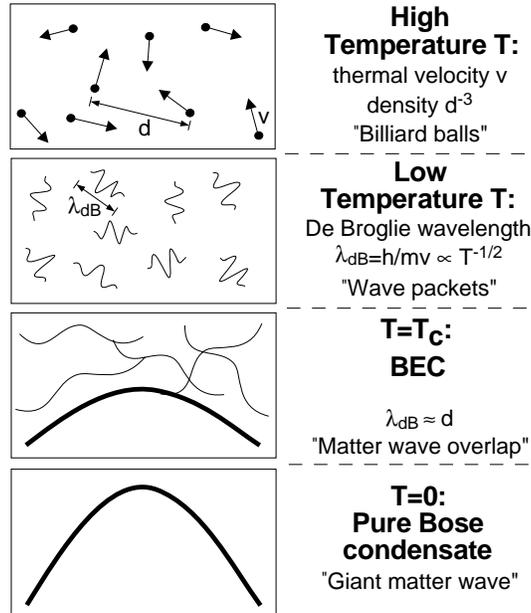


図 1: ボーズ・アインシュタイン凝縮に対する尺度。温度が高い場合、弱く相互作用する気体は「ビリヤードボール」の系のように扱うことができる。単純化された量子力学的な記述においては、原子は λ_{dB} だけ広がった波束として扱うことができる。BEC の転移温度においては、 λ_{dB} は原子間距離と同程度になり、ボーズ凝縮が形成される。温度がゼロに近づくにつれて、熱原子雲は消えて、純粋なボーズ凝縮体が残る。

1.1 ボーズ・アインシュタイン凝縮の基本的な性質

多くの教科書 (例えば文献 [20]) に記述されている理想気体における BEC は、量子統計力学のパラダイムの一つで、これはマクロな量子力学的な現象に対する深遠な洞察を与えるものである。ここでは、トラップされたボーズ気体の最近の実験に関する BEC の様相を選んでこれに焦点を絞りたいと思う。

1.1.1 長さエネルギーの尺度

ボーズ・アインシュタイン凝縮は、(同一種類) 粒子が区別できない性質、および波としての性質に基づくもので、これはどちらも量子力学の核心にあたる。単純化された描像では、気体原子は量子力学的な波束とみなすことができ、その大きさは熱的なド・ブロイ波長 $\lambda_{dB} = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$ で与えられ、ここで T は温度、 m は原子の質量である。 λ_{dB} は熱的な運動量分布と関係する位置の不確定性とみなすことができる。原子が冷却され、その λ_{dB} が原子間距離と同程度になると、原子の波束は「重なり」、(同一粒子が) 区別できない性質が重要になる (図 1)。このような温度においては、ボソン (ボーズ粒子) は相転移を起こし、ボーズ・アインシュタイン凝縮を形成し、コヒーレントな原子雲は全て同じ量子状態を占有することになる。相転移温度とピーク原子密度 n との関係は $n\lambda_{dB}^3 \simeq 2.612$ と与えられる。

気体のボーズ・アインシュタイン凝縮は理論的に「第一原理」の記述が可能で、これはその長さエネルギーの尺度に明確な階層構造があることによる (表 1)。気体においては、原子間距離 $n^{-1/3}$ は原子の大きさ (s 波散乱長 a によって特徴づけられる) よりはるかに大きく、これはまた $na^3 \ll 1$ と表される。ボーズ凝縮気体においては、原子間距離は熱的なド・ブロイ波長と等しい、もしくはこれより小さくなる。最も大きな長さの尺度は閉じ込め領域の大きさで、これは箱型ポテンシャルの大きさ、または振動子の振幅 $a_{HO} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ 、すなわち周波数 ω の調和振動ポテンシャルにおける基底状態の波動関数の大きさによって特徴づけられる。

表 1: トラップされた気体ボーズ・アインシュタイン凝縮体に対するエネルギーと長さの尺度。エネルギーと長さの尺度の階層的構造によってこの量子液体の記述は簡単化される。各エネルギー E に対して、関係式 $E = \hbar^2/2ml^2$ を用いて長さ l を定義し、 l と通常の長さの尺度の関係を示す。数値は典型的なナトリウムの BEC の実験に対するものである。平均場エネルギーの値は密度 $\sim 10^{14}\text{cm}^{-3}$ を仮定している。

エネルギーの尺度 $E = \hbar^2/2ml^2$		長さの尺度	
s 波散乱に対する制限温度	1 mK	散乱長	$a = l/2\pi = 3 \text{ nm}$
BEC 転移温度 T_c	$2 \mu\text{K}$	原子間距離	$n^{-1/3} = l/\sqrt{\pi}(2.612)^{1/3} = 200 \text{ nm}$
1 光子の反跳エネルギー	$1.2 \mu\text{K}$	光の波長	$\lambda = l = 600 \text{ nm}$
温度 T	$1 \mu\text{K}$	熱的ド・ブロイ波長	$\lambda_{dB} = l/\sqrt{\pi} = 300 \text{ nm}$
平均場エネルギー μ	300 nK	回復長	$\xi = l/2\pi = 200 \text{ nm}$
調和振動子の準位間隔 $\hbar\omega$	0.5 nK	振動子強度 ($\omega \simeq 2\pi \cdot 10\text{Hz}$)	$a_{HO} = l/\sqrt{2}\pi = 6.5 \mu\text{m}$

各長さの尺度 l においてこれに関連するエネルギーの尺度があり、これはド・ブロイ波長 l の粒子の運動エネルギーである。散乱長に関連するエネルギーの尺度はこれ以下では s 波散乱が優勢になる温度である。原子間距離に関連するエネルギーの尺度、 $n^{-1/3}$ は BEC の相転移温度である。閉じ込めポテンシャルの大きさに関連するエネルギーの尺度は最低準位間のエネルギー間隔である。

原子間相互作用は平均場エネルギー $U_{int} = 4\pi\hbar^2 na/m$ によって記述される。このエネルギーに関連する長さの尺度は回復長 $\xi = (8\pi na)^{-1/2}$ である。ほとんどの実験において、 $k_B T > U_{int}$ であるが、これとは反対の状況も実現されている [21, 13]。これに対して、超流動ヘリウムは強く相互作用する量子液体である。原子の大きさ、回復長、熱的ド・ブロイ波長および原子間距離は全て同程度であるため、これによって複雑で多彩な状況を作り出している。

1.1.2 複合ボーズ粒子の BEC

整数のスピンを持つ、また等価的に原子に含まれる電子、陽子、中性子の全個数が偶数である原子はボーズ粒子である [22, 23]。しかし、BEC においては、このような複合粒子をボーズ・アインシュタイン統計に従う点粒子とみなす。どのような条件においてこの仮定が崩れ、複合粒子の性質がこの系の性質に影響を与えるのだろうか？

複合粒子の性質は内部状態の励起として現れる。内部状態の励起に必要なエネルギーが $k_B T$ よりもはるかに大きいときには、内部自由度は凍結され、これはこの温度における熱力学を記述するのに対して重要ではなくなる。質量 m の、大きさ a の分子の最低準位の回転準位間隔は \hbar^2/ma^2 である。最初の電子励起状態は $\hbar^2/m_e a^2$ で、ここで m_e は電子の質量である。どのような場合においても、希薄である条件 $na^3 \ll 1$ によって

$k_B T$ が内部励起エネルギーよりもはるかに小さいことが保証される。このため、複合粒子の性質は希薄ボーズ凝縮体の性質に影響を与えることはありえない。フェルミエネルギーが複合ボーズ粒子の結合エネルギーと同程度になった時、より高密度において何が起こるかについての簡単な議論が文献 [24] にされている。

基本フェルミ粒子はスピンを持っているため、複合ボーズ粒子はスピンの構造を持っており、この結果、複数の超微細構造による基底状態が存在する。磁気トラップにおいては、通常、原子はただ一つの (または選択されたいくつかの [25]) 超微細状態にトラップされる。これに対して光トラップにおいては、複数の超微細状態に分布する凝縮体によって新しい現象を見出すことができる (8 節)。超微細状態の数は有限であるため、超微細構造は多成分凝縮体を導くが、これが BEC を妨げることはない。

1.1.3 熱平衡状態におけるボーズ・アインシュタイン凝縮

ボーズ・アインシュタイン凝縮は、多数の原子が系の基底状態に落ち込むことによって系のエントロピーが最大になるような熱平衡状態において起こる。直観に反するように思われるかもしれないが、ボーズ凝縮体のような明らかに高次の秩序を持った状態がエントロピーを最大にする。しかし、励起状態の粒子のみがエントロピーに寄与する。この励起状態の粒子は、一つの基底状態のボーズ凝縮 (原子) を形成し、残りの原子をより高いエネルギー状態に分布させることによって、与えられた全エネルギー下でエントロピーへの寄与が最大になる。

系の基底状態のマクロな原子数分布は、単純にサンプルの温度を下げることによって達成される。これは光のレーザーとは対照的で、光の場合、電磁場の単一モードにマクロな光子数分布を作るには非平衡過程が必要である。これは光子と違って、原子数が保存するという事実によるものである。ボーズ粒子の原子に対しては、ある温度以下における最低エントロピー状態は基底状態にマクロな数の分布がある。これとは対称的に、黒体空洞共振器を冷却すると、共振器の中の光子は空になる。光子は共振器の基底状態にボーズ凝縮せず、共振器の壁に吸収されてしまう。吸収エネルギーによってボーズ凝縮を形成するよりも大きなエントロピーを得る。レーザー発振現象を得るには能動的な媒質の分布の反転が必要となり、これは負温度として特徴付けられる。この意味において、原子のレーザー発振は光のレーザー発振よりも簡単な現象である。必要なのは気体を冷却するだけである！

しかし、光子気体が光子数を保存して熱平衡になるならば、光子もゼロでない化学ポテンシャルを持つボーズ・アインシュタイン分布によって記述され、ボーズ凝縮を形成するだろう。粒子数を保存したままの熱平衡化は、例えば熱的な電子気体と散乱するコンプトン散乱によって可能になる [26]。

1.1.4 マクロな波動関数

理想気体においては、ボーズ凝縮原子は全て同じ 1 粒子の基底状態の波動関数に占められる。このため多体の基底状態の波動関数は N 個の同一な 1 粒子の基底状態の波動関数の積となる。このため、この 1 粒子の波動関数は凝縮体の波動関数またはマクロな波動関数と呼ばれる。この描像は弱い相互作用がある場合においても有効である。多体系の基底状態の波動関数は非常に良い近似で、 N 個の一粒子の波動関数の積になり、この 1 粒子の波動関数はここでは非線型シュレディンガー方程式から求められる。基底状態への他の状態の混合は量子枯渇と呼ばれる。ボゴリュボフ理論においては、量子枯渇の大きさは $(8/3\pi^{1/2})\sqrt{na^3}$ となり、アルカリ原子の凝縮体では典型的にはこれは 1% 以下である。これは相互作用する気体に対しても、99% の正確さで全ての原子が同じ 1 粒子の波動関数を持っているとみなせることを意味する。これは液体ヘリウムとは対照的で、この場合には量子枯渇は約 90% である [27]。

凝縮体の密度分布は非破壊で直接観測することが可能である (?? 節)。このような測定はマクロな波動関数の強度を直接視覚化するものとみなすことができる。単一粒子の系の波動関数の時間発展さえも実時間で記録が行われている [28, 29, 30]。多数の同一の波動関数を調べてその分布を決定するという意味において、波動関

数は系を確率的に記述するものである。BECにおいては、同じ波動関数の百万もの同一のコピーを同時に実現することができ、このため、凝縮原子のほんの一部に影響を与えるだけで全波動関数を測定することが可能となる。この結果得られる波動関数の感動的な視覚化は BEC の実験の研究がアピールする点の一である。

1.2 BEC 1925- 1995

1.2.1 BEC および凝縮系物理

ボーズ・アインシュタイン凝縮は量子統計力学が予言した最も興味をそそる現象の一つである。BEC 理論の歴史は非常に興味深く、これはアインシュタイン [31] およびロンドン [32] の自伝に非常に良く記述されており、またこの本においてもグリフィンによって解説がなされている。例えば、アインシュタインは、量子力学の理論が十分に発展する前、またボーズ粒子とフェルミ粒子の違いが明らかになる前に、(BEC の) 予言を行っている [33]。アインシュタインの (予言) 後、重要な貢献を行った最も有名な人物は、ロンドン、ランダウ、ティザ、ボゴリョボフ、ペンローズ、オンサーガー、ファインマン、リー、ヤン、ハン、ベリアエフ、そしてピタエフスキーである。重要な問題はいつも BEC と液体ヘリウムにおける超流動の間の関係で、これはロンドンとランダウの間で大論争になった (文献 [32] をみよ)。ボゴリョボフ、ベリアエフ、グリフィンおよびその他の人は、ボーズ・アインシュタイン凝縮がランダウの量子流体力学の背後にあるミクロな描像を与えることを示した。BEC は超伝導と密接に関係しており、これはクーパー対のボーズ・アインシュタイン凝縮によるものと表される。このため、ボーズ・アインシュタイン凝縮は多くのマクロな量子現象の核心に位置するものといえる。

BEC は純粋に量子統計力学的な相転移、すなわち相互作用が無くても起こるという点において他に例はないものである (アインシュタインはこの相転移を「引力無し」の凝縮と表わした [33])。このことは BEC を統計力学の重要なパラダイムとならしめ、凝縮系物理学、原子核物理、天体物理学における多彩な状況において議論されてきた [7]。一方、現実の粒子はどれも相互作用し、弱く相互作用するボーズ気体は理想ボーズ気体とは定性的に異なった振るまいをする [20]。ある期間、相互作用はいつでもボーズ・アインシュタイン凝縮が起こる前に「通常」の (固体相への) 凝縮を引き起こすと信じられてきた。液体ヘリウムはこの唯一の反例で、軽い質量とこれに伴う大きな零点振動の運動エネルギーによって絶対零度に温度が下がる固体化が妨げられる。

弱く相互作用する希薄気体における BEC の実現に対する探求は少なくとも三つの異なる方向から行われた。液体ヘリウム、励起子、そして原子気体である。パイコール中の液体ヘリウムにおける超流動の徴候は希薄気体のボーズ・アインシュタイン凝縮の性質を示すことが実験 [34, 35] および理論 [36] による研究によって示された。十分に低い適用範囲で、スポンジ状のガラス上に吸着したヘリウムは希薄三次元気体のように振舞った。

弱く結びついた電子 - ホール対からなる励起子は複合ボーズ粒子である。半導体中の励起子の物理は非常に多彩で、これには電子 - ホール液体や励起子分子が含まれる。文献 [37, 38] に非常に良く議論されているように、最も有名な Cu_2O の系があり、これは励起子が弱く相互作用する気体を形成し、その寿命はボーズ・アインシュタイン分布に熱平衡するのに十分な、またボーズ・アインシュタイン凝縮の証拠を示すのに十分な寿命を持っている [39, 40]。

1.2.2 スピン偏極水素

希薄原子気体が先に議論した凝縮系と異なるのは、強い相互作用または複雑な相互作用が無いことである。液体や固体の密度における相互作用は、著しく相転移の性質を変化させまた複雑なものにする。ヘクト [41] とストレイおよびノザノワ [42] は、スピン偏極した水素が絶対零度に下がっても気体のままであり続け、希薄原子気体におけるボーズ・アインシュタイン凝縮実現の有望な候補でありうることを量子理論を用いて導いた。この示唆を受けて、いくつかの実験の努力がなされ、その最も有名なのは MIT におけるグレイタクとクレップナーによるものと、アムステルダムシルビアとウォルラーベンによるものである。スピン偏極水素気

体の安定化の実験は量子縮退気体の探索の期待がもたれ、大きな興奮をもたらした [43, 44]。実験は最初、極低温のセルをスピン偏極気体で満たし、次にこれを圧縮した。1985 年からは磁気トラップで捕捉して蒸発冷却を行った。BEC は最終的には 1998 年にクレップナーとグレイタク等によって実現された [4]。詳しくは文献 [45, 46, 47, 48] およびこの本のクレップナーとグレイタクによる水素原子のボーズ・アインシュタイン凝縮探求の全ての様子に対する記述を見てもらいたい。

最初の BEC 実現の可能性の示唆において、スピン偏極水素原子に与えられた他に例が無い役割を見ることは興味あることである [41, 42, 48]。対応する状態に対する量子理論において、ある者は無次元パラメータ η を定義し、これは零点エネルギーの分子の束縛エネルギーに対する比に関係するものである。このパラメータは系が絶対零度に下がっても気体であり続けるかどうかを決定する。 η が大きいと、零点運動が支配的になり、系は気体になる。 η が小さいと、液体または固体に凝縮してしまう。 η の臨界値は 0.46 で、唯一 $\eta = 0.55$ のスピン偏極した水素がこの値を越える [48]。アルカリ原子の蒸気の η は 10^{-5} から 10^{-3} の範囲である。

実際、全てのスピン偏極気体は $T=0$ では準安定状態のみで、これは脱偏極過程によるものである。気体の寿命は三体再結合によって制限される。水素分子の三重項ポテンシャルは束縛状態とならないため、スピン偏極水素は唯一スピンフリップして一重項状態に再結合しうる。これに対して、アルカリ原子は共に一重項、三重項の分子の束縛状態を持ち、また三体再結合係数がスピン偏極水素よりも 10 桁も大きい。しかし三体過程の確率は原子密度の二乗に依存し、またこれは十分低い密度においては抑制され、BEC に冷却する間はほとんど無視できる。磁気トラップで捕捉された原子に対しては、双極子緩和が新たな緩和過程として加わる。水素原子とアルカリ原子は同程度の確率でこの緩和過程が起こる。後から分かったことだが、他の気体に対して水素が唯一有利な点は気体 BEC に対してはあまり重要ではない。スピン偏極水素は唯一の真の「量子気体」と呼ばれてきたが、アルカリ原子気体との違いは単に密度の範囲と準安定状態の気体相の寿命だけである。

アルカリ原子における研究はいくつかの点においてスピン偏極水素の研究に基づいている。

- スピン偏極水素の研究によって、BEC の達成条件の近くにおいて系は準安定状態の気体相のままでありうることを示された。このため BEC 実現への挑戦は、BEC を実現するのに十分なこの準安定状態の寿命が得られる密度および温度の範囲を探ることにあつた。
- 不均一ポテンシャル中の BEC の多くの様相 [49, 50, 51]、および 80 年代に発展した水素原子における低温の衝突過程 (例えば文献 [52] をみよ) の理論がアルカリ原子の系にそのまま適用可能であった。
- 蒸発冷却の技術は最初に水素原子に対して開発され [53, 54]、その後、アルカリ原子に用いられた (2.4 節)。

またスピン偏極水素原子気体の二次元における量子縮退気体の実現に向けて多くの努力が傾けられてきた。二次元においては、長距離の範囲で秩序が保たれた真のボーズ・アインシュタイン凝縮は位相揺らぎに対して不安定になる。コストリッツ - ソウレス転移点のある温度以下では、気体は超流動となり、局所的にボーズ・アインシュタイン凝縮を示し、最低状態にマクロな数の分布が生じる。二次元における量子縮退の研究はハーバード大 [55]、アムステルダム [56]、京都 [57]、そしてトゥルク大において行われ、二次元の相転移の証拠が 1998 年に報告された [58]。

1.2.3 アルカリ原子

レーザー冷却は極低温物理への新しい道を切り開いた。室温の真空チャンバーを用いて容易に光を導入することができるレーザー冷却の実験は、全体を何層にもシールドしたクライオセルと比べると、全く異なった様子である。また極低温において調べることができる原子の種類は、ヘリウムと水素から全てのアルカリ原子、希ガス、いくつかのアルカリ土類原子、そしてその他の原子と非常に多くの種類へと拡大された。関連するレーザー冷却技術に関しては 2.1.1 節にまとめることにする。このレーザー冷却の発展の全容は文献 [59, 60, 61] およびチュー、コーヘン - タンノウジ、フィリップスによるノーベル賞講演に与えられている [62, 63, 64]。ここ

では特に 1995 年のボーズ・アインシュタイン凝縮観測を成功に導いたレーザー冷却技術の発展に関していくつか述べることにする。

レーザー冷却および捕捉の基本技術が発展する以前および発展中の 80 年代の初頭および中頃において書かれたいくつかの論文および提案において、量子縮退はこの新しく出現した研究分野における夢のゴールであるかのように記されていた [65, 66, 67]。しかし、レーザー冷却およびトラップの重大な限界がすぐに明らかになった。(レーザー冷却は) 基本的には冷却温度の下限は無いが、偏光勾配冷却によって得られる最終温度、および反跳エネルギーの 10 倍程度であるが、これが実際の冷却限界だと考えられた。反跳限界以下の冷却技術、特に三次元における冷却を行うのは非常に難しく、また長い冷却時間が必要となる。原子の個数および密度は非弾性、光誘起衝突 (これはトラップロスを導く [68, 69]) によって、また散乱レーザー光の吸収によって制限され [70]、これらは外に向かう放射圧となった (トラップポテンシャルの力を弱め、密度を制限する)。実際、最も進んだレーザー冷却技術でも [71, 72, 73]、最初のレーザートラップの実験における密度のたった 20 倍の密度しか達成しなかった ($5 \times 10^{11} \text{cm}^{-3}$ [74])。さらに、最低温度は最大密度においては達成することができず [75, 76, 77]、多くのレーザー冷却・捕捉技術においては達成された位相空間密度の最大値は 10^{-5} 付近であった。

最終的に (BEC) 成功をもたらした方法は、磁気トラップおよび蒸発冷却のための予備冷却としてのみレーザー冷却を用いることであった。アルカリ原子の蒸発冷却は、これが最初に発展した水素原子よりもはるかに良く働くことが分かった。このことはそんなに大きな驚きではなかった。既に 1986 年において、プリチャードは正確にアルカリ原子に対して弾性および非弾性衝突確率の評価を行っていた [67]。この評価から、アルカリ原子は水素原子と比べて明らかにいわゆる良い衝突 (蒸発冷却過程に必要な弾性衝突) が悪い衝突 (非弾性、二体、または三体衝突) よりも優勢で、このため、アルカリ原子における蒸発冷却は多分、固有のロスが過熱過程によって制限されないことが簡単に予想された。しかし、悲観論 [78] や懐疑論が引続きあり、ボルダーと MIT の研究者は実験的 [79] および理論的 [80] に場の最大点にトラップされる最低の超微細構造準位に原子を閉じ込める可能性を探求していた。この状態における原子のトラップは水素原子において BEC への進展を妨げる非弾性二体衝突を避けることができるものと思われた。しかしこれを評価したところ [67]、この衝突はナトリウムおよびルビジウムでは無視できるものであることが分かった。

著者の一人 (W.K.) が 1990 年に MIT のデーブ・プリチャードとチームを組んだとき、温度と密度の限界を打ち破る一つの方法として蒸発冷却の議論を行った。MIT におけるスピン偏極水素原子の実験の例にならって、1989 年にプリチャード等に示唆されたように [81]、ラジオ波に誘起されるスピン反転を用いた磁気トラップ中の蒸発冷却を行った (2.4 節をみよ)。最初の NIST [82] および MIT [83] における磁気トラップの実験、また MIT における磁気トラップ原子のドップラー冷却の実験において既に磁気トラップとレーザー冷却は同時に用いられていた [81, 84]。1990 年にボルダーにおいて、磁気光学トラップおよび光モラセスからの磁気トラップへの原子の移行が行われた [85]。ほとんどの技術は 1990 年に知られていた。しかし、これらが一緒にうまく整合するかどうか疑問であった。BEC へ向けてのレーザー冷却に関してはモンロー、コーネル、ワイマンの文献 [86] にまとめてある。

ボルダーと MIT における実験の努力は、原子が低密度の時に最も良く働く有効なレーザー冷却および捕捉法と、高密度が必要とされる蒸発冷却法とを同時に達成するための挑戦に向けられた。問題は、 10^{-9}cm^2 の大きさの共鳴散乱断面積による光子の過剰な散乱を防ぎ、その一方で 1000 分の 1 の大きさの散乱断面積で原子同士の十分な散乱を得ることにあった。このため、光を用いた (レーザー冷却・捕捉) 方法は低温で高い位相空間密度を得るということから、高い弾性衝突確率を得るということにその目的が変化した。このゴールへ向けての最初の重要な改良は 1992 年のダーク SPOT トラップの発明であった [87]。これはボルダー [1] および MIT [2] における BEC の研究において重要な技術となった。1991 年からデーブ・プリチャードと W.K はコヒーレントダーク状態による冷却および捕捉を基にした光トラップの限界を改良するいくつかの方法を研究し始めた。この解決法であるダーク SPOT はインコヒーレントな光ポンピング方法であった。

蒸発冷却を始めるために必要なことは唯一、衝突による再熱平衡化の時間がトラップ中の原子の寿命よりも

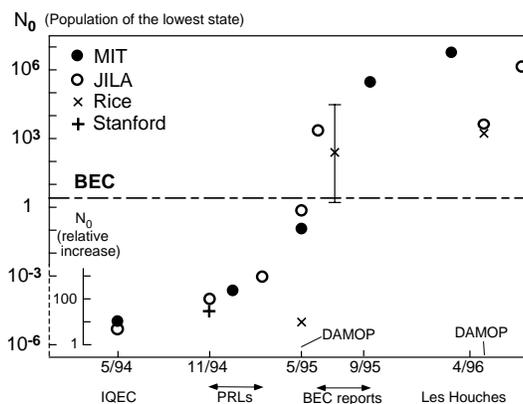


図 2: 1996 年までのアルカリ原子の蒸発冷却の進展。最低量子状態の原子数は位相空間密度に比例し、ポーズ・アインシュタイン凝縮を達成するには臨界数 2.612 を越える必要がある。 $N_0 < 10^{-3}$ に対して、蒸発による位相空間密度の増加をプロットしてある。ライス大の 1995 年 7 月の結果は文献 [90] を、修正は文献 [91] を見よ。

はるかに短いことである。1992 年の夏、ダーク SPOT 中の弾性散乱確率は 100Hz であった [87]。残る蒸発冷却に対する障害は背景原子との衝突確率を小さくするため、 10^{-11} トル台の真空を達成することにあつた。アルカリ原子の蒸発冷却は 1994 年に MIT とボルダーにおいて実演された [88, 89]。両グループとも、ラジオ波を用いた蒸発冷却を用い (2.4 節)、これは非常に効率が低い蒸発技術である。1995 年、磁気トラップの改良後 (2.3 節)、ブレークスルーは 6 月のはじめにボルダーにおいて [1]、また MIT においては 9 月の終わりに訪れた [2]。ライス大のグループは 7 月に量子縮退の領域に達した証拠を得た [90]。

図 2 にレーザー冷却と蒸発冷却を組み合わせ後の進歩がいかに劇的であったかを示す。2 年以内に、一量子状態のアルカリ原子の数は約 12 桁も増加した。相転移が起こったことを示す正に特異点である！

ダーク SPOT、圧縮 MOT[92]、TOP トラップ、光で栓をしたトラップなどの技術は最初の BEC 達成に重要であったが、決して必要不可欠なものではない。これはライス大の実験によって非常に良く示されており、この実験では磁気トラップにロードするのにドップラー冷却しか用いていない。これは 80 年代に開発された技術である。衝突確率は小さいが、良好な真空によって非常にゆっくりとした蒸発過程が可能になる [90]。後から考えてみると、アルカリ気体における BEC は冷却および捕捉の重要な発明は必要としなかった。BEC に向けて開発された冷却および捕捉の主な進歩は BEC に対して必ずしも必要不可欠ではなかった。しかし、これらの技術によってここ数年のこの領域における急激な発展を促すことになった。

2 冷却、捕捉、そして操作技術

希薄気体におけるポーズ凝縮をつくるには、そのド・ブロイ波長が原子間距離程度になるまでトラップ中の原子を冷却および圧縮する必要がある。さらに、原子は全ての壁から熱的に隔離する必要がある。これは原子を超高真空チャンバー内で磁場またはレーザー光によって原子を捕捉することによって行われる。このようなトラップは原子を数秒もしくは数分にもわたって蓄えておくことが可能で、これはこの原子を冷却するのに十分な時間である。予備冷却はトラップを行うのに必要不可欠で、これは保存力による原子トラップは最大 1K 程度の中性原子しか閉じ込めることができないためである (多くの場合、トラップの深さはほんの数 mK 程度である)。予備冷却はレーザー冷却によって行われ、最終的な冷却は蒸発によって行われる。表 2 にはこれらの冷却法と一緒に用いてどのようにして原子の温度を 100 万分の 1 にまで下げるかを示している。転移温度における密度は原子線のオープンの密度に近い。位相空間密度の増大はレーザー冷却と蒸発冷却の間でほとんど同じで、それぞれ 6 桁の増大である。ポーズ・アインシュタイン凝縮は「自由冷却」とみなすことが可能であ

る。それは何もしなくて量子状態の占有率をさらに 100 万倍増大させるからである。これは BEC の一つの重要な面を反映している。基底状態の分布数の割合はもはや $k_B T$ よりも小さい状態の数には比例せず、原子が転移温度以下になると急激に 1 に近づく。

表 2: MIT の実験における BEC に向けた多段階冷却。光学的 (レーザー) 冷却と蒸発冷却の組み合わせを通して、気体の温度は 10^9 分の 1 に減少する。一方、BEC 転移における密度は原子炉内の最初の密度と同様である (全ておおよその数値である)。下に示す各段階において、基底状態の分布は 10^6 倍だけ増加する。

	温度	密度 (cm^{-3})	位相空間密度
原子炉	500 K	10^{14}	10^{-13}
レーザー冷却	50 μK	10^{11}	10^{-6}
蒸発冷却	500 nK	10^{14}	1
BEC			10^7

2.1 予備冷却

2.1.1 標準的なレーザー冷却技術

いくつかのレーザー冷却の段階を経て、原子は磁気トラップに移される。ここでは簡単にこれらの冷却の段階を解説し、その詳細は多くの本や解説記事を参照してもらいたい [59, 60, 61]。

- ゼーマン減速法：原子線は共鳴光の放射圧によって減速することができる。原子線を減速する多くの方法の中で [93, 94, この文献中の参考文献も]、ゼーマン減速法 (フィリップス等によって最初に実演された [95]) は最大の低速原子の流量が得られる。この方法においては、原子の減速によるドップラーシフトの変化を不均一磁場によって補償するもので、原子の減速中に共鳴条件を維持することを確保する。一般的にゼーマン減速ナトリウム原子線は 30m/s ぐらいで、これは 1K の運動エネルギーに相当する。これは磁気光学トラップ (MOT) に原子を捕捉するには十分低い温度である。我々のゼーマン減速器の他に無い特徴は最大 10^{12} 個/s の高い流量の低速原子が得られることにあり [96]、これによって 1、2 秒で MOT に 10^{10} 個以上の原子をロードすることが可能になる。
- ドップラーモラセス：低速原子線は光モラセスによって止められ、これは文献 [66] に最初に報告され、文献 [97] に解説されている。モラセスの通常の配置は真空チェンバー内に 6 本のレーザー光が交差している。ドップラーモラセスは原子の温度を 1 K またはそれ以下に下げる。
- 磁気光学トラップ：光モラセスにおける冷却は磁気光学トラップの特徴の一つである。これは原子を冷却するだけでなく、原子を閉じ込めて高密度 (典型的には 10^{10}cm^{-3} 10^{12}cm^{-3} の間) に圧縮する。磁気光学トラップは 1987 年に最初に実現された [98] (解説は [99, 97] をみよ)。
- ダーク SPOT トラップ：磁気光学トラップの変形版において多くの個数の原子に対して高密度が得られている。それはレーザー冷却および捕捉に必要なレーザー光を吸収しない超微細構造のダーク状態に保持するものである [87]。この方法は、光の吸収や光誘起衝突によるトラップ損失による通常の磁気光学トラップの限界を避けることが可能である [100]。必要とされる閉じ込めと冷却は、原子を短い時間の間明るい (光と共鳴する) 超微細状態に周期的に戻すことによって得られる。これらの 2 状態の間の分布を最適化することにより、約 2 桁の密度向上をもたらす。ダーク SPOT トラップは JILA [1] および MIT [2]、また他のグループ [101, 102, 103, その他] において鍵となる技術であった。

- 偏光勾配冷却：偏光勾配冷却によってより低い温度が得られる（最初の実演の報告が [104] に、その解説が [105] にある）。この冷却機構は磁気光学トラップの中心において既に存在する。しかし、より低い温度は MOT の磁場コイルを切って、さらに短い時間の間、最適化された偏光勾配冷却を行う事によって得られる。我々は通常、ナトリウム原子において 50-100 μK の温度が得られ、これは報告されている最低温度よりも若干高いが [105, 106]、おそらくこの理由は我々の実験における原子数が多いことと、高い原子密度によるものである [107]。
- 蒸気セルトラップ：多くの実験において、最初の段階（原子線の減速）は、室温で熱分布する蒸気の低エネルギー側の裾から直接原子を磁気光学トラップにロードする方法に置き換えられる [108, 85]。しかし、磁気トラップおよび蒸発冷却の超高真空に対する厳格な要求が蒸気圧の上限を与え、このためロードの速さを制限する。多くの実験においてはダブル MOT の技術を用いる [109, 110, 111]。これは高い蒸気圧の MOT が原子を集め、これは周期的に別の超高真空で動作する MOT に送られる。これ以外には蒸気セルから作り出される低速原子線を用いる方法がある [112, 113, 114]。

ほとんど全ての BEC 実験において、予備冷却は磁気光学トラップにおいて行われ、原子は蒸気セル MOT から取り出される、もしくはゼーマン減速器から作り出される低速原子線からロードされる。

これらの従来の光による冷却および捕捉の方法においては、その温度は自然放出による加熱によってその限界が与えられ、その一方、密度は放射トラップ効果および励起状態の衝突によるトラップロスによって制限される。より高度な冷却法（「反跳限界以下」冷却技術）、例えばラマン冷却 [115, 116]、速度選択的コヒーレントポピュレーショントラッピング [117, 118] などが開発されてきたが、今までの BEC 生成にはこれらは使われていない。標準的なレーザー冷却法によって達成される位相空間密度の最大値は BEC 実現には 5 桁足りない。一方、反跳限界以下の冷却法を用いるとこれが 300 分の 1 の間に入る [119, 120]。蒸発冷却法の実現のし易さとその高い効率によって（2.4 節）、レーザーによる予備冷却の目的は、非常に低い温度を得たり、高い位相空間密度を得ることにあるのではなく、むしろ効率良く蒸発冷却を行うための高い弾性衝突確率を確保することにある。予備冷却のもう一つの目的は多数の原子を集めることにある。これはいくつかの点で重要である。(1) より大きな原子雲を磁気トラップへその密度を下げないで移行するのははるかに簡単である。(2) 蒸発冷却はより多くの原子を失うことによりこれを速く行うことができる。(3) 多くの BEC の研究においては、大きな凝縮体の方を用いて S/N 比を向上する方が有利である。

標準的なレーザー冷却法は、レーザー光の偏光、周波数、そしてパワーに対して非常に許容範囲が広く、また敏感ではない。ほとんどの BEC の実験は 1 桁ほどの大きさの余裕がある。このため、凝縮体生成の最適化を一度行えば、光学系のアライメント、トラップへのローディング、磁気トラップへの移行、蒸発冷却、その他の点において最適点以下の条件で始めることができる。しかし最良の出発点は全てを最適にする！ 我々の実験装置においては、今までの経験上、確実に MOT へ多くの原子をロードすることが蒸発冷却によって BEC 生成を成功に導くことを保証することが分かっている。

2.1.2 低温技術による予備冷却

ボーズ凝縮体の原子数のボトルネックはレーザー冷却可能な原子数である。ダーク SPOT トラップは超微細構造のうち光と共鳴しないダーク状態にほとんどの原子を「隠す」ことによってトラップロスとトラップ光の吸収を緩和する。しかし究極的には磁気光学トラップのいつもの限界がダーク SPOT にも適用され、2 桁高い密度となる。レーザー冷却の厳格な限界は可能なレーザー光の光子数によって課せられるかもしれない。ゼーマン減速器では一個の原子を減速するのに約一万個の光子が使われる。10mW のレーザー光を用いた減速光線は完全にこれが用いられると一秒間に最大 3×10^{12} 個の原子を減速する。

低温技術による予備冷却はこれらの制限を受けず、はるかに大きなサンプルを実現することができる。この方法は MIT [121] およびアムステルダム [122] において水素を磁気トラップにロードするのに用いられた。（最

も大きなアルカリ原子の凝縮体より 40 倍大きい) 10^9 個の水素原子のボーズ・アインシュタイン凝縮がこの方法によって生成された [4]。

低温の環境によって熱平衡によって予備冷却する考えは最近、ドイル等のグループによって多くの常磁性体の原子および分子に拡張された [123, 124]。これらの実験では分子は ^3He 原子の緩衝気体によって予備冷却され、磁気トラップへ入れられる。ロード後、 ^3He 原子はセルの温度を下げて排出され、 ^3He 圧力は無視できるレベルまで下げられる。この後に蒸発冷却を用いて捕捉原子の温度を下げるのが可能になる。

2.2 保存力による原子トラップ

保存力による原子トラップは BEC における二つの重要な役割を満足する。これは原子を冷却する間、これを密に圧縮し、また凝縮体を調べる間、これを保持する。原理的に、十分小さな加熱確率を持つものならどんなトラップも用いることができる。保存力によるトラップポテンシャルは DC 磁場 (2.3 節)、AC 磁場 [79]、マイクロ波 [125]、そして共鳴から遠く離れたレーザー光によって実現されてきた (8 節)。

冷却中のトラップに対する要求は凝縮体を保持することに対するものよりも厳しいものとなる。第一に、冷却時間 (一般的に蒸発冷却の場合には 30 秒) は、BEC に対する実験を行う時間よりも通常、はるかに長い。このため、低い加熱率およびトラップロス確率が必要とされる。さらに、冷却に対しては、トラップの深さおよび体積は、初期の原子雲を保持するのに十分おおい必要がある。今までに磁気トラップ (2.3 節) と蒸発冷却 (2.4 節) の組み合わせがこれを達成してきた。蒸発冷却は光を用いた双極子トラップ内においても観測されたが [71]、位相空間密度のほんの 30 程度の増加しか得られていない。ラジオ波による蒸発冷却は特に磁気トラップに組み込むのに有効でまた簡単である。たぶん、マイクロケルビン領域において MOT がそうであったように、この組み合わせがナノケルビン領域の温度で働く馬車馬のようになることであろう。しかしいつでも改良の余地があるもので、磁気トラップ中の蒸発冷却に必要とされる衝突の特性を持っていない原子に対して特にそうである (2.6 節)。正離調 [126, 120, 127]、近赤外 [72]、また CO_2 レーザー [128, 129] を用いた共鳴から遠く離れた光によるトラップにおいて顕著な発展がなしとげられつつある。

冷却後のトラップに対する要求は異なったものになる。また凝縮体を保持するためにはこれ以外のオプションも可能になる。我々の最近の光で BEC を閉じ込める実験では (8 節)、光双極子トラップがボーズ・アインシュタイン凝縮体をこれより高い温度の原子の場合よりもはるかに簡単にこれを閉じ込めることができた。凝縮体に対するトラップはレーザー冷却原子に対するよりもはるかに弱くすることができ、これを簡単に組み込むことができ、レーザー光線の指向性の揺らぎ、強度揺らぎ、そして自然放出による加熱の効果を大きく低減することができる [130]。

最初の実演以後は使われなくなったいくつかのトラップがある。マイクロ波によるトラップは最初は水素原子に対して示唆されたが [131]、これはレーザー冷却セシウム原子を用いて実現された [125]。場の極大値にトラップする AC 磁気トラップは 1985 年に示唆され [132]、1991 年に実現された [79]。最後に、AC 電場は場の極大値にトラップするまた別の可能性を提供する [133, 134]。これらの全てのトラップはやや弱く、光と磁力の組み合わせに比べて明らかに有利な点は無いように思われる。最近のレター論文に原子トラップの多くの参考文献がある [135]。

2.3 磁気トラップ

BEC 実験における磁気トラップの主要な役割は予備冷却原子を蓄え、高い衝突確率および効率良い蒸発冷却を達成するためにこれを圧縮することにある。高い衝突確率を得るためにとる必要がある段階、これにはモード整合した原子の移行を含むが、これらをこの節において議論する。圧縮後の衝突確率は磁気トラップに対する最も重要な指標に関して示唆する。これは磁場のパラメーターに関係する。

中性原子の磁気トラップは 1985 年に最初に観測された [82]。その直後に密度およびトラップ原子数に一桁の改善が MIT およびアムステルダムにおいて超伝導トラップおよび異なるロード方法によって達成された [83, 121, 122]。磁気トラップの重要な側面は文献 [93, 136, 45, 48, 15] に議論されている。

磁力はアルカリ原子のように不対電子を持つ原子に対して強く働き、このような原子はボーア磁子と同じ大きさの磁気モーメント μ_m を持つことになる。しかし、最初に磁場による閉じ込めが観測されたのは中性子であることを指摘しておくのは意味があることである [137]。この中性子はボーア磁子の 1000 分の 1 の大きさの磁気モーメントしか持っていない。

磁気双極子と外部磁場との間の相互作用は $-\mu_m \cdot B = -\mu_m B \cos \theta$ によって与えられる。古典的には、 $-\mu_m$ の磁場の方向の周りの速い歳差運動のため、磁気モーメントと磁場との間の角度 θ は一定である。量子力学的には、磁場中のエネルギー準位は $E(m_F) = g\mu_F B$ と与えられ、ここで g は g 因子、 m_F は角運動量 F の z 方向成分の量子数である。古典的な \cos の項はここでは新たに m_F/F に置きかえられている。定数 θ の古典的な描像はこの系が一つの量子状態 m_F に留まり続けることと等価である。

原子トラップは磁気ポテンシャルエネルギー $E(m_F)$ の極小点が必要である。 $gm_F > 0$ (場の弱い方へ向かう力を受ける状態) に対しては、これは磁場の極小値を必要とする。場の強い方へ向かう力を受ける状態 ($gm_F < 0$) は定常磁場によっては捕捉できない。なぜならマクスウェル方程式は自由空間中に磁場の最大を許さないからである [138, 80]。

磁気トラップは唯一、場の弱い方へ向かう力を受ける状態の原子のみを捕捉するため、もし原子が場の強い方へ向かう力を受ける状態に遷移するとトラップから失われてしまう。このような遷移はトラップ内の運動によって引き起こされうる。なぜなら原子はその大きさや方向が変化している重心系から磁場を見るからである。原子の磁気モーメントが断熱的に磁場の方向に追従するときのみ唯一、トラップは安定になる。これは場の方向 θ の変化率が磁気モーメントの歳差運動よりも遅くなくてはならないことを要求する。

$$\frac{d\theta}{dt} < \frac{\mu_m |\mathbf{B}|}{\hbar} = \omega_{Larmor} \quad (1)$$

磁気トラップ中の $d\theta/dt$ の上限はトラップ周波数である。この断熱条件は磁場が非常に小さい領域において破られ、非捕捉状態へのスピントリップによるトラップロスを与える領域を作る。このスピントリップは「マヨナラフリップ」と呼ばれる [139]。

2.3.1 四重極子型トラップ

静磁場トラップには二つの基本形がある。磁場の最少が磁場のゼロを横切るものと、最少値が有限の大きさの磁場を持つものである [136]。磁場のゼロ点を横切るトラップはふつう線形なポテンシャルを作り、これは磁場、 $B_x = B'_x x$ 、 $B_y = B'_y y$ 、 $B_z = B'_z z$ の傾きによって特徴づけられる。マクスウェル方程式は $B'_x + B'_y + B'_z = 0$ を要求する。軸対称な場合は球形四重極場となる。これは $B' \equiv B'_x = B'_y = -B'_z/2$ となる。このような配置は二つのコイルを反ヘルムホルツ配置にすることによって実現される。これは中性原子を最初に磁場でトラップするのに用いられた [82]。

線形なトラップは放物面のポテンシャル最少値を持つトラップに比べて閉じ込めの点で有利である (2.3.2 節)。これは以下の簡単な議論によって確かめられる。捕捉原子雲から距離 R_{coil} だけ離れて、コイルの位置で磁場 B_{coil} を作り出すコイルは磁場勾配 $B' \approx B_{coil}/R_{coil}$ と、磁場曲率 $B'' \approx B_{coil}/R_{coil}^2$ を作り出す。磁場勾配 B' の線形ポテンシャル内の大きさ r の原子雲は磁場曲率 B'/r の放物面ポテンシャル内に同じ大きさで閉じ込めることができる。これから線形閉じ込めの有効曲率 $B''_{eff} = B'_{coil}/r$ を定義することができる。これは放物面トラップの曲率を R_{coil}/r だけ超えるもので、一桁またはそれ以上になる。

アルカリ原子の最初の蒸発冷却の実演に線形トラップが用いられたとき [88, 89]、磁場がゼロ近傍のマヨラナスピントリップ [139, 82, 140, 93, 141] によるトラップロスに直面した。速度 v で動く原子に対しては、トラップ中の「穴」の有効な大きさは $\sqrt{2\hbar v/\pi\mu_m B'}$ となり、これは $\mu_m = \mu_B$ 、 $v=1\text{m/s}$ 、および $B' = 1000\text{G/cm}$

に対して約 $1\mu\text{m}$ となる。この穴が原子雲の直径と比べて小さい限り、(1分以上も) 長い捕捉時間が可能で、このようなトラップ中の蒸発冷却を用いて2桁以上の位相空間密度の増加が行われた [142]。しかし、温度が下がるにつれて、穴によるトラップロスさらなる冷却を妨げることになる。穴の大きさは原子の熱運動する速度に依存し、原子が冷却されると穴の大きさが小さくなるが、原子雲の直径は温度と共にもっと速く小さくなるため、ロス確率は T^{-2} の依存性を持つようになる [142, 143]。

穴をふさぐ二つの方法が実演された。一つの解決法は球形四重極場に回転するバイアス磁場 B_0 を加える方法である。回転磁場の周波数は原子の軌道周期周波数よりもはるかに高く、しかしラーマー周波数よりもはるかに低くする。こうして得られる時間平均回転ポテンシャルは調和ポテンシャルで、しかし同じ大きさの DC 磁場よりもより小さな閉じ込めが行える [143]。時間平均ポテンシャルは

$$U_{TOP} = \frac{\mu_m}{2} (B''_\rho \rho^2 + B''_z z^2) \quad (2)$$

$$B''_\rho = \frac{B'^2}{2B_0}, B''_z = \frac{4B'^2}{B_0} \quad (3)$$

と書き表され、ここで $\rho^2 = x^2 + y^2$ は径方向の座標である。

回転磁場は磁場のゼロ点を半径 $r_D = B_0/B'$ の円の周りに動かす。マヨラナフロップにより、これはポテンシャルの深さを $U_{TOP}(r_D) = \mu_m B_0/4$ に制限する。大きなサイズのデスサークルを得るには多きな B_0 または小さな B' が必要となり、この両方とも閉じ込めを弱くする。TOPトラップは最初の BEC の実演に用いられた [1]。興味深い TOP トラップの変形種が提案され、これは回転する四重極場によってデスサークルを避けることができるものである [144]。

別の解決法は、小さく集光した正に離調したレーザー光線による光双極子力を用いて穴をふさいで、トラップの中心から原子をはじき返すものである (2.5.2 節も見よ) [2]。「光学的な栓によるトラップ」は非常に小さな閉じ込めを実現し、これはおよそ B'/x_0 の曲率に相当し、ここで x_0 は磁場がゼロの点からポテンシャルが最低の点までの距離で、典型的にはこれは約 $50\mu\text{m}$ である。ナトリウムにおける BEC はこの種のトラップによって最初に実現された [2]。

2.3.2 イオフェ・プリチャード型トラップ

バイアス磁場を持つことができる最低次の (このため最も小さい閉じ込めが可能な) トラップは調和ポテンシャルトラップである。z 方向に有限のバイアス磁場を持つ磁場トラップの軸方向の磁場は $B_z = B_0 + B'' z^2/2$ となる。マクスウェル方程式を用いることにより (そして軸対称を仮定すると)、次のような磁場の配置が導き出される [136]。

$$\mathbf{B} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{B''}{2} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

放物面トラップを用いた原子のトラップはプリチャードによって最初に示唆および実演され [145, 83]、これはこれ以前にプラズマの閉じ込めのために議論されたイオフェ型配置に似たものである [146]。我々はこれと同じ磁場の配置を持つトラップは全てイオフェ・プリチャードトラップと呼ぶ。

イオフェ・プリチャードトラップは2つの異なる領域がある。温度が $k_B T < \mu_m B_0$ の場合には、原子雲は3次元の非等方的な調和振動子のポテンシャルと感じる。温度が $k_B T > \mu_m B_0$ の場合には、ポテンシャルの径方向は線型性が優勢になり ($U_\rho = \mu_m B' \rho$)、軸方向は調和ポテンシャルになる ($U_z = \mu_m B'' z^2/2$)。この結果、線型トラップに比べて閉じ込めにおけるロスは先の 2.3.1 節で述べたほどには深刻なものでなくなる。

原子雲が小さい場合 (そして全ての凝縮体に対して)、トラップのポテンシャルは非等方的な調和振動子ポテ

ンシャルによって非常に良く近似できる。

$$U \simeq \frac{\mu_m}{2} [B''_{radial} \rho^2 + B'' z^2] \quad (5)$$

$$B''_{radial} = \frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \quad (6)$$

ある一定以上の軸方向の変位に対しては、径方向の閉じ込め効果は無くなる。これは曲率の径方向成分 $-B''/2xz$ が径方向の勾配 B' と干渉して打ち消し合うことによる。式 (4) より、この不安定点 z_{inst} は

$$z_{inst} = \pm \left(\frac{B'}{B''} - \frac{1}{2} \frac{B_0}{B'} \right) \quad (7)$$

もし $B''_{radial} \leq 0$ となると、不安定点は原点になり、径方向の閉じ込めは完全になくなる。大きなサイズの原子雲をイオフェ・プリチャードトラップにロードする際にはこの z_{inst} の鞍点に特別な注意を払う必要がある。これは 2.3.3 節で議論する。

イオフェ・プリチャードトラップは多くの BEC 実験に用いられてきた。最も忠実に適用したものは二つのピンチコイルと四つのイオフェバーからなるものである [136]。イオフェバーは径方向の勾配 B' を作り、一方、ピンチコイルはバイアス磁場と曲率項 B'' を作る。通常、バイアス磁場のほとんどはさらに別の「アンチバイアス」コイル対によって打ち消される。 B_0 を小さくすることにより、径方向の閉じ込めが増加する (式 6)。バイアス磁場はちょうどマヨラナ遷移を抑圧するのに十分な大きさにする。典型的な大きさは 1G であるが、我々の実験では 0.4G まで低くしており、さらに低い値でもたぶん引き続き安定であろう。もしバイアス磁場を打ち消しすぎると、磁場はゼロ点をまたぎ、マヨラナ遷移が起こるだろう (図 3)。ピンチコイルとアンチバイアスコイルは共に 500 から 1000G 台の大きさの磁場を作ることができるため、両磁場の打ち消し合いは注意深く制御する必要がある。同じ電源から直列に両方のコイルに電流を供給すると最良の結果が得られ、バイアスの微調整はアンチバイアスコイルの数巻きを注意深く動かすことによって行った。

ピンチコイルとイオフェバーは原子に非常に接近しているため、この配置は非常に効率良く小さな閉じ込めポテンシャルを作ることができる。これはいくつかの BEC 実験に用いられてきた [147, 4]。光の入射はピンチコイルを引き伸ばす、またはクローバーリーフ型配置 [148] を用いることによって改善することができる (図 4)。これはイオフェバーを取り除き、径方向の磁場勾配は各ピンチコイルの周りに四つのコイルの対に配置することによって作り出される。この配置はいくつかの実験に用いられ、これは x-y 平面内に 360°アクセス可能で、コイルは真空チェンバーの外に置くことができるからである。いくつかのより簡単な巻き線パターン (ベースボール型 [25, 136]、陰陽模様型 [136]、3 コイル [149, 150]、4D 型 [102]) によるものは B' と B'' を独立にコントロールすることができないが、径方向の閉じ込めは B_0 によって変えることができる。これ以外のイオフェ・プリチャード型としては永久磁石を用いたものや [151, 3]、強磁性体の芯を用いたトラップがある [152]。

2.3.3 モード 整合

蒸発冷却は、トラップ寿命よりも速く熱平衡状態に達する限り、位相空間密度を数桁の大きさに増加することができる。このため BEC 実現には、予備冷却原子の初期位相空間密度よりも、冷却中の衝突確率の方がより重要となる。衝突確率を最大にするため、原子は最適化された (モード 整合された) 磁気トラップに移行され、その後、断熱的に圧縮される。

原子の移行において位相空間密度が最大になる時、原子雲とトラップの間の「モード 整合」が得られる。これはまたトラップの圧縮後の弾性衝突確率を最適化する (2.3.4 節)。これは圧縮された原子雲の全ての性質、これには衝突確率が含まれるが、これらは原子数 N と位相空間密度 D によって完全に決定される。断熱的な圧縮は N と D を保存し、このため、原子を磁気トラップへロードする際の位相空間密度の減少分は圧縮されたトラップにおける減少分と等しく一致する。d 次元におけるポテンシャル $U(r) \propto r^{d/\delta}$ に対しては、温度 T にお

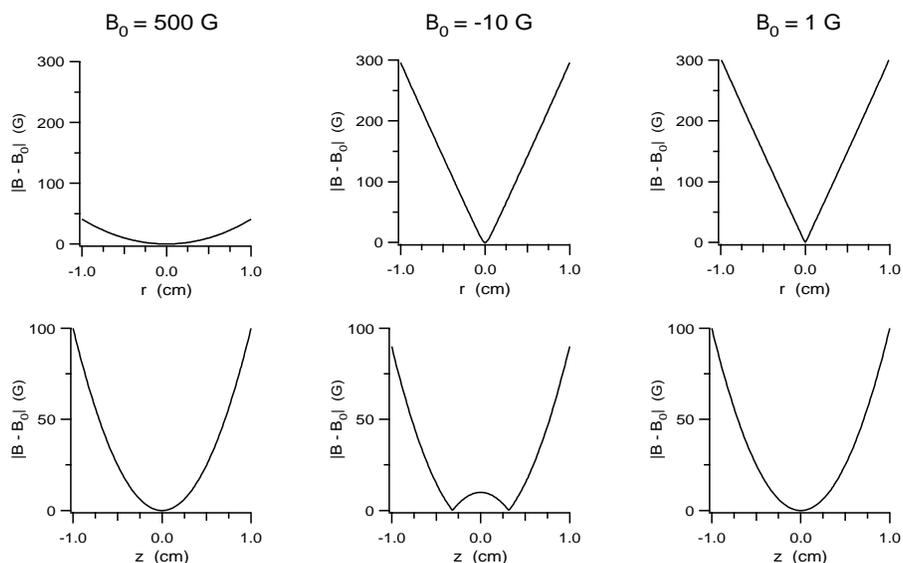


図 3: イオフェ・プリチャード型トラップにおけるバイアス磁場の補償は径方向の強い閉じ込めを行う上で重要である。径方向の磁場勾配 300 G/cm および軸方向の曲率 200 G/cm^2 の IP トラップにおける磁場を三つのバイアス磁場 B_0 に対して示す。上段は径方向の断面を、下段は磁場の様子の軸方向の断面を表している。最初の列においては、大きなバイアス磁場によって径方向の閉じ込めが弱くなっている。二番目の列においては、バイアス磁場の補償が大きすぎて、トラップの軸方向に沿って 2 箇所までゼロ磁場をまたいでいる。三番目の列においては、バイアス磁場は正しく調整されており、強い閉じ込めと磁場がゼロを横切っていない。

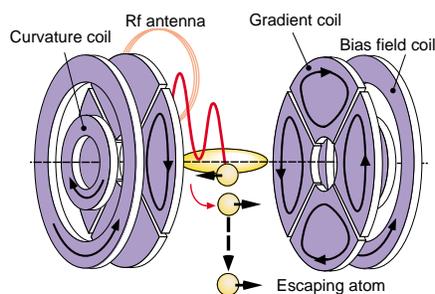


図 4: クローバリーフ型トラップにおいては、イオフェバーがピンチコイルを囲む 8 個のクローバリーフコイルに置き換えられ、360 度の光学的なアクセスが可能となっている。蒸発はラジオ波によって原子を非束縛状態に選択的にスピントリップすることによって行われる。

ける原子雲の体積は $V \propto T^\delta$ のスケールで変る。衝突断面積 σ 、熱運動速度 v の原子に対する衝突確率 Γ_{el} は

$$\Gamma_{el} = n\sigma v \propto D^{\frac{\delta-1/2}{\delta+3/2}} N^{\frac{2}{\delta+3/2}} \quad (8)$$

特に、三次元調和振動子トラップ ($\delta = 3/2$) に対しては、衝突確率は $D^{1/3}$ に比例する。このことから最適でないトラップへの移行による衝突確率のロスや位相空間密度のロスよりも深刻な問題にはならない。

原子の磁気トラップへの移行は、MOTの磁場を瞬時に切り、数ms間、偏光勾配冷却を行い、さらに瞬時に磁場トラップを立ち上げて原子の周りに新しいポテンシャルを作ることによって行われる。球対称にガウス分布した半径 r_0 、温度 T の原子雲を調和振動子トラップに移行する場合、もしポテンシャル $\frac{1}{2}\kappa r^2$ が $\kappa = \kappa_0 = k_B T / r_0^2$ のばね定数を持っていると、位相空間密度が保存される。もしトラップが急峻過ぎると、原子は移行によって加熱されることになる。もしこれが緩やか過ぎると、原子は非断熱的に膨張する。どちらの場合でも、位相空間密度が減少することになる。理想的なロードを「モード整合」という言葉を用いて言い表す。これはレーザー光線をシングルモードファイバーに結合するのと似ており、この場合には結合効率やレーザー光の集光が弱すぎても強すぎても良くない。

もし磁気トラップがモード整合されていないと、すなわち $\kappa = \kappa_0$ の場合には、位相空間密度 D は初期値 D_0 から減少する [153]。

$$\frac{D}{D_0} = \frac{8 \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^3} \quad (9)$$

この位相空間密度の減少はモード整合に対してゆるやかな依存性を持った関数となる。例えば、もし κ が κ_0 よりも4倍大きい、または小さい場合、位相空間密度は高々半分には減少しない。より重要なことは、衝突確率は最大値の80%を保ったままであることである。

イオフェ・プリチャードトラップにモード整合するする場合には、高いバイアス磁場 ($\mu_m B_0 > k_B T$) において行われる。これは次の条件が必要となる (式6)。

$$B'' = \frac{\kappa_0}{\mu_m} \quad (10)$$

$$\frac{B'^2}{B_0} = \frac{3\kappa_0}{2\mu_m} \quad (11)$$

初期の原子雲の半径 r_0 はトラップの不安定点までの距離 (式7) よりも十分小さいことが重要となる。さもないと、原子はトラップの外に逃げてしまう。式10と式11を式7に代入すると、不安定点までの距離 $z_{inst} = \sqrt{B_0(2\mu_m/3\kappa_0)}$ が得られる。この式から、大きなバイアス磁場と大きな磁場勾配が必要なことが分かる。これは都合が悪いことに、大電流の電源に対して速い立ち上がり時間が必要となる。

$\mu_m B_0 < k_B T$ に対しては、径方向の閉じ込めは線型になり、モード整合には $\mu_m B' \simeq k_B T / r_0$ が必要とされる。この条件においては、 $z_{inst} \approx r_0$ となることが分かり、このためバイアス磁場が低いとモード整合が不可能となる。

2.3.4 断熱圧縮

断熱圧縮は BEC 実験において重要な役割を担う。なぜならこれは蒸発冷却の前に衝突確率を増加させるからである。我々の最初の BEC の実演においては [2]、断熱圧縮によって衝突確率を20倍増加させ、ほんの7秒間の蒸発冷却の後に BEC が実現された！

断熱的であるためには

$$\frac{d\omega_{trap}}{dt} \ll \omega_{trap}^2 \quad (12)$$

であることが要求される。しかし断熱条件が破れるのはそんなに厳しくない。調和振動子トラップ ($\delta = 3/2$) において急激に圧縮を行うと、衝突確率は α ではなく、 $2\alpha^{3/2}/(1+\alpha)$ だけ増加する。5 倍だけ速く圧縮に対しても、可能な最大衝突確率の 75 % に達する。これは α 倍 (式 9) だけモード整合が最適値からはずれているトラップに原子を移行する場合の減少分と同じであることをここに記しておく。モード整合されていない原子の移行はモード整合された移行と急激に圧縮 (膨張) して同じばね定数のポテンシャルに移行するのと等価である。

イオフエ・プリチャードトラップにおいて圧縮を行うにはもう一つ複雑な問題がある。最初に球形原子雲をモード整合して移行するためにアスペクト比を ~ 1 に調整してあるとする。これはバイアス磁場を高くする必要がある。これに続く圧縮は最大の径方向の閉じ込めを得るためにバイアス磁場を下げる。この過程によって原子雲はたばこ状に細長く引き伸ばされる。通常の断熱条件 (12) に加えて、圧縮は弾性衝突確率よりもゆっくり行う必要がある。さもないと、非等方的な圧縮は非等方的な温度とそれに続く熱平衡化における位相空間密度の減少をもたらす。

最初の衝突確率が低いと、非等方的な加熱は避けられない。幸いなことに、自然は寛容である。 α 倍の径方向の圧縮は、これが断熱的に行われる場合には $\alpha^{1/3}$ 倍の、また急激に行われる場合には (再び熱平衡状態に達した時には) $(2\sqrt{\alpha} + 1)/3$ 倍の温度上昇をもたらす。弾性衝突確率は与えられた三次元調和振動子ポテンシャルにおける温度に反比例するので、熱平衡化よりも速く急激に二次元的な圧縮が $\alpha = 5$ の大きさだけ行われた場合、それでも得られる最大の衝突確率の 94 % が達成される。

さらに、通常、イオフエ・プリチャードトラップ中の径方向の圧縮はバイアス磁場を小さい領域 ($B_0 < k_B T / \mu_m$) にもっていき、径方向の閉じ込めは調和ポテンシャル型から線型に変化する。ピックス等に指摘され 8.2 節で議論されているが [154]、これは位相空間密度の e 倍の増加をもたらす。この増加はエネルギー準位の分布を変化させる衝突によるものであるが、この衝突によってエントロピーは保存される。

バイアス磁場 B_0 を断熱的に下げて行くと、衝突確率 Γ は次の様に増加する

$$\frac{\Gamma_{final}}{\Gamma_{initial}} = \frac{e^{1/2}}{2} \left[\frac{\mu_m B_{0initial}}{k_B T_{initial}} \right]^{1/2} \quad (13)$$

調和振動子トラップ中の断熱圧縮に対する評価を直線ポテンシャルに当てはめることができる。これは B' は曲率 $\mu_m B''_{equiv} = \mu_m B' / r = \mu_m^2 B'^2 / k_B T$ の調和振動子トラップの場合の同じ温度および密度の原子雲を閉じ込めることとし、ここで r は原子雲の大きさを特徴づけるものである。圧縮トラップを特徴づけるこの等価曲率を用いると、ファクター $e^{1/2}/2$ 倍だけを除いて、式 (13) と同じ結果が得られる。このことから $k_B T / \mu_m$ 以下にバイアス磁場を減少させてもこれ以上原子雲は圧縮されないことをここで強調しておく。

2.3.5 磁気トラップの性能指数

BEC 実験の磁気トラップを設計する際の主な最終目標は圧縮後の最大衝突確率である。このため、これをトラップの性能指数とみなす。三次元調和振動子においては、衝突確率は断熱圧縮によって増加し、これは三つの曲率 ($B''_{radial} B''_z$)^(1/3) の相乗平均に比例する。

イオフエ・プリチャードトラップにおいては、最終温度 T に達する最大の圧縮の後、等価的な径方向の曲率は $\mu_m B'^2 / k_B T$ となる。最終温度はトラップ周波数の相乗平均と共に大きくなることから、衝突確率は $B' B''^{1/4}$ に依存し、このことは曲率よりも大きな磁場勾配の方がより重要であることを意味する。

この結果を TOP トラップと比較してみよう。ここではデスサークルによるトラップの深さが $5k_B T$ になるまで TOP トラップを圧縮するものとする。これは蒸発冷却においては典型的なポテンシャルバリアの大きさである。この場合、径方向の有効曲率は

$$B''_{TOP,r} = \frac{\mu_m B'^2}{40k_B T} \quad (14)$$

このことは TOP トラップは $\sqrt{40}$ 分の 1 の大きさの B' の IP トラップに相当することを意味する。軸方向は、TOP トラップの有効曲率 B'' は通常、IP トラップより 100 倍大きい。性能指数 $B'B''^{1/4}$ は IP トラップの方がわずかに高いが、これは球形四重極子トラップが IP トラップよりも高い磁場勾配が得られることを考慮に入っていない。冷却後の凝縮体の閉じ込めに関して比較しようとする、TOP トラップと IP トラップの径方向の有効曲率はそれぞれ $B'^2/2B_0$ と B'^2/B_0 である。閉じ込めの最大値は、いかに B_0 を小さくするかに依存し、これはトラップの安定度 (式 1) を保証するための断熱条件によって決められる。通常、 B_0 は IP トラップの方が、TOP トラップの場合より小さい。これは TOP トラップにおける時間的に変化する磁場を用いると非断熱的なスピントリップを防ぐためにより大きなラーマー周波数が必要となるからである。しかし、両タイプのトラップにおける B_0 の下限はまだ実験によって明らかになっていない (理論的な取り扱い文献 [155] を見よ)。

要点はこうである。どちらのトラップも非常に良く働く。TOP トラップは元々回転しているため、渦を研究するのに有利かもしれない。またバイアス磁場の打ち消し合いに注意を払う必要がない。IP トラップの有利な点はアスペクト比を変えられることと、DC 磁場のみを用いることにある。いくつかのグループは蒸発冷却によって BEC を達成するのに十分な閉じ込めが得られる室温での電磁石を用いた磁場トラップを作っている。さらに小さな閉じ込めおよびこのことによる速い蒸発冷却が、永久磁石または超伝導磁石によって達成可能であるが、これらはその代償として自由度が多少失われる。

2.4 蒸発冷却

気体のボーズ・アインシュタイン凝縮は今まで蒸発冷却によってのみ得られている。蒸発冷却は熱分布の高いエネルギー側の裾の部分を持続的に取り除くことによって行われる。蒸発した原子は平均エネルギー以上のエネルギーを取り去り、これは残りの原子の温度は減少することを意味する。高いエネルギーの裾は衝突によって絶えず再分布される必要がある。このため、熱平衡が維持され冷却過程が保たれる。蒸発冷却は日常生活においてなじみの現象である。これはバスタブまたはコーヒーカップの熱湯が冷える機構である。トラップ中の原子の蒸発冷却は MIT において予めクライオスタットを用いた方法で予備冷却された水素原子を冷却する方法として開発された [53, 54, 156]。ヘスによって最初に示唆された後 [53]、すぐに実験によって確かめられた [54]。蒸発冷却は文献 [48, 15] に解説されており、ここでは簡単にその基本的な点を要約する。

蒸発冷却を行うのに重要な条件は、原子の寿命が衝突による熱平衡に達する時間より長いことである。トラップされた原子雲は非常に希薄である (固体や液体よりも約 10 桁ほど低い密度)。このため衝突による熱平衡には数秒かかる。大きな転機は 1994 年の 5 月に MIT および JILA のグループがレーザー冷却と蒸発冷却を組み合わせて、蒸発冷却の適用範囲をアルカリ原子にまで広げたことにある [88, 89]。

これらの実験では、ラジオ周波数の電波によって原子の蒸発が制御された。この技術はプリチャード [81] とワルラーベン [157] によって提案され、我々のグループによって最初に実演された [158]。この時、磁場でトラップされた原子が空間的に切り取られるのが確認された。位相空間密度の増加は MIT とボルダールのグループによって 1994 年 5 月の IQEC および ICAP-XIV において報告され [88, 89]、その後のさらに進展した後に論文に出版された [142, 143]。これ以外にアルカリ原子の蒸発冷却に対する初期の研究がライス大 [90] とスタンフォード大 [71] において行われた。

ラジオ波による蒸発冷却においては、ラジオ波が原子のスピンの向きを変える。この結果、中心に向かうトラップの力が反発力に転じ、原子をトラップから追い出す (図 4)。これはエネルギー選択的に行われ、なぜなら共鳴周波数は磁場に比例するため、すなわち原子のポテンシャルエネルギーに比例するからである。磁気副準位 m_F 間の遷移の場合、磁場強度 B に対する共鳴条件は $|g|\mu_B B = \hbar\omega_{rf}$ で、ここで g はランダウの g 因子で、 μ_B はボア磁子である。トラップポテンシャルは $m_F g \mu_B [B(r) - B(0)]$ によって与えられるため、全エネルギーが $E > \hbar|m_F|(\omega_{rf} - \omega_0)$ の原子だけが蒸発することになる (ω_0 はトラップの底においてスピントリップを起す周波数)。ラジオ波による蒸発冷却は他の蒸発冷却法に比べていくつかの有利な点がある [15]。第一に、

蒸発過程は完全に磁気トラップのポテンシャルの設計から切り離すことが可能である。特に、ポテンシャルの深さを下げるために、ポテンシャルの強さを弱める必要がない。これは自走蒸発に容易に達することを可能にし、これによって温度の減少は原子数の減少にも関わらず、トータルでは密度および衝突確率の上昇をもたらす。さらにラジオ波の共鳴条件を満足する全ての表面から原子は蒸発することが挙げられる。これによって三次元の世界空間上で蒸発が行われ、非常に効率が高くなる。

ここで簡単に我々の初期の解説から三年間の主な発展をまとめておく [15]。最初に、蒸発冷却は原子物理において標準的な技術になったおことである。1995 年における実験は唯一 6 グループだけがリストアップされるたが、その後、13 グループが蒸発冷却を行い、BEC を達成し、さらに増えるだろう! 2 番目に、蒸発過程のより詳細なシミュレーションが行われてきた [159, 160, 161, 162, 163]。特に、モンテカルロシミュレーションは実際の実験状況を考慮可能で [163]、冷却サイクルの最適化に関する洞察を提供することができる。アムステルダムにおける注意深い研究によって、鞍点での蒸発冷却は一次元で水素における BEC 達成のボトルネックになったことが示された [164]。この問題は最終的にはラジオ波による蒸発冷却を用いることによって克服された [4]。いくつかのグループはデスサークルによる TOP トラップにおける蒸発冷却を報告している [103, 165, 101]。この方法は 1 次元または 2 次元となり、これはデスサークルの向きに依存する。しかしこのことによる不都合は報告されていない。

ルビジウム原子の異なる超微細構造状態間の協同冷却が観測された [25]。協同冷却と低温の緩衝ガスによるローディング [124] を組み合わせることによって、冷却可能な原子種数は大きく拡大されるに違いない。最後に、トラップポテンシャルの断熱的な変形による冷却が達成されている [154, 21]。この可逆で、断熱的な方法と非可逆な蒸発冷却の関係は 8.2 節で議論する。

2.4.1 トラップロスと加熱

蒸発冷却には弾性衝突と非弾性衝突の望ましい比率が必要である。アルカリ原子においては図 6 に示すように、温度と密度における多くの領域において主要なロスの機構は背景原子との衝突である。このため、実験家は極超高真空の環境で原子のロードとトラップの技術を融合するのに多くの労力を注いだ。標準的な方法はイオンポンプとチタンサブリメンションポンプを組み合わせるもので、これに差動排気を用いて原子源の高い圧力の原子からトラップ原子を隔離するものである。我々の原子線源 (原子線オープン) は磁気トラップから 1 メートル分離しており、さらに 10cm の長さの細管によって良好な差動排気を確保している。2 秒間の MOT へのロードの後、原子線オープンの近くのシャッターを閉じ、サンプルを完全な超高真空下に隔離する。もっとコンパクトな実験装置によって高い蒸気圧の領域と超高真空領域を分離しようとすると、差動排気をより難しいものにする。

いくつかのグループは 1 分間の磁気トラップの寿命を得るためには 10^{-11} トル台の背景圧力が必要であることを報告している。トラップ原子あたりに背景気体との衝突確率は $n_{bg}\sigma_{bg}v_{bg}$ で、ここで n_{bg} と v_{bg} は背景気体分子の密度と速度を表す。衝突断面積 σ_{bg} は典型的には 10^3 \AA^2 程度で、分子の大きさよりもはるかに大きい。これは長距離のファンデスワース力によるポテンシャルと浅い角度の散乱が全断面積に対する主な寄与であることを反映している。背景気体との衝突は文献 [166, 167] に詳しく議論されている。

これ以外の考えられる加熱源は磁場の揺らぎが挙げられ、これはトラップポテンシャルを振動させる。文献 [130] の簡単なモデルはトラップ原子のエネルギーの指数関数的な増加の特性時間 t_{heat} は

$$\frac{1}{t_{heat}} = \pi^2 \nu_{trap}^2 S(2\nu_{trap}) \quad (15)$$

によって与えられることを予想している。ここで ν_{trap} はトラップ周波数で $S(\nu)$ は磁場の雑音のパワースペクトルである。 $S(\nu)$ の見積りは $\epsilon^2/\Delta\nu$ によって与えられ、 ϵ は帯域 $\Delta\nu$ 内の磁場の規格化された二乗平均平方根 (RMS) 揺らぎを表す。インダクタンスによる帯域を 1kHz に、トラップ周波数を 100Hz とそれぞれ仮定す

ると、

$$t_{heat} = \left[\frac{10^{-2} \text{sec}}{c^2} \right] \quad (16)$$

が得られる。1%の電流揺らぎは $t_{heat}=100$ 秒になる。このため、BECを得るには、電流の揺らぎが 10^{-3} から 10^{-4} の市販の電源が適当である。光トラップのように高いトラップ周波数の場合には安定度に対する要求はさらに厳しくなる。

これ以外の加熱源は機械的雑音があるが、これはそんなに深刻では無さそうである。用心のため、我々は実験装置の近くでは機械式ポンプは使っていない。しかし、これらのポンプが動作していても BEC にはなにも影響を与えていないことがあった。しかし、実験定盤に置かれたファンで冷却された RF 増幅器は BEC を得るのに邪魔になり、(ウレタン)フォームを用いて定盤から浮かしてやっと BEC が得られた。BEC は通常、寛容であるが、機械振動源は潜在的に問題があることを考えておくのが賢明である。

2.5 ボーズ・アインシュタイン凝縮の操作

BEC が実現されたら、この凝縮体の性質を異なった形や対称性において調べ、そしてさらにこの動的な振る舞いを明らかにしたくなる。凝縮体の非常に低い温度と原子が低温の表面と非常にくっつき易いことから、凝縮体に直接接触してこれを操作することは不可能なため、電磁場による操作は限られた形状のものになる。

2.5.1 磁場

磁場を用いて凝縮体を断熱的に膨張することが行われ [1, 168, 28]、アスペクト比を変えることができた。イオフェ・プリチャードトラップ (2.3.2 節) の磁場パラメータ B_0 , B' , B'' を変えることにより、凝縮体のアスペクト比を変えることができる。我々の実験においては、アスペクト比を 20 以上から 1 の間で変えた (図 5)。

磁場は原子の打ち上げにも利用できる。加速するモラセスによる標準的な方法は反跳エネルギー以下の温度の原子を大きく加熱することになる。このため、パルス状の磁場勾配を用いてボーズ凝縮体の原子泉への打ち上げを行った [10, 11]。

2.5.2 光双極子力

集光した非共鳴のレーザー光による双極子力は、凝縮体の顕微操作器として用いることができる。これは磁石やコイルでは不可能で、これらはふつう、トラップの中心から数 cm 程度離れている。光双極子力は変形した (非放物線の) トラップポテンシャル (8.2 節) を作るのに用いられた。我々はトロイダル状の凝縮体を作り、これによって超流動 (6.8.2 節) を見る努力をし、また二重井戸を実現して、空間的に分離した凝縮体とその後干渉させた [169]。最後に、(近)赤外光を用いて凝縮体の全光学的な閉じ込めを実現した [170]。磁場と大きく共鳴から離調した光の組み合わせは非常に万能で、磁場は通常の閉じ込め効果を供給し、正に離調した光はトラップポテンシャルにブリップ (輝点) を加えるのに、負に離調した光は穴を加える。このため、我々は凝縮体を整形し、切り刻み、打ち出し、揺さぶり、そして攪拌するための全ての道具を持っていることになる！

2.5.3 ラジオ波

ラジオ波はトラップ原子の超微細状態を変えるのに用いることができる。これは原子をトラップ可能な状態から非トラップ状態へ切りかえるのに用いられ、原子レーザーの出力鏡が実現された [171](??節)。またラジオ

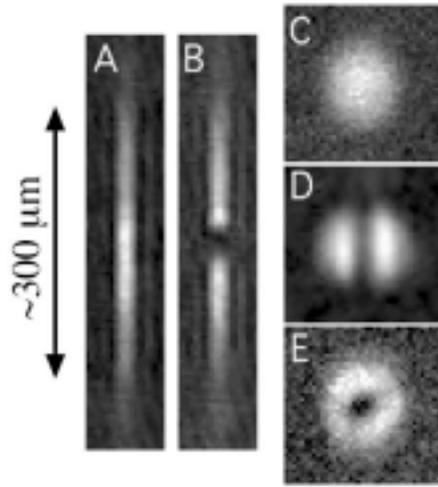


図 5: ボーズ・アインシュタイン凝縮を整形する！その場測定によって得られた磁気トラップおよび非共鳴の正の離調のレーザー光によって実現された様々な凝縮体の形の位相コントラスト像を示す。クローバーリーフ型トラップにおいては、トラップ形状は径方向の閉じ込めを減少することによって長く伸ばされたもの (A,B) から球形のもの (C-E) まで変化する。集光した正の離調のレーザーによる光シフトは原子を追い出すのに用いることができる。レーザー光線の強度と形状に依存して、この結果は間隔が調整可能な二つの凝縮体 (B,D)、またはトロイダル (ドーナツ型) 凝縮体 (E) となる。全ての像は同じスケールである。図は文献 [14] からとってきたものである

波を用いた方法は凝縮体をトラップ状態間の移行にも用いられ、光トラップ [170] または二光子ラジオ波遷移が用いて磁場トラップにおいても行われた [172, 173, 174]。

この他の磁場の重要な点は磁気トラップの深さを設定するのに用いることができることである。我々はこの方法、これは「ラジオ波による凝縮体のシールド」を用いてトラップの深さをマイクロケルビン程度に制限して凝縮体の寿命を非常に長くすることができた [148]。これに対する暫定的な説明は、これはエネルギーの高い原子が凝縮体の他の原子と相互作用する前にトラップから追い出すからである。このような高いエネルギーの原子は非弾性衝突や超高真空チェンバー内の温度が高い背景気体との衝突によって作り出される。しかし、「ラジオ波シールド」が加熱やトラップのロスに及ぼす影響の詳しい研究によってもまだつじつまの合う描写は見出されていない [166, 167]。

2.5.4 ブラッグおよびラマン遷移

交差する二つのレーザー光線によって引き起こされる二光子遷移は各種の方法で凝縮体の操作に利用することができる。光子の吸収と誘導放出によって運動量が凝縮体に移行される。ブラッグおよびラマン散乱を用いて凝縮体のビームスプリッターや凝縮体の最大 12 個の光子の反跳運動量分の加速が行われた [175, 165]。

2.5.5 音波の励起

音波は平衡状態に摂動を与えて振動する応答を作り出すことによって励起される。この節で議論する過程は全てこの音波の励起に用いられるもので、その多くの結果は 6 章で解説する。ここでは簡単に音波を励起するための多くの異なる方法をまとめておく。

トラップ磁場の変調は (トラップ中心を移動することにより) 重心の双極子振動を励起したり、(トラップの強

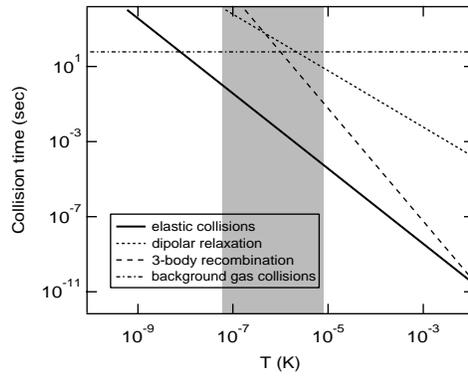


図 6: ナトリウム気体のボーズ・アインシュタイン凝縮の臨界密度における弾性および非弾性過程の平均時間の温度に関する関数。試料の寿命が 0.1 秒を越え、弾性衝突確率が 1 Hz よりも速いような「BEC の窓」はグレーの部分である。この図は散乱長 $50 a_0$ および二体および三体非弾性衝突の確率 $10^{-16} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ および $6 \cdot 10^{-30} \text{cm}^6 \text{s}^{-1}$ をそれぞれ用いている。

さを変調することによる) 形状の振動を励起するのに用いられた [176, 177, 178, 30]。角運動量を持った ($m \neq 0$) 集団モードの励起にはトラップの軸対称性を破る何らかの変調が必要になる [176, 178]。

我々のグループでは非常に共鳴から離れたレーザー光を用いてトラップポテンシャルの変調によっては得られない励起を起した。これは非対称的な双極子振動 [30] と局所的な音波のパルスである [28]。

ラジオ波遷移は様々な方法で集団励起を起す事ができる。RF 蒸発冷却によって原子雲の羽を突然引き伸ばすと、形状の振動が引き起こされる [29]。急激な出力結合は [171]、平衡状態よりも大きな原子雲を作ることにより平均場エネルギーを減少による形状の振動を引き起こす。凝縮体を別の超微細構造状態に移行することにより、原子の磁気能率または平均場エネルギーを変化することができる。両方の場合とも振動を引き起こす。この技術は 2 つの超微細構造状態間の散乱長の違いを決定するのに用いられた [173]。

2.6 BEC のための原子

BEC の実験を解説するのにその主役である原子それ自身の説明が無ければ不完全である。BEC に対して唯一欠く事のできない性質は原子がボーズ粒子であることで、これはそんなに限定されるものではない。ベリリウムの例外を除いて、全ての安定な元素は少なくとも一つのボーズ粒子の同位体を持っている。BEC の実験に対して原子の選択を主に決定するのは冷却およびトラップ技術によってである。磁場によるトラップは大きな磁気双極子能率を持った原子が必要で、このため不対電子を持っている必要がある。レーザー冷却は市販の連続光レーザーが入手可能な可視または赤外領域に強い遷移を持った原子が望ましい。現在までに、水素、リチウム、ルビジウム、なナトリウムの BEC が実現され、セシウム、カリウム、準安定状態ヘリウムおよびネオンの実験が進行中である。

蒸発冷却に必要なことは弾性衝突確率 (蒸発冷却をもたらす) と非弾性衝突確率 (トラップロスと加熱をもたらす) の比が望ましい値であることである。蒸発冷却の観点から関連する原子の衝突の性質が文献 [15] に議論されており、またこの本のダン・ハインチェンとダン・クレップナーの講義録にもある。いくつかの解説論文 [179, 69, 68] において低温衝突の領域の研究がまとめられている。

図 6 にナトリウムに対する状況を示す。弾性およびいくつかの非弾性衝突確率を (BEC の転移密度における) 温度に対してプロットしたものである。弾性衝突確率が非弾性衝突確率よりもはるかに大きい領域は示されている温度範囲のほとんどに広がっている。この領域内において原子の寿命が 0.1 秒以上で、弾性衝突確率

が 1Hz 以上の「BEC の窓」をグレーで示している。この領域が温度と密度において数桁の範囲をカバーすることからも、パラメーターの大きな範囲で BEC の研究が可能である事が分かる。我々の実験において、密度が 2×10^{13} から $3 \times 10^{15} \text{cm}^{-3}$ の間の凝縮体を実現し、100nK から $5 \mu\text{K}$ の間の温度で BEC 転移を越えた (8 節を見よ)。BEC はこれよりさらに低温および高密度の領域において研究することは、BEC をいったん作ってからこれを膨張または圧縮することによって可能になる。この BEC の窓は初期の衝突の性質の評価結果と一致しているが [67]、この窓が存在していたことは非常に幸運であった。現在、極低温における衝突の性質は最初の予想よりはるかに複雑であることが分かっている。実験によって磁気トラップ中のセシウム原子に対してはこの窓が全く存在しないだろうことが示唆されており (この本の J. ダリバードの講義録および文献 [180, 181] を見よ)。 ^{85}Rb 原子は中間的な温度において非常に小さな弾性散乱断面積を持っており、この温度では自走蒸発冷却に達することは非常に難しい [182]。 ^{87}Rb の超微細構造の上状態と下状態間のトラップロスと加熱の違いはまだ解明されていない [166]。このためナトリウムと ^{87}Rb がほとんど理想的な性質の組み合わせを持っていることは幸運であった。

3 ボーズ・アインシュタイン凝縮を探る技術

ボーズ凝縮気体について知っている全てのことは光を用いた探査法によって得たものである。「接触探査」は用いることができない。なぜなら資料は $10 \mu\text{m}$ の大きさの探針 (プローブ) よりもはるかに小さい ($\sim 10^7$ 個の原子)。このため、原子は探針の温度に熱平衡化し、その逆は起こらない。RF 蒸発の「冷却能力」では一分間あたり最大 10^8 個の原子を冷却可能である。これはセンサーのほんの先端を冷却するのに数ヶ月かかることになる。幸いな事に、光学的探査法は非常に万能で、光散乱法が簡単に希薄原子試料に適用できることは凝縮系よりもはるかに有利な点である。

ボーズ・アインシュタイン凝縮を観測する二つの重要な技術はその場測定および飛行時間法による画像測定である。トラップ状態もしくは自由膨張状態のどちらの場合も、原子の密度分布を反映した像を得る。この節では原子と光の間の基本的な相互作用および吸収および分散による画像測定の原理を議論する。最後に、興味がある読者は補遺 A を参照してもらい、ここでは吸収および位相コントラスト画像の処理の技術を議論している。

3.1 原子と光の相互作用

原子と光線の相互作用には 3 つの過程が含まれる。光子の自然吸収、光子の再放出、そして透過光の位相シフトである。これらの性質は吸収、蛍光、そして分散画像測定法においてそれぞれ用いられる。

相互作用は原子の複素屈折率 $n_{ref} = \sqrt{1 + 4\pi n\alpha}$ によって記述することができる。ここで α は原子の分極率、 n は原子の密度である。ここで $n_{ref} - 1 \ll 1$ を仮定すると、2 準位系の屈折率は (回転波近似において)

$$n_{ref} = 1 + \frac{\sigma_0 n \lambda}{4\pi} \left[\frac{i}{1 + \delta^2} - \frac{\delta}{1 + \delta^2} \right] \quad (17)$$

で書き表され、ここで σ_0 は共鳴断面積 (2 準位原子の場合 $\sigma_0 = 6\pi\lambda^2$)、 $\delta \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\Gamma/2}$ は離調を半値半幅で企画化したものである。もし 2 準位以上の場合には (例えばゼーマン副準位など、3.5.4 節を見よ)、いくつかの共鳴が分極率に寄与する。

式 17 はプローブレーザー光線が弱い極限を仮定している。飽和は近共鳴の像においては無視できなくなる。この場合、ローレンツ型の吸収線の形状に対して δ^2 を $\delta^2(I/I_{SAT})$ に置きかえる必要がある。 I_{SAT} は遷移の飽和強度で、強度 I は x, y (光線の形状)、 z (吸収による) に依存する。

光が原子雲の同じ (x, y) 座標から入射および出射するとすると (「薄いレンズ」近似を原子雲に適用すると)、

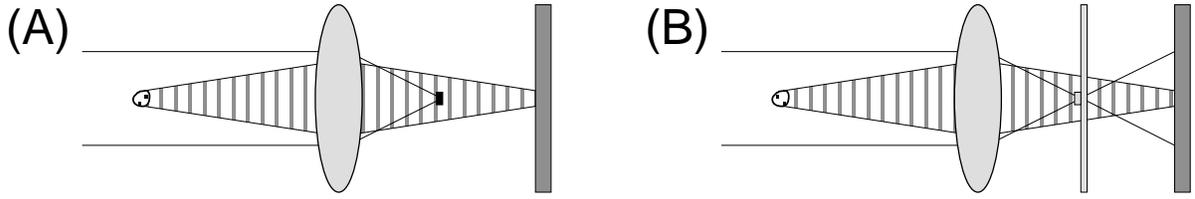


図 7: ダーク背景像 (A) および位相コントラスト像 (B) の実験配置。左からのプローブ光は原子によって分散的に散乱される。レンズのフーリエ面では、非散乱光はフィルタリングされる。ダーク背景像 (A) では、非散乱光はブロックされる。位相コントラスト像 (B) においては、非散乱光は位相板 (中心に $\lambda/4$ の盛り上がりまたは凹みがある光学平面) によって位相シフトされ、結像面において散乱光と干渉する

原子は単純にプローブ光を減衰および位相シフトする。

$$E = tE_0e^{i\phi} \quad (18)$$

透過係数 t および位相シフト ϕ はコラム密度 $\tilde{n} = \int n \cdot dz$ と σ_0 (式 17) の積に依存する。

$$t = e^{-\tilde{D}/2} = \exp\left(-\frac{\tilde{n}\sigma_0}{2} \frac{1}{1+\delta^2}\right) \quad (19)$$

$$\phi = -\delta \frac{\tilde{D}}{2} = -\frac{\tilde{n}\sigma_0}{2} \frac{\delta}{1+\delta^2} \quad (20)$$

ここで $\tilde{D} = \tilde{n}\sigma_0/(1+\delta^2)$ は非共鳴時の光学密度である。??節で光散乱の量子力学的な取り扱いを議論する。

ほとんどの BEC 実験は屈折率の実部および虚部の空間像に頼っている。これに代わる多くの点で補完的な方法は高分解能分光である。この場合、情報は吸収線のシフトと線幅の広がりから得られる。このような方法は唯一水素の凝縮体に適用された (この本のクレップナーとグレイタックの講義録を見よ)。しかしアルカリ原子に対してもドップラー依存のラマン散乱の形で適用することができる。

3.2 吸収および分散による方法

吸収像は原子にレーザー光線を照射して原子の影を CCD カメラで撮像することによって得る。光検出器は位相を検出できないため、吸収像は t^2 の空間的な変化を示している (式 19)。

透明な物体の像を得るため、光の位相シフトに入っている情報は光検出器で検出可能な強度の情報に変換する必要がある。顕微鏡においてはいくつかの方法がよく用いられる。1864 年、A. トップラーによってシュリーレン法が導入され、1934 年にはフリッツ・ツェルニケによって位相コントラスト法が導入された (これは 1953 年のノーベル物理学賞を彼にもたらした)。全ての分散を用いた方法は、プローブ光の散乱成分と非散乱成分が分離可能であることを用いており、このためこれらを独立に操作する。これは通常、非散乱プローブ光が集光する場所である結像系の像のフーリエ面における空間フィルターによって行われる。

ダーク背景像：空間フィルターの最も簡単な形は、フーリエ面に置いた不透明な物体によって非散乱プローブ光をブロックするものである (図 7)。

原子を通りすぎたプローブ光の場合 (図 8) は散乱光と非散乱光に分離することができる。

$$E = tE_0e^{i\phi} = E_0 + \Delta E \quad (21)$$

非散乱光をブロックするとダーク背景信号が得られる。

$$\langle I_{dg} \rangle = \frac{1}{2} |E - E_0|^2 = I_0 [1 + t^2 - 2t \cos \phi] \quad (22)$$

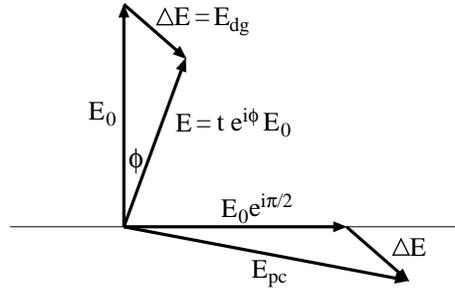


図 8: ダーク背景および位相コントラスト像の位相ダイアグラム。電場 E_0 の入力光線は原子によって散乱され、光は減衰および位相のシフトを引き起こし、電場 E となる。ダーク背景法は入力光と散乱光の電場の差 $\Delta E = E_{dg}$ の像をとるものである。位相コントラスト法は E_0 の位相を 90° だけ回転させることによって、 ΔE と E_0 の干渉を引き起こし、 E_{pc} を得るものである。

ϕ が小さい場合、ダーク背景信号は ϕ に関して二乗に比例する。

位相コントラスト像：位相コントラスト像はホモダイン検出法とみなすことができ、非散乱光が局発光として働き、散乱光と干渉する。これは像形成レンズのフーリエ面上において非散乱光を $\pm\pi/2$ だけ位相シフトすることによって実現される (図 7)。これは位相板によって行われ、光学平面の中心に小さな盛り上り、またはくぼみがあるものを用いる。位相シフトの結果を図 8 の位相ダイアグラムで示す。

結像面内の点の強度は

$$\langle I_{pc} \rangle = \frac{1}{2} |E + E_0 (e^{\pm i\frac{\pi}{2}} - 1)|^2 = I_0 [t^2 + 2 - 2\sqrt{2}t \cos(\phi \pm \frac{\pi}{4})] \quad (23)$$

ここで符号 \pm は位相板の部分に相当し、これは非散乱光の位相を $\pm\pi/2$ だけ変化する。 ϕ が小さいときには

$$\langle I_{pc} \rangle \simeq I_0 [t^2 + 2 - 2t \pm 2t\phi] \quad (24)$$

が得られ、これは ϕ に関して線形である。このため、位相コントラスト像はダーク背景像よりも信号が小さい場合には有利になる。

偏光コントラスト像：これとは別の分散を用いた像を得る方法はスピン偏極原子の非等方的な分極率を利用するものである [183, 3]。これはプローブ光の直交する偏光成分に対する異なる位相シフトを用いたものである。カメラの前の偏光子は非散乱光を遮り、ダーク背景像が得られる。偏光子を回転すると 2 つの偏光間の干渉を引き起こし、位相コントラスト像が得られる。

磁場が大きい場合、 σ_+ 、 σ_- および π 遷移間の縮退が解け、プローブ光の離調を適当に選んで、一方の偏光成分のみが原子の共鳴に近くなるようにして位相シフトを感じるようにすることができる。もう一方の偏光成分は一様な局発光の役割を果たす。

この方法はフーリエ面上における空間フィルターを必要としないという有利な点があり、直接光に対して簡単に補正ができる (A.2)。しかし、この方法は一般的には適用可能ではない。イオフェ・プリチャード型トラップに対する標準的な像を得る配置ではプローブ光は低いバイアス磁場の軸方向とは直交している。我々の実験における典型的な離調に対しては (これは励起状態の超微細構造よりもはるかに大きい)、位相シフトは両偏光に対して同じとなり信号はゼロとなる。しかし、位相シフトが偏光と独立であることは位相コントラスト像に対して有利となり、プローブ光の偏光には依存しなくなる。

希薄原子雲の像：分散および吸収法と一緒に議論することが可能である。先の取り扱いにおいて中心のスポットを、非散乱光を任意の位相量 γ だけ位相遅れを行い、 τ^2 だけ透過するような一般化した位相板に一般化して考える。吸収像 ($\tau = 1$, $\gamma = 0$)、ダーク背景像 ($\tau = 0$)、位相コントラスト像 ($\tau = 1$, $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$) が特別な場合として求められる。

結像面におけるある点の強度は

$$\langle I_{gen} \rangle = I_0 [1 + t^2 + \tau^2 + 2t\tau \cos(\phi - \gamma) - 2t \cos \phi - 2\tau \cos \gamma] \quad (25)$$

もしこれを $\tilde{n} = 0$ (または $t = 1, \phi = 0$) を中心として展開して、一次の項のみを残すとすると、

$$\langle I_{gen} \rangle = I_0 \tau^2 - I_0 \sigma_0 \tau \left[\frac{\delta}{1 + \delta^2} \sin \gamma + \frac{1}{1 + \delta^2} \cos \gamma \right] \tilde{n} \quad (26)$$

が得られる。

これはある任意の離調 δ に対して、信号は $\tau = 1$ および $\tan \gamma = -\delta$ の時に最大になることを示している。(絶対的な) 最大信号は $\delta = \gamma = 0$ とした時に得られ、これは共鳴吸収像の場合である。しかし、最大の位相コントラスト信号 ($\gamma = \pm\pi/2$) が $\delta = 1$ の時に得られるが、これは先の最大値に比べて半分になるだけである。ダーク背景像はどんな離調においても最適値から程遠い。

高い感度が通常問題になるのは、飛行時間法において膨張した原子雲の像をとる場合、または原子雲の羽状の空間分布の像をとる場合のみである [102]。なぜならトラップされた凝縮体は一般的に光学的に密であるからである。

光学的に密な原子雲の像：我々の実験における凝縮体の光学密度 (径方向) は 300 程度である。このような密度が高い原子雲を共鳴光でプローブすると、像は「真っ黒」になり、像から原子の密度を得ることは非常に難しくなる。

通常、吸収像の最適な離調は約 50 % の吸収である。しかし、離調がゼロで無い場合、原子の感受率は有限の実部を持ち、これは原子がレンズのように光を屈折するようになる。これは屈折した光を全て結像系で集光する限り、像には影響を与えない。さもないと、屈折光は誤った吸収信号として現れる。この効果の大きさは原子雲の場所によって変化するため、相対的および絶対的な密度の測定に影響を与える。

屈折角は、原子雲の直径 d 、最大位相シフト ϕ に対して、 $2\lambda\phi/\pi d$ と見積られる。この位相シフトが $\pi/2$ 以下である限り、物体の大きさが有限であるため、屈折角は回折角 λ/d よりも小さい。これより大きな位相シフトに対しては、屈折によって原子を通過した後の光は顕著な発散が加わる。回折限界の結像系に対しては、分離可能な最小の物体による回折光はちょうどレンズの大きさ分の立体角まで広がる。このため、分散の大きな物体 (すなわち位相シフトが $\pi/2$ 以上) は定量的な吸収像に対して空間分解能を悪くすることになる。

共鳴光の光学密度 $\tilde{D}_0 = \tilde{n}\sigma_0 \gg 1$ の原子雲に対しては、吸収像の最も高いコントラストは、光学密度が 1 に落ちる離調 $\delta = (\tilde{D}_0)^{1/2}$ において得られる。しかし、この離調では、原子雲は位相シフトが $\phi \approx (\tilde{D}_0)^{1/2}/2$ と分散が大きい。大きな原子雲に対しては、定量的な吸収像が引き続き可能で、これは (実際に) 用いられてきた [142, 102]。しかし、小さな原子雲に対しては、屈折の効果は限界を与える要因となる。

このような限界は大きな離調をとることによって回避される。しかし、離調を $\delta = \tilde{D}_0/\pi$ とすることにより位相シフトを $\pi/2$ に下げると、光学密度は $\tilde{D} = \pi^2/\tilde{D}_0$ に落ちる。光学密度 $\tilde{D}_0 = 300$ の典型的な凝縮体に対しては、吸収像は検出するには小さすぎる。これとは対照的に、分散像は高い信号レベルを維持する。

式 22 と式 23 はダーク背景および位相コントラスト信号が ϕ に関して周期的となることを示している。吸収像とは違って、分散像は ϕ が大きくても飽和しない。またフリンジの数を数えることによって任意の大きな位相シフトを測定することができる。しかし、大きな位相シフトは避けるべきで、分散信号が「波打つ」ことがなければ像をより簡単に解釈することができるからである。位相板によって非散乱光の位相を、負の離調に対しては遅らす ($\omega t \rightarrow \omega t + \pi/2$)、また正の離調に対しては進ませることにより ($\omega t \rightarrow \omega t - \pi/2$)、位相コントラスト像において広い範囲で近似的に線形となることが図 9 に示されている。このように位相板を選ぶことにより、信号が再び減衰する前の最大信号は入力光レベルの 5.8 倍になる。このため位相コントラスト像は吸収像よりも大きなダイナミックレンジを持つことになる。

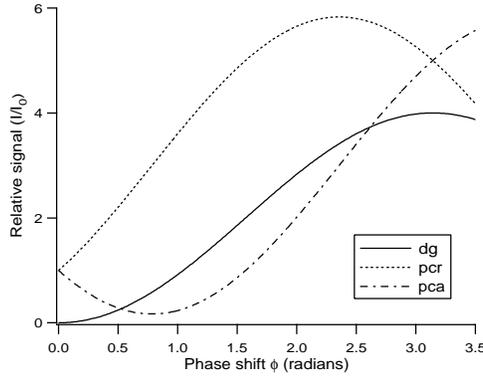


図 9: ダーク背景像 (dg) と位相コントラスト像において位相板が非散乱光の位相を遅らせる場合 (pcr) と進ませる場合 (pca) に対して、これを位相シフトの関数としてその相対的な信号を示す。負の位相シフトに対して (正に離調したプローブ光によって生成される)、(pcr) および (pca) は交換する。

3.3 光散乱の量子力学的取り扱い

プローブ光と原子の間の相互作用にさらに詳しく洞察はこれを量子力学的に取り扱うことによって得られる [184]。状態 $|i\rangle$ にある単一原子に対して、光散乱の微分断面積は全ての可能な終状態 $|f\rangle$ の足し合わせによって求められる。

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = C \sum_f |\langle i | e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | f \rangle|^2 \quad (27)$$

これは単にレイリー散乱に対する微分断面積である。ここではだ光強度が十分弱い極限、すなわちモロー三重項 [185] の中心ピークのみを考え、またドップラーシフトが小さいことを仮定し、すなわち $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ の場合に相当する。ここで $|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i| = |\Delta\mathbf{k}| = 2k \sin(\theta/2)$ は θ 方向の角度への散乱による光子の波数ベクトルの変化である。原子の行列要素と基礎定数は C に含まれている。

ここでトラップ中の N 個の原子に拡張する。各トラップ準位 $|j\rangle$ は最初に N_j 個の原子が分布しているものとし、また原子雲は光学的に希薄である事を仮定する。対応する行列要素は、分布数 N_j で特徴づけられる多体系の対称化された固有状態に対する演算子 $e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ の行列要素となる。ボーズ粒子に対しては [184]、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = C \left| \sum_i N_i \langle i | e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | i \rangle \right|^2 + C \sum_{i \neq f} N_i (N_f + 1) |\langle i | e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | f \rangle|^2 \quad (28)$$

が得られる。

散乱はコヒーレントとインコヒーレントな散乱に自然と分けられる。最初の項 (コヒーレントな部分) は弾性散乱を表し、原子の状態は変化しない。これは密度分布のフーリエ変換と関係している。

$$\sum_i N_i \langle i | e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | i \rangle = \int n(\mathbf{r}) e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (29)$$

回折角よりも小さな散乱角、 $\Delta k < 1/d$ に対しては、散乱光強度は単一原子のレイリー散乱の N^2 倍になる。この項は屈折率の実部となり、分散像の信号を作る。

式 (28) の第二項は非弾性散乱を表す。「自発的な散乱成分」とボーズ粒子の誘導散乱の成分とに分けることができる。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{incoh} = C \sum_{i \neq f} N_i |\langle i | e^{i\Delta k r} | f \rangle|^2 + \sum_{i \neq f} N_i N_f |\langle i | e^{i\Delta k r} | f \rangle|^2 \quad (30)$$

ここで試料原子が光の波長よりもはるかに大きく、このため条件 $i \neq j$ を落とす事ができる場合には、第一項は単一原子のレイリー散乱 (27) の N 倍となる。この項は立体角 4π へのインコヒーレントな散乱を表す。大きな角度に散乱された光はプローブ光から「失われる」ため、吸収信号を与えるのはこの項となる。

第二項はボーズ誘導散乱を表し、相転移近傍において唯一消えない項である。ポリッツェは、凝縮体に入ったり出たりする散乱と、励起状態の間の散乱の、2つの寄与を分離した [184]。この散乱が起こる角度は、光の波長と熱的なド・ブロイ波長の比よりも小さな角度に制限される。この寄与は回折信号よりもはるかに小さいため、これを観測するのは非常に難しいかもしれない。これは定量的な画像解析においては無視される。屈折率には量子統計の効果も含まれている [186]。非古典的な光散乱の効果は小さく、これは相転移近傍で顕著になり、また $T \rightarrow 0$ で消滅してしまうことがこの取り扱いから確かめられる。

3.4 非破壊測定による像

異なる画像技術における原子の励起の仕方は同じで、ただ散乱光の電場の異なった部分を集めているだけであることが先の議論から明らかである。原子雲がプローブしている間に加熱されるかどうかはプローブ光の強度と時間幅だけに依存する。

30×30 画素数で画素あたり 100 個の光子を検出した時に認識可能な画像は 10^5 の光子を含んでいる。各光子が凝縮体から一個の原子を追い出すとしても、試料が数 100 万個の原子を含んでいれば非摂動的といえるだろう。このため、水素原子の大きなボーズ凝縮は吸収分光による非破壊測定によって観測することができた [4]。

異なる画像技術において重要な性能指数は信号と加熱の比である。この観点からすると、分散による像は通常非常に有利な点を持っている。吸収像においては、各吸収光子 (すなわち大きな角度へ散乱された光子) はおおよそ 1 個の光子の反跳エネルギー分だけ原子雲を加熱する。分散信号はコヒーレントな項 (29) に基づくもので、これは原子を最初の量子状態のままに留めるため、加熱に寄与しない。分散性の散乱における信号強度はダーク背景像において集光された光子数から良く評価することができる。前方散乱の全光子数 (29) は吸収した全光子数 (30) よりも多く、その比はおおよそ N と回折光の円錐の立体角の積、 λ^2/d^2 となる。

$$N \frac{\lambda^2}{d^2} \simeq \tilde{n} \lambda^2 \quad (31)$$

となるため、この大きさはおおよそ共鳴光学密度 \tilde{D}_0 となり、これは前方散乱と超放射の間のある共通の原因を同定する [187]。より定量的には、ダーク背景像における信号 (22) と離調が大きな極限におけるレイリー散乱光子数 $(1-t^2)$ の比は $\tilde{D}_0/4$ である。典型的な $\tilde{D}_0 \simeq 300$ に対しては、このことは同じ加熱量に対して、分散による像は吸収による像よりも二桁ほど大きな信号を得ることが可能である。吸収法によっては、非破壊像を一つしか得る事ができないが、分散による像においては、我々のカメラの保存容量を越える、最大 100 フレームからなる実時間ムービーを撮る事が可能である。

小さな角度への光子の弾性散乱はメスバウアー効果に似ている。これは光子の反跳が無い散乱で、光子へ移行された運動量はトラップに吸収され、個々の原子には吸収されない。このような描像はプローブ光のパルス幅がトラップの振動周期よりも長い時には有効となる。原子を通りすぎる光線は原子雲の反対側において反対方向に曲げられる。もしパルス幅がトラップ周期よりも長いと、プローブしている間、原子は原子雲の幅を横切って運動するため、反跳は平均するとゼロになる。短いパルスに対しては、原子雲の反対側における原子は反対の運動量が移行されることになる。しかし、散乱角は小さく、典型的には約 10 ミリラジアン程度で、反跳による加熱はレイリー散乱光子による加熱よりも 10^4 分の 1 の大きさとなる。このため、短いパルスに対しても、主な加熱源は大きな角度へのレイリー散乱である ($\tilde{D}_0 \leq 10^4$ である限り)。

分散による像対吸収による像の性能指数の比は $\tilde{D}_0/4$ であるため、分散による像は通常、非常に密度が高い原子雲に対してのみ用いられ、これはトラップされている、または弾道膨張の初期の原子がこれに相当する。吸収像は十分長い膨張時間後の飛行時間法の像に用いられる。このため、共鳴光学密度は 1 近辺の大きさに減

少する。希薄な原子雲に対しては分散像が吸収像より有利な点はそんなに無い。

3.5 像の他の側面

3.5.1 蛍光像

今まで蛍光像については議論しなかった。蛍光および吸収においては、同じ光子を失ったものとして検出するか、これを数え上げるかが違うだけである。しかし信号強度を比較すると、蛍光像はふつう 100 程度不利になる。なぜならほんの一部の散乱光しか光学系によって集光されないからである。蛍光による方法は通常、背景雑音が無いという有利な点を持っている。これに対して吸収による方法では小さな信号はレーザー強度の揺らぎによって検出不可能になってしまう。しかし、BEC の実験においては、通常、吸収または分散信号が入射光強度と同じ程度になるように離調を選ぶことができる。

3.5.2 単一ショットの像における最大光強度

先にプローブパルスによる加熱を非破壊像における信号を制限する要因と述べた。凝縮体のたった一つの像を撮ることが目的だと状況は異なる。多くのグループの BEC の最初の観測はこの単一ショットの技術を用いたものである。この場合、プローブパルスの間どのくらい凝縮体が加熱されるかよりも、反跳による運動によって像がどれだけぼやけるかが性能指数として問題になる。

もし試料の一個の原子が Δt の間に N_p の光子を散乱すると、原子は吸収によりプローブ光の進行方向に $v_{rec}N_p$ の速度 (v_{rec} は反跳速度)、およびランダムな (おおよそ等方的な) 速度 $\sqrt{N_p}v_{rec}$ を獲得する。このランダムな速度 v_{rms} は位置のランダムさ $r_{rms} = v_{rms}\Delta t/\sqrt{3} = \sqrt{N_p/3}v_{rec}\Delta t$ をもたらす [96]。パルス幅が短いと原子あたり N_p 個の多数の光子が散乱される。これは原子の遷移の飽和によって限界が与えられる。許容される像のぼけ具合は必要とされる空間分解能に依存し、これは弾道膨張している原子雲に対してよりトラップ中の原子雲に対しての方が高い分解能が必要となる。ナトリウムに対する典型的な値は、 $50\mu s$ の間に 100 個の光子が散乱すると最終的に $v_{rms} = 30 \text{ cm/s}$ および $r_{rms} = 9\mu m$ となる。

3.5.3 光ポンピング

原子あたりの多数個の光子の散乱は高い信号レベルをもたらす、良い S/N が得られ、迷光の影響を受けにくい光学系が実現できる。しかし、これはサイクリング遷移のみに適用可能である。もし原子がこれとは違う状態にトラップされていたら、光ポンピングによってサイクリング遷移に移行することが可能である。

我々の実験では光ポンピングはこれ以外の 2 つの理由により用いている。スピン場凝縮体の像においては (8.4 節)、異なる超微細構造状態にトラップされた原子はプローブするために同じ状態にポンピングされ、遷移行列要素の違いによる補正をすることなく、異なる状態間の原子数の比較が簡単になる。空間的に選択的に光ポンピングすることにより原子雲の一部分のみを選択しての吸収像で見ることが出来る。我々はこの方法を用いて通常の吸収法によって線状に見た像を積分して観測した。薄いシート状の光によって光ポンピングによって原子をトモグラフィーの様に選択した (図 27)。この方法は二つの干渉するボーズ凝縮体によって作られるフリッジ像を得るときに威力を発揮した [169]。

3.5.4 不均一磁場中の像

原子雲の温度が自然幅よりも大きい時には、光散乱の分光的な性質が重要となる。この領域においては不均一なトラップのポテンシャルが原子を共鳴もしくは非共鳴に同調する。これはアムステルダムにおける水素の

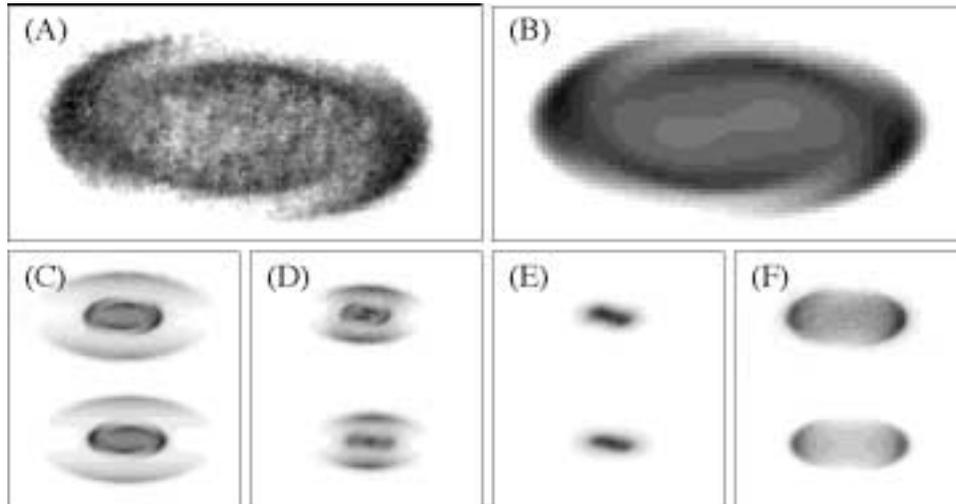


図 10: 球形四重極子トラップ内のナトリウム原子雲の吸収像。像 (A) は $B' = 500 \text{ G/cm}$ の四重極子磁場内の温度 $\sim 80 \mu\text{K}$ の原子雲を $F=1 - F'=2$ 遷移から -97 MHz だけ離調した直線偏光の光でプローブした像を示している。像 (B) は像 (A) のシミュレーションである。像 (C)、(D)、(E) および (F) は $B' = 250 \text{ G/cm}$ の四重極子磁場内の温度 $\sim 500 \mu\text{K}$ の原子雲を異なる離調に対して示したものである。実験データは一番上に、シミュレーションはその下に示してある。像 (C-F) は離調がそれぞれ -80 、 -40 、 0 、および $+80 \text{ MHz}$ で撮ったものである。原子雲の真の二乗平均平方根 (RMS) の大きさは (E) の黒い領域と同じである。像 (A) と (B) の幅は 1.5 mm で、像 (C-F) の幅は 5 mm である。図は文献 [188] から引用。

ライマン α 系列の分光の実験の状況、そして我々の最初の蒸発冷却の実験の場合もそうである [142]。

図 10 にはプローブ光の異なる離調における球形四重極子トラップ中の同じ原子雲によって作られる分光的な方法による吸収の影の変化が示されている。いくつかの影は原子雲の rms の大きさよりもはるかに大きい。これらの図はゼーマンシフトによって原子がプローブ光と共鳴する共鳴殻を見事に示している。

実験によって得られる象をシミュレーションと比較することにより、温度と密度が得られる。これらのシミュレーションは局所的な原子密度および磁場の向きに依存する感受率のテンソルによって特徴付けられる媒質中の複素電場の伝搬を解いている。ミッシェル・アンドリュウによって行われたシミュレーション [188] はアムステルダムグループによって用いられた方法 [189] を基にしており、これは観測した全ての性質を説明している (図 10)。

いくつかの分光的な像は楕円の原子雲よりも低い対称性および渦巻き状の構造を示していることに驚かされた。これらの構造はトラップさらた原子雲の光学的性質によるもので、これはプローブ光の偏光を回転する。四重極トラップ中の原子の対称性から、透過光の強度分布は角度依存性 $a_0 + a_1 \cos 2\phi$ を持っている事が示唆された (文献 [189] の式 21 を見よ)。しかし、透過光の電場の複素位相によって角度依存性は $a_0 + a_1 \cos(2\phi - \delta)$ に変化し、図 10 に見られるような渦巻きをもたらす。この角度 δ は文献 [189] では考慮されていないが、角度方向に平均した結果には影響を与えない。

3.5.5 実験的な側面

現在の世代の低雑音 CCD は現在の BEC 実験に必要な全ての要件を満たしている。画素あたり約 5 個分の電子の rms 雑音によって、カメラは画素あたり約 50 個以上の光子に対して既にショット雑音限界となる。通常、検出感度は、センサーの性能よりはむしろ、プローブ光のビーム形状の悪さや像の不完全な規格化 (補遺

A を見よ) によって制限される。イメージ増強カメラは微弱な信号に対してはふつう高い感度を持っているが、画素あたり 50 個以上の入射光子に対しては CCD センサーのより高い量子効率 (40 %) はイメージ増強カメラ (15 %) と比べてより高い S/N 比を保証する。

カメラで低い雑音を得るには通常数秒の遅い読み出し速度が必要となる。非破壊で速い連続的な像は、全過程をチップ上に保存して、後からこれをゆっくり読み出すことによって得られる。このためにはセンサーは、露光のための領域とそれより大きな保存のための領域に分けられている。分割は、センサー上、またはより自由度が高い方法として、光学系の中間の結像面上におけるマスクによって行われる。露光の後、蓄積電荷は保存領域に移動する。全ての CCD はこの移動が可能である (なぜならこのようにして像が最終的に読み出されるからである)。しかしある CCD は非常に速くこの移動が可能である。我々は 1ms 以下の時間間隔で一連の像を撮るのにこの方法を用いた。

我々の画像システムは、F ナンバーが 4 によって決まる標準的なアクロマートレンズによる光学系を用いている。これは分解能と自由度の良い妥協点であることが分かった。これより小さな F ナンバーの結像系は可能であるが、視野が小さくなり、被写体深度も小さくなる。

4 定量的な画像の解析

画像の取得と画像処理の目的は、トラップされた状態および弾道的な膨張状態のどちらの場合においても、信頼性の高い原子雲の密度分布を得ることにある。凝縮体および熱運動する原子雲の全ての性質はこれらの密度分布から推測される。これは、測定された分布を原子気体のモデルの結果と比較することによって行われる。

以下にいくつかのこのようなモデルと、物理的な性質を決定する手段を示す。ここでは温度および密度の三つの領域に適当なモデルを考える。高い温度 ($T \geq T_c$)、および低い温度 (純粋な凝縮体) においてはこれらの密度分布は良く分かっており、実験的にも検証され、信頼性が高い。中間的な領域においては、原子雲は凝縮部分と非凝縮部分の両方が含まれており、これらの分布に対しては近似的な予想しかできない。

4.1 BEC の転移温度以上の熱運動する原子の雲

最初に BEC の転移温度以上の調和振動子ポテンシャルにトラップされた原子を考える。

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (32)$$

熱平衡状態におけるこのポテンシャル中の理想ボーズ気体は、離散的なエネルギー準位を考慮すると、カノニカルまたはグランドカノニカル集団にあると表すことができる。しかし、準位間隔よりも温度が高い場合には、 $k_B T \gg \hbar\omega_{x,y,z}$ 、半古典論による方法 [49, 50, 190] を用いて密度を求めることができる。

$$n_{th}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_{dB}^3} g_{3/2}(z(\mathbf{r})) \quad (33)$$

ここで $\lambda_{dB} = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$ 、 $z(\mathbf{r}) = \exp((\mu - V(\mathbf{r}))/k_B T)$ 、 μ は化学ポテンシャル、そして T は温度である。ボーズ関数、これは一般的には $g_j(z) = \sum_i z^i / i^j$ によって与えられるが、これは量子統計の効果を密度分布にもたらす。区別可能な粒子の分布と比較すると、ボーズ気体の密度は $g_{3/2}(z)/z$ だけ増加している。

この半古典的な方法を飛行時間法における分布を決定するのに用いることができる。トラップを切ったとき、トラップ原子はトラップを切った瞬間の速度でトラップされていた位置から弾道的に飛び出す。位置 \mathbf{r}_0 から飛び出して自由膨張して時間 t 後に位置 \mathbf{r} に到達する原子の運動量は $\mathbf{p} = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/t$ でなくてはならない。全

での初期位置 \mathbf{r}_0 で積分することにより、密度分布を膨張時間 t 時間の関数として決定する。

$$n_{tof}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{h^3} \int d^3\mathbf{r}_0 d^3\mathbf{p} \frac{1}{e^{-(\mu - H(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}))/k_B T} - 1} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{p}t}{m}) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{\lambda_{dB}^3} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) g_{3/2} \left(\exp \left[\mu - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \left(\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) \right] \right) \quad (35)$$

長い時間では ($t \gg \omega_x^{-1}, \omega_y^{-1}, \omega_z^{-1}$)、膨張する間の衝突は無視することができ (??節を見よ)、密度の輪郭は次のようになる。

$$n_{tof}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda_{dB}^3} g_{3/2} (e^{(\mu - \frac{m\mathbf{r}^2}{2t^2})/k_B T}) \quad (36)$$

このため、熱的な原子雲はいったん最初の大きさより大きくなると等方的に膨張する。

4.2 絶対零度におけるボーズ・アインシュタイン凝縮

絶対零度のボーズ・アインシュタイン凝縮の密度分布は広く理論的に議論されてきた [191, 192, 193]。気体が希薄なことにより、量子空乏の効果は無視することができる (少なくとも密度分布においては)。多体系の基底状態は簡単な複素数の秩序パラメーター $\psi(\mathbf{r})$ によって記述される。この状態およびそのダイナミクスはグロス・ピタエフスキー方程式によって記述される。

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\mathbf{r})\psi + \tilde{U}|\psi|^2 \psi \quad (37)$$

パラメーター $\tilde{U} = 4\pi\hbar^2 a/m$ は二体衝突の効果を表し、ここで a は s 波散乱長、 $|\psi|^2$ は密度である。基底状態の波動関数は $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\mu t}$ で、ここで μ は基底状態のエネルギーで、これは化学ポテンシャルと言われるものである。

4.2.1 理想気体の極限

波動関数は 2 つの極限においては簡単に記述される。相互作用が弱い極限では ($n\tilde{U} \ll \hbar\omega_{x,y,z}$)、相互作用の項を無視することができる。このため、凝縮体の波動関数は簡単に調和振動子の基底状態のそれとなり、これは N 個の粒子に対する密度を与える。

$$n_c(\mathbf{r}) = \frac{N}{\pi^{3/2}} \prod_{i=1}^3 \frac{1}{x_{i,0}} e^{-x_i^2/x_{i,0}^2} \quad (38)$$

ここで長さのスケール $x_{i,0} = x_{i,HO} = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$ は三次元の各方向 (i でラベルする) に対する凝縮体の波動関数の rms 幅である。

自由膨張においては、ガウス関数の波動関数は位相の係数を除いてはガウス関数のままであり続ける。このため、膨張してから時間 t 後、凝縮体の大きさは単純に $x_{i,0}^2 = x_{i,HO}^2 + v_{i,HO}^2 t^2$, where $v_{i,HO} = \sqrt{\hbar\omega_i/m}$ に従って再規格化する。ここで $v_{i,HO} = \sqrt{\hbar\omega_i/m}$ はトラップされた凝縮体の rms 速度である。この長さはまた $x_{i,HO}^2(1 + \omega_i^2 t^2)$ と書き改めることができる。熱的な原子雲が膨張するに従って、膨張時間が ω_i^{-1} よりはるかに長くなると、最初の大きさに対する依存性は無視できるようになる。

4.2.2 トーマス・フェルミ限界

相互作用が強い極限においては ($n\tilde{U} \gg \hbar\omega_{x,y,z}$)、トラップされた凝縮体の波動関数は、式 (37) における運動エネルギーを無視することによって簡単に決定することができる。この場合、運動エネルギーは相互作用項

よりもはるかに小さくなる。このような極限は、トーマス・フェルミ限界として知られており、この場合の密度は次の様に与えられる。

$$n_c(\mathbf{r}) = \max\left(\frac{\mu - U(\mathbf{r})}{\tilde{U}}, 0\right) \quad (39)$$

このため、トーマス・フェルミ限界における凝縮体は、トラップポテンシャルの底に化学ポテンシャル μ の高さまで注ぎ込んだものと考えることが可能である。調和振動子トラップにおいては、凝縮体の密度形状は放物線の形をしている。

$$n_c(\mathbf{r}) = \frac{15}{8\pi} \frac{N}{\prod x_{i,c,0}} \max\left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{x_{i,c,0}^2}, 0\right) \quad (40)$$

これは凝縮体の密度がゼロになる位置 $x_{i,c,0}$ (添え字 c は凝縮体を表し、 th は熱運動する原子雲を表す) であるトラップされた凝縮体の半分の大きさによって特徴付けられる。これらは化学ポテンシャルとトラップパラメータによって $x_{i,c,0} = \sqrt{2\mu/m\omega_i^2}$ と決定される。

便利な事に、このような凝縮体がトラップから解放された場合、これは単純に放物面の形状を再規格化するように時間発展する [194, 195, 196](??節)。径方向の周波数 ω_ρ 、アスペクト比 $\omega_\rho/\omega_z = \epsilon^{-1}$ のタバコ型のトラップから解放された場合、凝縮体の半分の長さは以下の式に従って発展する。

$$\rho_0(t) = \rho_0(0)\sqrt{1 + \tau^2} \quad (41)$$

$$z_0(t) = \epsilon^{-1}\rho_0(0)\left(1 + \epsilon^2[\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2}]\right) \quad (42)$$

ここで $\tau = \omega_\rho t$ である。

この解は飛行時間法の膨張において三つの段階を表す。(1) 相互作用エネルギーが運動エネルギーに変換されるのに伴う径方向の加速 ($\tau < 1$)、(2) 軸方向へはわずかにしか膨張しないが、径方向には最初の軸方向の大きさを越える膨張 ($1 < \tau < \epsilon^{-2}$)、(3) 径方向および軸方向にそれぞれ漸近的なアスペクト比 $z_0(t)/\rho_0(t) = \pi\epsilon^2/2$ での膨張 ($\epsilon^{-2} < \tau$)。ここで $t \gg \omega_\rho^{-1}$ に対する径方向の膨張速度は $\frac{1}{2}m v_\rho^2 = \mu$ を満足することを記しておく。我々はふつうトラップ周波数 $\omega_z = 2\pi \times 20$ Hz および、 $\omega_\rho = 2\pi \times 250$ Hz の磁気トラップを用いている。この場合、平均場エネルギーは原子雲が外側に加速されるに従って約 1 - 2 ms で解放される。軸方向の膨張は約 100ms 後になって初めて顕著になり、この時間の間、原子は約 5cm 落ちる。我々はふつう 20 ms から 60 ms の飛行時間で原子雲をプローブするため、まだ漸近的なアスペクト比に達する前の凝縮体が観測される。

ここで重要な事は、調和振動子の各軸方向に対しては理想気体およびトーマス・フェルミの両限界の有効性は一般的には異なる。例えば、MIT で用いた単一レーザー - 光線による光トラップにおいては、タバコ状のトラップは非常に非等方的で、アスペクト比は最大 70 で、径方向のトラップ周波数は最大数 kHz にもなる。最大密度 $n_c(0) \simeq 1 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ のナトリウム原子の凝縮体は相互作用エネルギー $\tilde{U}n_c(0) = h \times 1.4 \text{ kHz}$ を持っている。この場合、トーマス・フェルミ近似は原子雲の長軸方向に対しては有効であるが、径方向ではそうではない。このような中間的な領域における凝縮体の正しい記述はグロス・ピタエフスキー方程式の数値解を必要とする [197]。

4.3 部分的に凝縮した原子雲

先に言及したように、(温度が高い、または低い) 二つの極限におけるボーズ気体の密度分布は良く分かっている。これら二つの極限の間においては、密度分布は現在、理論および実験による精査の対象である [50, 198, 199, 200, 201]。有限温度に対する異なる理論の予想を識別するには密度分布の精密な測定が必要である。

これらの密度分布は一つの印象的で、有用な性質を持っており、それは二モードを持っていることである。液体ヘリウムに比べて希薄ボーズ・アインシュタイン凝縮が実験的に有利な点は、二モードを持つ分布の二つの成分が凝縮体と非凝縮体であると同定できることである。液体ヘリウムにおいては凝縮体は間接的な測定でしかできない。

画像から混合原子雲の特性を収集するため、観測された密度形状は二モードの分布にフィットする。分布の選択はある程度任意である。我々の場合、先に述べた二つの極限における原子雲を正しく記述する分布、それぞれ転移温度におけるボーズ増大したガウス分布と、絶対零度における放物線的な密度分布を選ぶ。このため、観測した密度 $n_{tot}(\mathbf{r})$ をフィットする

$$n_{tot}(\mathbf{r}) = n_{th} g_{3/2} \left(\prod_{i=1}^3 e^{-x_i^2/x_{i,th,0}^2} \right) + n_c \max \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{x_{i,c,0}^2}, 0 \right) \quad (43)$$

これらのフィットに用いるパラメーターは、アスペクト比や、理想気体またはトーマス・フェルミモデルによって予想される最大密度による制限を課さない。このため、式 43 は二モードの分布の一般的なパラメーター化である。

4.4 コラム密度

今までに各領域に対して予想される密度分布を議論してきた。しかし、トモグラフィ的な像を除いて(??節)、全ての画像取得法は像を撮る方向の原子雲のコラム密度を測定するものである。この軸を y 軸にとるとし、残りの座標を ρ と z とすると、熱運動する原子雲のコラム密度 \tilde{n}_{th} および凝縮体のコラム密度 \tilde{n}_c を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{th}(\rho, z) &= \frac{\tilde{n}_{th}(0)}{g_2(1)} g_2 \left[e^{(1-\rho^2/\rho_{th,0}^2 - z^2/z_{th,0}^2)} \right] \\ \tilde{n}_c(\rho, z) &= \tilde{n}_c(0) \max \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_{c,0}^2} - \frac{z^2}{z_{c,0}^2}, 0 \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (44)$$

これらのコラム密度分布は実験によって得られた像をフィットする関数として用いられる。このフィット関数は我々の観測結果を非常に良く記述する。これに対して、凝縮体に対するガウス分布を用いると不完全な結果を与えた。

4.5 静的な量の導出

- 温度： 気体の温度は熱運動する原子雲が持っている分布の空間的な形状から決定する事ができる。空間分布において密度はふつう $e^{-x_i^2/x_{i,th,0}^2}$ のように減衰する。これはボーズ増大の場合においても同じである。この結果を用いると、原子雲の温度 T を決定する事ができる。

$$k_B T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2 t^2} x_{i,th,0}^2 \right) \quad (45)$$

ここで t は飛行時間である。

混合した原子雲において特定の二モードの密度分布の選択に依存しないで温度測定を行うには、凝縮体が明らかに無くなるような像の領域にフィットを制限する必要がある。さらに、凝縮体の境界近くの熱運動する原子雲のボーズ増強によってもたらされる可能性がある問題を排除するには、フィットを空間分布の裾の部分に限定することを薦める。我々の経験から、凝縮体の分布に非常に近すぎる部分でフィットすると、温度において 20% 台の系統的誤差がもたらされる。

- 化学ポテンシャルと最大密度：化学ポテンシャル μ は凝縮体の大きさから与えられる。式 (44) で与えられる形状にフィットすることによって、その場測定から μ が決定される。

$$\mu = \frac{1}{2}m\omega_i^2 x_{i,c,0}^2 \quad (46)$$

ここで $x_{i,c,0}$ は x_i 方向の凝縮体の長さの半分である。タバコ状の原子雲から解放された凝縮体より、径方向の原子雲の半分の長さを用いて

$$\mu = \frac{1}{2}m \left(\frac{\omega_\rho^2}{1 + \omega_\rho^2 t^2} \rho_{c,0}^2 \right) \quad (47)$$

となる。トーマス・フェルミ近似の範囲内においては、トラップされた原子雲の凝縮体の最大密度 $n_c(0)$ はこの μ の値から、 $n_c(0) = \mu m / 4\pi\hbar^2 a$ のように決定される。ここで a は散乱長である。

- 全原子数：全原子数は、原子雲の二次元像全体に渡って吸収または位相コントラスト信号を足し合わせるによって決定される。このため、共鳴吸収においては、

$$N = \frac{A}{\sigma_0} \sum_{pixels} -\ln(\tilde{T}(x, y)) \quad (48)$$

が得られ、位相コントラスト法においては

$$N = \frac{A}{\sigma_0} \frac{2(\Gamma^2 + 4\Delta^2)}{2\Delta\Gamma} \sum_{pixels} \phi(x, y) \quad (49)$$

が得られる。ここで、 A は画素あたりの面積、 σ_0 は共鳴光の吸収の断面積、 Γ は自然幅、 Δ は共鳴からの離調、 $\tilde{T}(x, y)$ は吸収像によって測定される透過率、そして $\phi(x, y)$ は位相コントラスト像において観測される位相である。 σ_0 は原子雲およびプローブ光の分極 (偏光) に依存するため、全原子数を正しくその量を得るにはこれらを知っておく必要がある。??節においてゼロでない離調および飽和の項をこのように考慮するかを議論した。化学ポテンシャルと温度は長さ測定に基づくもので、これは全信号強度には依存しないことをここに記しておく。

- 凝縮体原子の数と凝縮体の割合： T 、 μ および N がわずかな仮定のもとで決定できるのに対して、凝縮体の割合またはその個数を測定するのはより複雑である。典型的には、全原子の密度分布を式 (44) で与えられるような二モードの分布にフィットし、中心部の分布から全原子数を凝縮体とする。このため、凝縮体の割合は仮定した二モードの分布の形に敏感に依存する。特に、中心部は非凝縮体の密度分布を推定する必要がある。凝縮体の原子数の決定は転移温度近傍が最も信頼性が高い。この温度では熱分布する原子雲は明確に定義され、信頼度の高い中心部への外挿が可能である。このため、推定した凝縮体の割合と理論を比較する代わりに、むしろ直接全体の密度分布を比較する方が良いと言えるかもしれない。この全体の密度分布はこの同じ理論から決定可能である。最後に、凝縮体の割合は基本的には二モードの分布ではなく凝縮体のコヒーレンスを用いて測定することが可能であることを記しておく。例えば、最初の凝縮体を二つに分割し、その後、飛行時間法において再結合した場合、観測されるフリンジのコントラストから凝縮体の割合が決定される (関連する議論は文献 [202] を見よ)。
- 導出される量： T 、 μ 、 N および凝縮体の原子数 N_0 からこれらの間の関係式を用いることによりその他の有用な量が求められる。まず最初に、調和振動的に閉じ込められた凝縮体の化学ポテンシャルに対するトーマス・フェルミの式は

$$\mu^{5/2} = \frac{15\hbar^2 m^{1/2}}{2^{5/2}} N_0 \bar{\omega}^3 a \quad (50)$$

となり、ここで $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ はトラップ周波数の幾何学的平均である。この式は四つの量 ($\mu, N, \bar{\omega}, a$) と関係している。そしてこの内の三つを知ることにより、四番目を導出することができる。例えば、 a として分光的な測定より導出されたある値を仮定すると、凝縮体の一回の飛行時間像より光トラップの平均トラップ周波数を導出した。

もう一つの有用な関係は臨界温度 T_c における原子数 N_c に対して、相互作用の小さい効果を無視すると ($\mu=0$ に対する式 (33) を考慮する。文献 [190] を見よ。)、

$$N_c = g_3(1) \left(\frac{k_B T_c}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 \quad (51)$$

が得られる。

臨界温度び原子雲の像から、三つの量 ($N, T, \bar{\omega}$) の内、二つを知ることにより、残りの一つを再び導出することができる。この式には散乱長が含まれていないことを記しておく。このため、これらの二つの式を組み合わせる用いることにより、原子数または長さの測定の検証および測定における系統誤差を取り除くための強力な道具となる。

これ以外の有用な量は換算温度と位相空間密度である。換算温度は測定温度 T と、観測された全原子数の理想気体に対する BEC の転移温度 $T_c^{(0)}$ との比で、すなわち

$$\frac{T}{T_c^{(0)}} = \frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \left(\frac{g_3(1)}{N} \right)^{1/3} \quad (52)$$

となる。

非凝縮体気体の最大位相空間密度は $D = n(0) \lambda_{dB}^3$ によって与えられ、ここで $n(0)$ は原子雲の最大密度、 λ_{dB} は熱的ド・ブロイ波長である。 D は関係式

$$D = g_{3/2}(z(0)) \quad (53)$$

$$N = g_3(z(0)) \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 \quad (54)$$

より決定される。

校正の目的のため、転移温度以上と転移温度における原子雲を再度比較することは有用である。ここで $D = g_{3/2}(1)$ である。このような校正は、集光した赤外レーザー光線による磁気トラップポテンシャルの断熱的な変形による位相空間密度の増加を正確に測定することを可能にした [21]。

4.6 動的な特性の導出

平衡状態の熱力学を明らかにすることに加えて、その場測定および飛行時間法による像はまた外部からの摂動に対するトラップされたボーズ気体の動的な応答も明らかにする。このような応答は、時間的に一連の像を撮ることによって、ストロボ写真のようにプローブされる。この各像は摂動を加えて一定の時間後の系の状態を測定したものである。このような観点からすると、破壊測定と非破壊測定による像の取得には重要な違いがある。気体をプローブするのに破壊測定による像を用いることは、積算された時間的な一連のシリーズにおける各データ点に対して、実験はローディングと冷却のサイクルを通して繰り返されたものであることを意味する。このため、このような時間的な一連のデータはショット毎の揺らぎの影響を受けやすい。これに対して、非破壊測定による撮像技術を用いることにより、速い連続的な像が単一の原子試料から撮ることができ、はるかに速いデータの取得をもたらし、さらにショット毎の実験条件の正確な制御の問題を回避することができる。例えば、ボーズ凝縮の形成におけるボソンの誘起の観測は高速な一連の位相コントラスト像を用いる

ことによって唯一可能であった (図 25)。なぜなら形成過程は今にも凝縮するばかりのトラップされた原子雲の状態に非常に敏感であったからである [29]。

トラップ原子気体の集団励起は BEC 研究の重要な争点の一つになっている。このような励起は単一または二モードの分布を摂動後の時間的な一連のプロープ光によって得られうデータにフィットすることによって解析される。三つのタイプの集団励起が研究されている。

- 原子雲全体の分布の重心の振動。トラップ周波数は、原子雲の重心の運動を時間的にトレースすることにより曖昧さ無く測定される。速い一連の位相コントラスト像を用いて我々の磁気トラップの周波数を一回のショットで 10^{-3} の精度で測定し、非調和性を検証することができた。
- 凝縮体および熱的な原子雲の形状の振動。これらの励起は原子雲の長さのアスペクト比の周期的な再スケールリングに相当する。このようなモードの周波数と減衰は飛行時間法 [177, 176, 178, 173] およびその場測定 [30] の両方の方法によって調べられた。高精度 (10^{-2} 以上) 測定は速い一連の撮像を用いて行われ、この像によって初期条件を決定する摂動前の一組の像が得られ、また振動中の 3 組の像によって最長 0.5 秒の時間間隔がカバーできた [30]。最大 28 個もの非破壊像を得るため、 10 光子 / μm^2 の低いレベルの光を用いた。
- ボーズ・アインシュタイン凝縮における音波の伝搬。原子雲の長軸に沿った一次元の音波の伝搬が速い一連の位相コントラスト撮像法を用いて解析された [28]。非摂動の凝縮体の形状を差し引き、この結果得られる密度の差の最大または最小を求めることにより、音波のパルスの位置が決定された。式 (47) を用いて凝縮体の軸方向の長さを用いて凝縮体の密度が決定された。

4.7 飛行時間像とその場測定像との比較

先に議論したように、トラップされたボーズ気体の詳細な情報はその場測定法および飛行時間法による像から得ることができる。ここで二つの方法を比較して、どのような場合がそれぞれ最適かを求めてみる。

BEC になる徴候は飛行時間法による像において非等方的なトラップに対して最も顕著である。凝縮体の出現は突然、転移温度以上における等方的な膨張の対称性を破る。タバコ状の凝縮体がディスク状に膨張するのは、画像光学系の多少の調整ずれにも関わらず簡単にこれを観測することができる。これに対して、トーマス・フェルミ限界において、凝縮体と熱的な原子雲のアスペクト比はその場測定による像では等しくなり、BEC の始まりを見るには高分解能な画像光学系が必要である。

温度と化学ポテンシャルを決定するための飛行時間法の解釈においては急激な弾道的な自由膨張を仮定している。各種の効果がこの仮定を無効にする可能性がある。これには残留磁場、これは (トラップ振動周期に比べて) ゆっくりとしたトラップ磁場のオフする場合がこれに相当し、また自由膨張の間の残留する勾配を持った磁場がある。もう一つの障害は非等方的なトラップから解放された熱的な原子雲はトラップをオフにした直後の衝突によって非等方的に膨張する可能性があることである [203, 204]。

非球面の部分的に凝縮している原子雲の温度測定の限界はその場測定と飛行時間法においては異なる。熱的な原子雲とタバコ状トラップからの凝縮体の大きさを、トラップ中および飛行時間法の両方の場合においてそれぞれ比較したものを表 3 に示す。トーマス・フェルミ近似の場合に焦点を絞ると、トラップ中では二つの成分は $k_B T = \mu$ において等しい大きさである。このため、密度分布を基にしたその場測定は $k_B T \geq \mu$ に制限される [30]。一方、飛行時間法においては、凝縮体と熱的な原子雲は z 軸方向で区別することが $k_B T = \mu \times 4\pi^{-2}\epsilon^2$ の温度まで可能である。ここで $\epsilon = \omega_z/\omega_\rho$ で、温度測定の限界をはるかに低い値まで広げることができる。

非等方的な原子雲に対して飛行時間法とその場測定法による撮像の両者の中で選択する際にこれ以外に考慮する点は、凝縮体および熱的な原子雲のコラム密度の差である。タバコ状のポテンシャルからの飛行時間法においては熱的な原子雲は $t > \omega_z^{-1}$ になると、等方的に膨張し、一方、凝縮体は軸方向には $t > \omega_\rho/\omega_z^2$

表 3: 熱原子雲および凝縮体に対する長さの尺度の比較。熱原子雲と理想気体の凝縮体に対しては rms 半径を、トーマス・フェルミ凝縮体に対しては半分の長さを与える。飛行時間は大きさが有限であることを無視できるほど十分長いものとする。飛行時間法におけるトーマス・フェルミ凝縮体に対する結果は $\omega_z/\omega_\rho \rightarrow 0$ を仮定する。

	その場測定		飛行時間測定	
	ρ	z	ρ	z
熱原子雲	$\sqrt{\frac{2k_B T}{m} \frac{1}{\omega_\rho}}$	$\sqrt{\frac{2k_B T}{m} \frac{1}{\omega_z}}$	$\sqrt{\frac{2k_B T}{m} t}$	$\sqrt{\frac{2k_B T}{m} t}$
理想気体の凝縮体	$\sqrt{\frac{\hbar}{m} \frac{1}{\sqrt{\omega_\rho}}}$	$\sqrt{\frac{\hbar}{m} \frac{1}{\sqrt{\omega_z}}}$	$\sqrt{\frac{\hbar}{m} \sqrt{\omega_\rho}}$	$\sqrt{\frac{\hbar}{m} \sqrt{\omega_z}}$
トーマス・フェルミ凝縮体	$\sqrt{\frac{2\mu}{m} \frac{1}{\omega_\rho}}$	$\sqrt{\frac{2\mu}{m} \frac{1}{\omega_z}}$	$\sqrt{\frac{2\mu}{m} t}$	$\sqrt{\frac{2\mu}{m} \frac{\pi\omega_z}{2\omega_\rho} t}$

になって初めて最初の大きさ以上に膨張することを思い起こす必要がある。時間 $1 < \omega_z t < \omega_\rho/\omega_z$ に対して、径方向に沿って撮像を行うと、凝縮体の光学密度は膨張時間に対して 1 次で減少し、一方、非凝縮体の光学密度は 2 次で減衰する。このため、原子雲全体を忠実にその像を撮るにはその場測定の方が望ましい。一方、飛行時間法による長い時間の膨張はより信頼性の高い凝縮体の原子数の測定が可能になる。

動的な性質を測定するのにも違いがある。一つの目的は振幅がゼロの極限における振動を測定することである。飛行時間法によって測定される形状の振動の相対的な振幅はその場測定によって測定されるそれよりもはるかに大きくなった [194, 196]。このため、飛行時間法による像はより小さい振幅の振動を観測することが可能になる。一方、この飛行時間法の恩恵は遅いデータ取得と技術的な雑音に非常に影響を受けやすいことで相殺されるかもしれない。さらに、より複雑な振動に対しては、飛行時間法は像の解釈は難しくなる。例えば、音波のパルスはその場測定において簡単に観測および位置が同定できるのに対して、このような凝縮体の飛行時間法の像には複雑な縞状の形状が現れる [28]。

5 静的な性質

先の節ではボーズ・アインシュタイン凝縮の追求に付随する全ての機構、レーザー冷却、磁気トラップ、蒸発冷却、極低温原子を操作する道具、撮像および画像処理、データ解析、について議論した。最後に、全てのを組み合わせて同時に動かすことにより、目標である凝縮体自身に到達する。

図 11 はこの本の主題である気体の系の非常に良い紹介となる。最終温度はラジオ波蒸発を終了する周波数によって調整される (図に示してある)。ラジオ波の最終周波数が高いと、温度は高く、非凝縮体の雲が調和振動子トラップポテンシャルの中心からはるか遠くにまで達している。BEC の転移温度以上では、気体は広く横たわっており、密度分布の形状は滑らかである。ラジオ波周波数を下げると、温度は BEC の相転移温度以下に下がり、高密度の原子のコアが分布の中心に現れる。これがボーズ・アインシュタイン凝縮である。さらにラジオ波周波数を下げると、凝縮体の個数は増え、熱的なすその部分は短くなる。最後に、中心のピークのみが残る点まで温度は下がる。各像は一回の完結したトラップおよび冷却サイクルにおいて得られた平衡状態の気体を示している。これらの原子雲の軸方向の輪郭を図 12 に示す。

ふつう、我々の装置においては、原子数 $50 - 100 \times 10^6$ で転移温度 $1 - 2 \mu\text{K}$ に達する。さらなる蒸発冷却によって原子数 $5 - 20 \times 10^6$ 個の純粋な凝縮体が生成される。この凝縮体は長さ $300 \mu\text{m}$ 、アスペクト比 15、ピーク密度約 $4 \times 10^{14} \text{cm}^{-3}$ である。このような典型的な条件は変更可能で、我々の様々な実験プロジェクトにおい

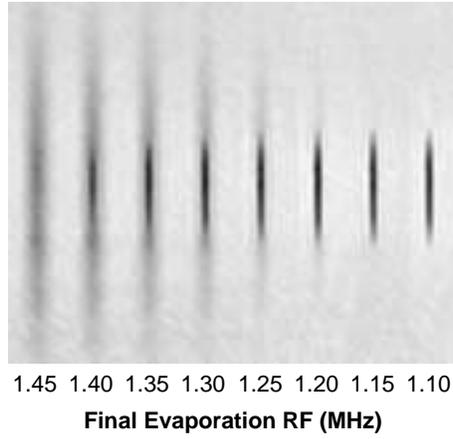


図 11: 相転移を通りすぎたトラップされたボーズ気体の位相コントラスト像 (カラー)。蒸発冷却に用いている最終ラジオ波周波数を下げて行くにつれて、温度は減少する (左から右へ)。像はボーズ凝縮の徴候を示し、凝縮体の部分が成長して、熱的な部分の翼が収縮し、ついには熱的な部分が見分けられない純粋な凝縮体となる。軸方向および径方向の周波数はそれぞれ 17 Hz および 230 Hz である。純粋な凝縮体は約 $300 \mu\text{m}$ の長さである。

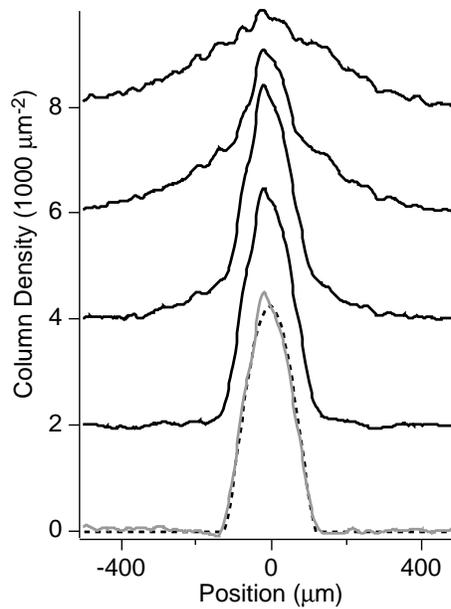


図 12: 位相コントラスト像から得られたボーズ・アインシュタイン凝縮した原子雲の軸方向のカラム密度の輪郭。一番下の曲線はデータを式 44 に従って放物線でフィットしたものである。

て大きく変更してきた。凝縮体の密度は 2×10^{13} から 3×10^{15} の範囲に、転移温度は 100 nK から $5 \mu\text{K}$ の範囲にある。他のグループにおける凝縮体の原子数は約 10^2 [205] から 10^9 [4] の範囲にある。このような大きく変化できることは弱く相互作用するボーズ気体を記述する理論の枠組みに対する徹底的な検証を可能にする。そこでこの気体の最近の実験の研究を概観してみることにする。最初にその平衡状態の性質を考えてみる。

5.1 温度ゼロ度の凝縮体

5.1.1 凝縮体の密度の輪郭

4.2 節で議論したように、温度ゼロ度の凝縮体の波動関数は非線型グロス・ピタエフスキー方程式の解となる (式 37)。トーマス・フェルミ限界 ($\mu \gg \hbar\omega_i$) においては、閉じ込めポテンシャルが放物面の形状をしているため、凝縮体の密度は放物面となる。これは熱的な原子雲が見えない温度ゼロ度付近で凝縮体のその場測定の像を撮ることによって確かめられる。例えば、図 12 の一番下の曲線は純粋な凝縮体の密度形状を示すもので、これは式 (44) で与えられる関数の形に良くフィットできる。L. Hau 等は凝縮体の境界をその場測定の近共鳴の吸収像で調べ [102]、そのデータを凝縮体の原子数、トラップ周波数、そして散乱長が既知のものとして求めたグロス・ピタエフスキー方程式の解と比較し、両者は非常に良く一致した。

5.1.2 平均場のエネルギー

これらの凝縮体の像はボーズ凝縮体の形 (そしてダイナミクス) を決定するのに相互作用が重要性であることをまさに示すものである。図 11 および図 12 の凝縮体は磁気トラップの長軸方向に約 $300 \mu\text{m}$ 伸びている。これに比べて、理想気体のボーズ凝縮体は軸方向のトラップ周波数が 17Hz においてはその二乗平均平方根 (RMS) 長さは $\sqrt{2\hbar/m\omega_z} \simeq 7 \mu\text{m}$ しかないことになる。凝縮体は自分自身の反発力によりはるかに大きなサイズに膨れる。

凝縮体の相互作用エネルギーと、その原子数に対する依存性は飛行時間法による像において膨張エネルギーを測定することによって調べられた [148, 197]。MIT の研究においては [148]、純粋な凝縮体が作られる直前で蒸発冷却を止める、またはこれを越えて蒸発冷却を行うことによって凝縮体の原子数が変えられた。全てのこれらの凝縮体がトーマス・フェルミ領域にあるため、これらの初期運動エネルギーは無視でき、平均場エネルギー (化学ポテンシャル) は $N^{2/5}$ のようにスケールする (式 50)。凝縮体の原子数は 100 程度変化させ ($\simeq 5 \times 10^4$ と 5×10^6 の間)、トーマス・フェルミの予想は非常に良く確かめられた。

JILA における実験によって得られた飛行時間法による像は同様に解析された [197]。小さな凝縮体が理想気体とトーマス・フェルミ限界の間で調べられた。像は膨張に対する数値計算モデルと定量的に一致し、分光的なデータから決定された散乱長を用いて凝縮体の平均場の相互作用をよく記述できることを検証した。

5.2 (ゼロでない) 有限温度のボーズ凝縮体：熱力学

5.2.1 BEC の転移温度

調和振動子ポテンシャルに閉じ込められた N 個の理想気体原子に対して予想される BEC の転移温度は $k_B T_c^{(0)} = \hbar\bar{\omega} N^{1/3} / g_3(1)$ で、ここで $\bar{\omega}$ はトラップ周波数の幾何学的平均である。この関係式は条件 $n\lambda_{dB}^3 = g_{3/2}(1)$ に反映し、これはトラップの中心に適用される [190]。JILA[1] および MIT[2, 148] における初期のボーズ凝縮の観測はこの理想気体の条件と一致し、70 年前の予言を検証した [33]。

その後、相互作用および有限の大きさの効果による転移温度の変化に注意が払われた。箱の中の弱く相互作用する気体に対しては、転移温度は $\sqrt{na^3}$ に比例した大きさだけ高い方にシフトすることが予想される [20](最

近の研究 [206, 207] も見よ)。この効果はボーズ・アインシュタイン凝縮の臨界位相空間密度を理想気体のときの値 $g_{3/2}(1)$ から下がることを示している。不均一なポテンシャルにおいては、相互作用によるさらなるシフトが起こり、これは原子が互いに反発するにつれてトラップ中心の密度が下がることによる。これは T_c の下方のシフトをもたらす [208]。最後に、臨界温度はまた調和振動子トラップ中の有限個の原子数および離散的なエネルギー準位によっても下方にシフトする。これは零点エネルギー $\hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2$ を考慮して、調和振動子の状態密度を修正することによって説明可能である [209, 210]。

転移温度の測定は JILA [211] において少ない数のトラップ原子を用いて行われた。凝縮体の割合は飛行時間法において測定され、これは換算温度 $T/T_c^{(0)}$ を用いて様々な予想結果と比較された。これらの結果は理想気体の予想と矛盾無く一致した。予想される温度のシフトはこれらの測定精度 5% と同じ大きさであった。より高い精度はより多数の原子を用いることによって得ることができる。有望な進展は J. ダリバードによって Varenna において示された。究極的には、飛行時間法 (??節) による像の不確かな解釈によって測定は損なわれるかもしれない。これはその場測定による像によって取り除く事が可能である。

5.2.2 凝縮体の割合

温度に対する凝縮体の割合 N_0/N の最初の結果は [148, 211]、温度 T の減少に伴い、凝縮体の割合の急激な増加を示した。これは調和振動子ポテンシャル中の理想ボーズ期待に対する理論的な予想 $N_0/N = 1 - (T/T_c^{(0)})^3$ と矛盾無く一致した [190]。均一な気体に対しては、増加は $N_0/N = 1 - (T/T_c^{(0)})^{3/2}$ のようにより緩やかである。この依存性はバイコールガラス中のヘリウムの測定において観測され、これは希薄な三次元気体が実現されたことが示された [34]。

相互作用は凝縮体の割合を下げる。これが起こるのは主に原子がボーズ凝縮に集まるにつれて基底状態のエネルギーが上昇するからである。これは化学ポテンシャルの増加、またこれによって熱的な原子雲の粒子数の増加を意味する。いくつかの研究によって凝縮体の割合の減少が数値計算 [208, 212, 213]、同様に半理想的な近似によって解析的に評価された。この近似は熱的な原子雲が外部トラップポテンシャルと凝縮体による平均場反発ポテンシャルを組み合わせたものの中にある理想気体として扱うものである [201, 214]。

この減少の大きさはパラメーター $\eta = \mu_0/k_B T_c^{(0)}$ によって特徴付けられる。ここで μ_0 は全てのトラップ粒子 (原子) がボーズ凝縮を形成している場合の相互作用エネルギーである [198]。 η は調和振動子トラップを用いた現在の全ての実験において小さい。さらに、もし $T_c^{(0)}$ をよく校正していないと、凝縮体の割合が減少する証拠は失われてしまう。実際、これらの相互作用による効果の証拠は調和振動子トラップの原子においては得られていない。最近、この効果を強める非調和振動的なトラップポテンシャルを用いた実験によって明確な証拠が得られた [21] (8.2 節)。

5.2.3 密度分布の輪郭

部分的に凝縮した原子雲のその場測定による密度分布の輪郭が MIT において測定された [168, 30]。様々な温度における原子雲の一連の位相コントラスト像を調べ、この結果から、 T 、 μ 、 N を決定し、そして N_0 を見積った (図 13)。これらを決定することにより、また飛行時間法による測定から [148]、凝縮体のエネルギーと原子数の間のトーマス・フェルミの関係式がより高い温度においても引き続き成り立つことが見てとれた。ゼロでない有限の温度の性質のより高感度な測定は集団励起の周波数の精密測定によって得られる。これは 6 節において議論する。

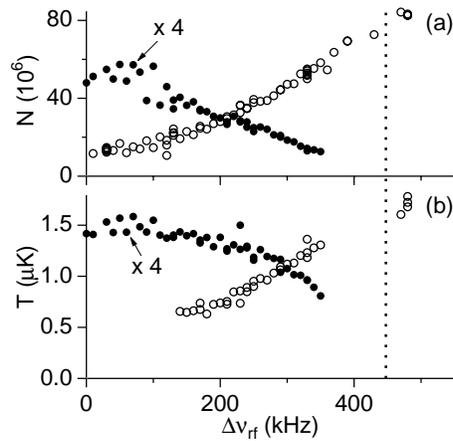


図 13: 相転移以上および以下におけるトラップされたボーズ気体の平衡状態の特性。全原子数 N (a、白丸) は測定したカラム密度の積分から決定された。近似的な凝縮体の原子数 N_0 (a、黒丸、 $\times 4$)、温度 T (b、白丸) および化学ポテンシャル μ/k_B (b、黒丸、 $\times 4$) はフィットより決定された。 $\Delta\nu_{rf}$ は蒸発冷却サイクルにおける最終的なラジオ波周波数によって決まるトラップの深さである。点線は観測された転移温度を示す。 N および N_0 の系統的な誤差は位相コントラスト信号の校正により最大 20%と見積られる。図は文献 [21] より引用。

5.2.4 比熱

原子雲の解放する全エネルギーの温度に関する微分は比熱に関係するが、トラップのポテンシャルエネルギーは含まれない。理論的な計算 [208] は実験結果 [211] と良く一致し、解放されるエネルギーおよび全エネルギーは温度の関数として同じような振る舞いをする。両方とも転移温度においてその傾きが不連続になる。

5.3 負の散乱長を持つボーズ凝縮体

今までの議論では斥力相互作用するボーズ気体的を絞ってきた。これは散乱長が $a > 0$ の場合である。スピン偏極した ^7Li 気体を用いた実験も行われ、これは散乱長が負である [215]。均一な系においては、引力相互作用はボーズ凝縮の形成を妨げる。なぜなら、凝縮体はより高い密度に収縮することによって自己エネルギーを下げ、ついには極端に大きな衝突ロスをもたらすからである。しかし、トラップ中のある臨界原子数以下の凝縮体に対しては、運動エネルギーの障壁によってこの崩壊は予め妨げられる。ライス大学の実験では [90, 3]、注意深く特性を評価した結像光学系によって 1000 個以下の原子数の凝縮体がある場測定において確認することができた。観測された凝縮体の原子数は凝縮体の崩壊に対する予想される臨界原子数に一致した。

6 音波およびその他の動的特性

ボーズ・アインシュタイン凝縮は原子物理の道具を用いて生成され、また調べられているが、音波の研究においてはこれが何 10 年も前の凝縮系 (固体) 物理と最も良く結びついていることが示される。量子液体における音波の性質に関する我々の理解の多くは液体ヘリウムの状況から得られるものである (文献 [216]、[217] の議論を見よ)。しかし、液体ヘリウムにおける強い相互作用により (この結果、液体になっている)、超流動とボーズ・アインシュタイン凝縮を伝わる音波との間の基本的な結びつきはすぐには明らかではなかった。実際、液体ヘリウムの研究がよりその動的特性に深く進んで行くにつれて、二つの競合する理論的なアプローチが持ち上がった。ランダウ学派の経験的な量子流体力学的なアプローチと、チツザとロンドンのボーズ凝縮との関係

を強調した二相の流体の描像である。

二つの理論が収束することが弱く相互作用するボーズ気体に対するボゴリュボフ理論によって示唆された [218]。これはボーズ・アインシュタイン凝縮が励起スペクトルの性質を生じることを示すもので、これはランダウの流体力学理論が最初に自明の事と仮定していたものである。縮退したボーズ気体の理論はその後さらに発展し、有限温度における音波の伝搬の性質に対する深い洞察を与え [219]、また液体ヘリウムの実験の解釈、そして BEC の相転移の性質を与えた。

今では、世界中で 1 ダース以上の研究室で気体のボーズ・アインシュタイン凝縮体が生成され、研究者はこれらの数 10 年前の理論に戻り、その有効性を検証し始めた。これらの理論に関する記述はこの本の他の章に残しておき、ここではこの理論的な内容のうち、最近の磁気トラップ中のボーズ凝縮気体の実験に関係する点に関してのみ紹介する。階層的な長さのスケールを考慮すると (表 4 を見よ)、音波の伝搬の記述は異なる領域に分けることができる。短波長におけるパルスの伝搬と長波長の集団モードの間を区別し、さらに衝突が無い領域と流体力学的に振る舞う領域とを区別する。衝突が無い領域および零度での実験によってボーズ凝縮気体のボゴリュボフの平均場の記述が確かめられ、一方、ゼロ度以外の温度での発見はこの記述に対する理論的な定式化を喚起してきた。極最近、実験は流体力学的な極限に向かって進み、超流動ヘリウムにおける第一および第二音波の現象とより密接に結びつくことが可能になった。

表 4: 凝縮体と熱原子雲の集団励起の性質。長さの尺度の階層構造に従ってそれぞれの状況は区別される。励起の換算波長 λ_{ex} 、ヒール長 ξ 、そして擬粒子間の衝突に対する平均自由行程 l_{mfp} 。

状況	長さの尺度	凝縮体	熱原子雲
衝突無し	$\lambda_{ex} < \xi, l_{mfp}$	弾道的	弾道的
衝突無し	$\xi < \lambda_{ex} < l_{mfp}$	ゼロ音波	弾道的
流体力学的	$\xi < l_{mfp} < \lambda_{ex}$	第二音波	第一音波

6.1 均一なボーズ気体における衝突無しの励起

均一なボーズ気体における集団励起の性質は階層的な三つの長さのスケールに依存する。

- 換算励起波長 λ_{ex}
- ヒール長 ξ 、これは凝縮体の密度から $\xi = (8\pi a n_0)^{-1/2}$ と与えられる。この長さスケールで凝縮体の波動関数を書き直すことにより、運動エネルギーが化学ポテンシャルと等しくなることが示唆される。
- 擬粒子間の衝突、またはより明確には、集団励起と熱原子雲を含む他の励起との間の衝突に対する平均自由行程 l_{mfp} 。この長さスケールは凝縮体が無い熱原子雲中の自由粒子間の衝突を考えることによりこれを評価できる。このより厳密な決定は凝縮体による衝突の変化を注意深く考える必要がある (この本の K. パーネットの章を見よ)。

条件、 $\lambda_{ex} \ll l_{mfp}$ は衝突無しの領域を規定する (擬粒子間の衝突という意味で)。これは熱的な原子雲の低い密度において適用される。この領域の励起は温度ゼロ度に対してはボゴリュボフによって導出された [218]。波数ベクトル k での励起エネルギー ϵ_k は

$$\epsilon_k = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)} \quad (55)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{1}{\lambda_{ex}^2} \left(\frac{1}{\lambda_{ex}^2} + \frac{2}{\xi^2} \right)} \quad (56)$$

と与えられ、ここで $\mu = 4\pi\hbar^2 an_0/m$ は凝縮体の密度 n_0 によって定義される化学ポテンシャルである。長波長 ($\lambda_{ex} \gg \xi$) においては、励起エネルギーは波数ベクトルに線形に変化し、これはフォノン様の励起を意味する。このような励起の波束は広がらないでボゴリュボフ速度 $c_0 = \sqrt{\mu/m}$ で進行する。より短波長 ($\lambda_{ex} \ll \xi$) では、励起エネルギーは近似的に $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/2m + \mu$ となり、すなわち励起が平均場のオフセットエネルギー μ を持つ自由粒子の様であることを意味する。不均一トラップポテンシャル中では、平均場のオフセットエネルギーは、凝縮体が熱的な原子雲を押し出すことを意味する。衝突が無い場合の励起は有限温度においても同様に記述される [217]。ボゴリュボフ音波のフォノンと自由粒子の励起の違いは残り、一方凝縮体の密度 $n_0(T)$ は温度によって変化する。

6.2 不均一なトラップ中のボーズ気体における衝突無しの励起

不均一なトラップ中のボーズ気体の集団励起の性質は新しい長さのスケールの導入によって影響を受ける。凝縮体の長さ $x_{i,c,0}$ 。これは凝縮体の励起の記述を三つの領域に分ける。

- 凝縮体のどの方向の大きさよりも小さな波長の励起に対しては、 $\lambda_{ex} \ll x_{i,c,0}$ 、凝縮体は局所的に均一であるとみなすことができ、フォノンと自由原子との違いは先に述べたのものと同様である。実際、凝縮体の割合、密度分布のような有限温度の熱力学的な性質は、局所的な励起を記述するボゴリュボフのスペクトルを用いてことによって半古典論的なアプローチによって良く表される [199, 201]。このような波長における励起はまだ調べられていない。
- 凝縮体の大きさに近いより長い波長に対しては ($\lambda_{ex} \simeq x_{i,c,0}$)、励起スペクトルは離散的になる。すなわち系の集団モードは特定の周波数における音波の定在波になる。トーマス・フェルミ限界において、ボゴリュボフ音波と凝縮体の長さは共に $(an_0)^{1/2}$ のスケール則が成り立つ。このため、集団励起の周波数 $\omega \propto c_0/x_{i,c,0}$ は音速には依存しない。この領域の集団励起は後で示すように広い温度範囲にわたって調べられてきた。
- 非等方的なポテンシャル中のボーズ凝縮に対しては、励起の波長が凝縮体のある一方向または二方向の大きさよりも大きく、しかし残りの方向の大きさよりも小さいような中間的な領域がある。この場合、集団モードの軸方向の離散化は明確ではなく、このためパルスは音波のように伝搬する。このフォノンとしての描像を離散的なスペクトルはストリングリによって導出された [220]。

6.3 $T = 0$ 付近の集団励起の実験

原子物理の分光の伝統から、研究者が初期のころから凝縮体の離散的な励起スペクトルに注目したのは自然のことであった。最初に、温度が零度の極限における低エネルギー付近の励起が研究された。JILA の研究者は TOP トラップ中に閉じ込められた凝縮体の二つの形状の振動を研究した [176]。最初に円筒状に対称な $m = 0$ の四重極モードの励起で、これは凝縮体の軸方向 (z 軸) と径方向の長さが位相がずれて振動するものである (図 14a)。ここで m は z 軸方向の励起の角運動量を表す。2 番目は $m = 2$ の四重極モードであった。このモードに対しては、円筒対称性は破れ、凝縮体の二つの径方向の長さは逆位相で振動する (図 14c)。これらの実験における凝縮体は理想気体とトーマス・フェルミ限界の中間的な領域にあった。このため、これらのエネルギーの低いところにある振動は先に議論した自由粒子とボゴリュボフ音波の限界の間で調べられた。測定は平均場の理論と良く一致した [221]。

我々は同時に DC クローバーリーフ型トラップ中のタバコ状の凝縮体の絶対零度付近の振動を調べた [177]。集団モードはトラップ電流を正弦波で変調することにより励起された。この励起方法はトラップの軸方向の対称性を保つので、 $m=0$ モードのみが励起されることが期待された。幸なことに、トラップコイルが完全に対称

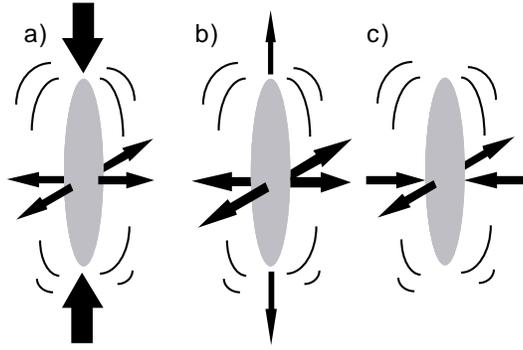


図 14: 低いエネルギーの集団励起の形状: a) 遅い $m = 0$ 四重極子モード 振動 (JILA, MIT)、b) 速い $m = 0$ 径方向の振動 (MIT)、c) $|m| = 2$ 振動 (JILA)。

でないことから、トラップ内の凝縮体の重心の振動の励起も可能になり、トラップ周波数の正確な測定がこれによってもたらされた。再び、二つの形状の振動が励起された。周波数が低い方のモードは JILA で観測された $m=0$ の四重極モードに似ており、軸方向と径方向で互いに逆位相で振動していた。周波数が高い方のモードは基本的には径方向のブリージングモードであった (図 14b)。非選択的なステップ状の励起によってモードを探し出した後、トラップコイルに 5 周期の正弦波変調を与えて、共鳴的に形状の振動を励起した。これに続く自由振動がアスペクト比の周期的な変調として飛行時間法 (図 15) およびその場測定 (図 16) において、またその後位相コントラスト法においても明確に見ることができた [30]。

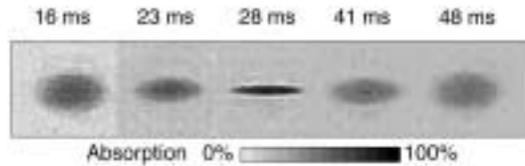


図 15: 飛行時間法の吸収像から見た凝縮体の $m = 0$ 四重極子振動。膨張する凝縮体のアスペクト比の振動が明確に見える。各原子雲の水平方向の幅は 1.2 mm である。図は文献 [177] より引用

我々の実験は良くトーマス・フェルミ限界で近似できる凝縮体によって行われた。観測された振動はストリンガリによって調べられ、彼はこれらの周波数および形状に対する解析的な式を最初に出した [222]。予想される周波数と実験結果は非常に良く一致した。速い $\nu = 2.04(6) \cdot \nu_r$ における振動は予想される $2 \cdot \nu_r$ に一致した。遅い振動に対しては、予想値 $1.580 \cdot \nu_r$ に対して周波数 $\nu = 1.556(14) \cdot \nu_z$ が測定された。もっと最近では測定が改良され、温度の下限において周波数 $1.569(4) \cdot \nu_r$ が得られた (ν_r と ν_z はそれぞれ径方向および軸方向の周波数である)[30]。この実験と理論の良好一致はボーズ凝縮の励起状態の平均場による記述に対する決定的で定量的な検証となる。

6.4 ボゴリユボフ音波の音速の測定

先に示した実験はトラップされた凝縮体のエネルギーの低いところの離散的な振動モードを調べたものである。均一な系の連続的な励起スペクトルにより密接に結びつけるため、我々は凝縮体の長さよりも小さい波長 $20 - 30 \mu\text{m}$ における密度変調も調べた [28, 223]。これに対しては、トラップ中心に集光した正に離調した非共鳴のレーザー光線を用いて局所的な密度の摂動を作った。正の摂動は凝縮体が生成された後、レーザー光線を急にオンにすることにより作られる。反発する光双極子力は原子を凝縮体の中心から追い出し、二つの密度

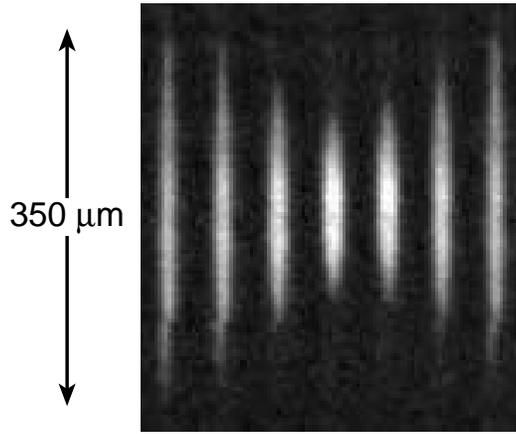


図 16: その場測定法で見た凝縮体の $m = 0$ 四重極子振動。5 ms の間隔で繰り返し撮った位相コントラスト像は低温のボーズ・アインシュタイン凝縮体の大振幅振動を示している。図は文献 [30] から引用

のピークを作り、これは対称的に外側に向かって伝搬する。これとは反対にレーザー光が予めある状態で凝縮体を生成し、その後にレーザー光をオフにする。これは局所的な密度の空乏を作り、これもまた外側に向かって伝搬する。

図 17 は密度の摂動が伝搬する様子を単一のトラップされた原子に対する連続的な位相コントラスト像を撮ることによって観測したものである。我々は原子雲の中心近くで一定の速度で一次元の軸方向に伝搬する音波を測定した。この場所では軸方向の密度変化はゆっくりとしている。断熱的に膨張した、または圧縮した凝縮体を用いて音速の密度依存性が調べられた。凝縮体の密度の最大値 n_0 は 1 から $5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ の範囲にした (図 18)。実験データはボゴリュボフ理論で予想される値、 $c_s = (4\pi\hbar^2 an/m^2)^{1/2}$ と比較された。この理論では原子雲の半径方向の凝縮体の密度変化は $n = n_0/2$ を用いて説明される [224, 225, 220]。データとこの理論との一致は密度が低い場合を除いて良い。密度が低い場合には音波のパルスが凝縮体の径方向の大きさより長いという仮定が成り立たなくなり始める。

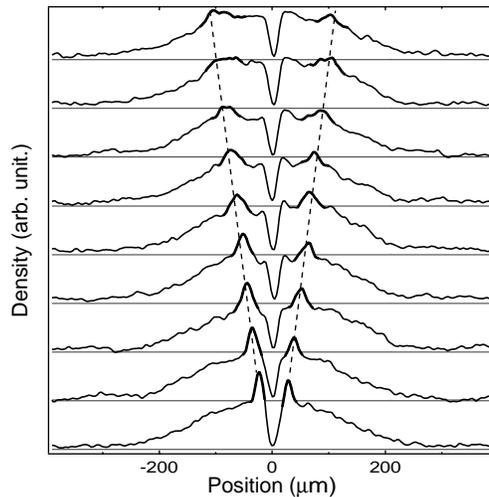


図 17: ボーズ凝縮体における音波の伝播の観測。非破壊の位相コントラスト像を 1.3 ms おきに撮った。凝縮体の密度の垂直方向の輪郭は二つのプリップ (突起) が原子雲の中心から対称的に外側に向かって進んでいるのが見える。図は文献 [28] から引用。

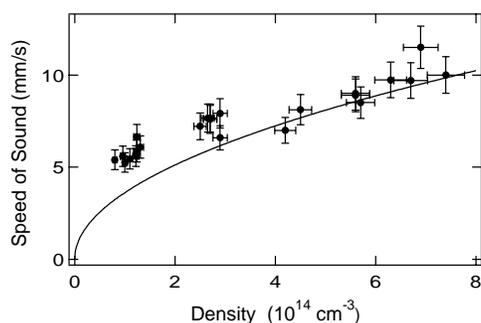


図 18: 音速対凝縮体のピーク密度。実線は理論的な予想で調整するためのパラメーターを何も用いていない。誤差範囲は統計誤差だけを示している。図は文献 [223] から引用し、誤差はオリジナルの実験から求めた。

我々の伝搬する密度の空乏を作る方法 (凝縮体を切断し、その後にナイフを取り去る) は伝搬するダークソリトンを作ることが議論された [226, 227, 228]。このようなソリトンは非線型の伝搬の方程式の他の応用からなじみのあるもので、一次元のボーズ・アインシュタイン凝縮において安定であることが予想される (トーマス・フェルミ条件と関係する)。我々の実験における凝縮体は一次元ではなく、ソリトンの大きさはおよそヒーリング長 ($\sim 0.2 \mu\text{m}$) 程度である。このため、我々の実験では個々のソリトンが観測されることはないかもしれない。しかし、観測された伝搬するディップは多くの分解されていないソリトンの包括線を形成している可能性はある。

6.5 非ゼロ温度における集団励起

先の実験は温度ゼロ度近くの試料によって行われたものであるが、観測された減衰はゼロではない有限の温度の振る舞いを示すものであった。JILA[178] および MIT[30] における次の一連の実験はボーズ気体の温度を変化させた時のボーズ気体の励起を明らかにした。

ゼロでない有限温度は三重の効果がある。(1) 熱原子雲の形状の振動がもたらされる。(2) 集団モードの周波数は凝縮体と熱原子雲との間の相互作用の影響を受ける。(3) 振動は温度が高くなるにつれ減衰が増加する。

6.5.1 熱原子雲の振動

非ゼロ温度においては、気体の大部分は凝縮体ではない。この熱的な部分はその場測定および飛行時間法において測定される二相の密度形状にはっきりと認められる。このため、トラップポテンシャルの変調に対する熱原子雲と凝縮体の両方の応答は分離して調べることができる。このため、部分的に凝縮したボーズ気体の二相の液体による描像に従って、各タイプの形状の振動に対して二つの系の「集団励起」がある。凝縮体の振動、そして熱原子雲の振動。この二つの振動の周波数は一般的には異なるものである。

JILA の実験では [178]、熱原子雲の形状の振動周波数は $m = 0$ および $m = 2$ のどちらの四重極子モードに対してもトラップ周波数の約 2 倍であった。この実験では熱原子雲は衝突が無い領域であった。この領域における熱原子雲のダイナミクスは音波の伝搬の様ではなく、弾道的である。このような振動は唯一、調和振動子トラップポテンシャルにおいて永続的で、この場合には任意の速度の自由粒子は同じ振動周期となる。これに対して、箱型ポテンシャル中の衝突が無い熱原子雲は振動周期の多きさは速度に反比例し、集団的な応答は急激に減衰する。

MIT における実験では [30]、熱原子雲はトラップ周波数の整数倍とは異なる周波数で振動した。この応答は熱原子雲中の流体力学的な振る舞いの始まりによるものである。これは??節でさらに議論する。

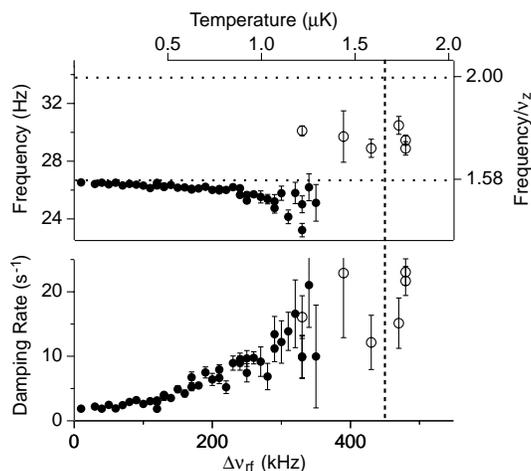


図 19: 熱原子雲 (白丸) と凝縮体 (黒丸) の $m = 0$ 四重極子集団振動の周波数の温度依存性と減衰率。自由粒子の極限である $2 \nu_z$ と、凝縮体の振動の温度ゼロ度の極限である $1.580 \nu_z$ を示してある。垂直方向の点線は観測された遷移周波数を示す。温度軸は $T > 0.5 \mu\text{K}$ に対する平衡状態の原子雲の観測を基にしている。

6.5.2 凝縮体の振動の周波数シフト

有限温度のもう一つの効果は凝縮体の励起の周波数のシフトである。このような周波数シフトは、温度が上昇するにつれて凝縮体の密度が減少して、フォノンから自由粒子への励起がシフトすることによるものと期待される。しかし、これ以外の効果は明白である。例えば、JILA において $m = 2$ の四重極子モードの周波数が温度が高くなるにつれて減少することが見出された。これに対して自由粒子の領域ではこれはより高い周波数に向かう傾向となる [178]。MIT の実験においては、調べた凝縮体はいつもトーマス・フェルミ限界にあった。これに関わらず、紛れもない下方向の最大 5% の周波数シフトが観測された (図 19) [30]。

またボゴリユボフ音波の伝搬におけるゼロで無い有限温度の効果も調べた [28]。凝縮体の密度を変えたとき、ボゴリユボフ音波の音速は $\sqrt{n_0(T)}$ のように変化し、 n_0 は温度に依存した凝縮体の密度である。これは均一な気体に対する有限温度の理論から期待される振る舞いと一致する [229, 217]。精度不足により、その後の実験で見出された 5% のシフトは検出できなかった [30]。

これらの実験で見出された振る舞いはまだ完全には理解されておらず、ゼロで無い有限温度のボーズ気体の振る舞いを記述するための理論を発展する主要な課題となっている (この本のいくつかの章における議論を見よ)。様々な説明が提案されている。

- ボゴリユボフ理論の有限温度に対する簡単な拡張はポポフによって導入された近似を用いている。これは熱原子雲の補正および運動を無視するものである [230]。この近似においては、凝縮体はトラップポテンシャルと熱原子雲による平均場ポテンシャルとの和である有効ポテンシャル内で振動するものである (凝縮体と熱原子雲は互いに反発することを思い起こしてもらいたい)。この近似が成り立たなくなるのは最近のボーズ・アインシュタイン凝縮の実験が行われる前から既に明白であった。なぜなら、これはパイン・ヒューゲンホルツ理論を破るからで、この理論は連続的な励起スペクトルであることが必要である (最近の [231, 232] の議論を見よ)。この定式化を JILA の実験 [213, 212] に当てはめると、結果を正しく説明することができなかった。
- ポポフ近似の失敗に対応して、現在調べられている不均一な凝縮体に対して有限温度のボゴリユボフ理論によるギャップが無い定式化が考えられた。この理論はポポフ近似を超えるもので、これは凝縮体が熱原子雲中の粒子間の衝突によって「異常密度」の項をもたらす影響を考慮したものである (バーネットの

章も見よ)[232]。この近似は JILA の実験結果を限定的には説明することに成功した。この近似は観測された $m = 2$ 振動の周波数の下方に向かう傾向を説明したが、 $m = 0$ 振動が示す上方へ向かう傾向は説明できてない。

- 最後に、最近の研究において、熱原子雲の運動を取りいれてこれが観測された凝縮体の励起に与える影響を理解しようという試みが行われた [233, 234]。JILA の実験にこのような考え方を予備的に適用したものは有望そうであるが、MIT のデータには適用されていない。

6.5.3 凝縮体の振動の緩和

初期の集団励起の実験において、温度ゼロ度の極限における振動を研究しようという試みにも関わらず、これに緩和(減衰)が存在することを既に述べた。JILA および MIT における温度を変化させた実験において、緩和レートは温度と共に急激に増加することが見出され、BEC の相転移温度近くでは 10 倍にもなる。緩和レートは熱原子雲が像に認められないような温度においても温度と共に変化することが見出された。この意味において、緩和率は極低温の凝縮体の高感度な「温度計」になるかもしれない。

緩和レートの温度依存性はまた別の仕方でも起こり、これは熱原子雲の存在が凝縮体の運動に影響を与えることによるものである。この緩和に対する明らかな機構はランダウ緩和である。これは擬粒子が熱的な励起と衝突して消滅してより高いエネルギーになるものである [235, 236, 237, 238]。最近のランダウ緩和を基にした取り扱い、実験で観測された緩和を良く説明するのに成功した [238]。これらの扱いは P. フェディシェフによってヴァレーナで議論された。

ランダウ緩和は熱的な励起の存在に依存する。このため、ゼロ度ではこの緩和は無い。これにも関わらず、ゼロ度での集団励起は緩和しうる。その一つの機構であるバリエフ緩和はエネルギーが高い集団励起が二つのより低いエネルギーの励起に緩和することに相当する。トラップされたボーズ凝縮体と低いエネルギーのモードに対しては、この緩和機構は不可能で、それは緩和する先のモードが無いからである [236]。集団励起はまた温度ゼロ度の位相ずれの影響を受けやすい。これは凝縮体の原子数の不確定性およびモードの振幅依存性によるものである。両方とも明らかに緩和をもたらす [239, 240, 241]。さらに、より大きな振幅の振動に対して、モード間の非線型混合がエルゴード的な振る舞いをもたらすことが示されている。これは非可逆的な緩和と実効的な原子雲の加熱をもたらす [242]。これは将来の実験に対して集団励起の研究をさらに温度ゼロ度の限界近くまで続けることに対して励みになる。この領域に達するには多分より制御された(例えば光トラップによってもたらされる)蒸発冷却が用いられるだろう。

6.6 ボーズ気体における第一および第二音波

今まで、衝突が無い領域においてボーズ凝縮気体の励起を議論してきた。この場合、励起の波長は平均自由行程よりもはるかに小さく $\lambda_{ex} \ll l_{mfp}$ である。この領域は温度ゼロ度で熱原子雲の密度が低い場合に適用される。ノーマル成分のより高い密度においては、 $\lambda_{ex} \gg l_{mfp}$ の場合、集団励起はその性質は流体力学的になり、これは二つの流体力学的な液体(ノーマル成分と超流動成分)の同位相と逆位相の振動である二つのフォノン様の励起が期待される。二つの流体力学的なモードの存在はバルクの超流動 ^4He の場合に似ており、この場合にはこれらは第一および第二音波として知られる。超流動 4 は小さな熱膨張係数を持っている。このため、二つの固有モードは密度変調(第一音波)と温度変調(第二音波)に分かれる。両方の液体とも等しく両モードに参与している。これに対して、気体は大きな熱膨張係数を持つ。このため、それぞれの液体はほとんど結合しないで振動することになる。同位相の振動は第一音波と似ており、熱原子雲が主に含まれている。逆位相の振動は第二音波に似ており、ほとんどが凝縮体に閉じ込められている [219, 217, 243, 244]。別の違いについて記しておく。第二音波の観測は超流動 ^4He において二つの液体の存在を示す劇的な証拠であった。一方、トラップ

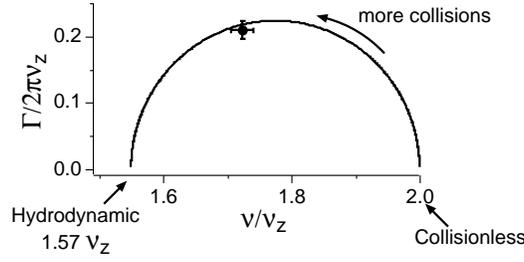


図 20: 衝突が無い極限と流体力学的な極限の間における熱原子雲の励起周波数 ν およびその減衰率 Γ 。(曲)線は式 55 による補間を示す。実験データ点は BEC 転移温度以上の熱原子雲を中間領域において調べたものを示す。

されたボーズ気体においてはノーマル成分と超流動成分の間目で見える分離によって既に二つの液体の近似が検証されている。

MIT における有限温度の実験において、流体力学的な領域に始めて達した [30]。流体力学的な振る舞いの徴候は熱原子雲の振動によって示された。この実験において、熱原子雲は BEC の転移温度以上および以下の両方において周波数約 $1.75\nu_z$ 、減衰レート約 20s^{-1} で振動した (図 19)。観測された周波数 ν は衝突無しの極限に対して予想される $\nu = 2 \cdot \nu_z$ と流体力学的な極限に対して予想される $\nu = 1.55 \cdot \nu_z$ の中間である [245]。これらの測定は熱原子雲は二つの極限の中間的な密度の領域にあった。この中間的な領域においては、振動の複素角周波数 ω (この虚部は減衰率を与える) は両者を補間することにより

$$\omega^2 = \omega_C^2 + \frac{\omega_H^2 - \omega_C^2}{1 - i|\omega\tau|} \quad (57)$$

と表され [246, 247]、ここで ω_C と ω_H はそれぞれ衝突無しの極限および流体力学的な極限における励起の角周波数である。また τ は熱的に励起された擬粒子との衝突確率である。図 20 に、我々の BEC の相転移より上における観測結果に対して、補間式 (57) で表される $\Gamma - \nu$ 平面内の軌跡が示されている。

長さスケール λ_{ex} および l_{mfp} を考慮して我々の実験における領域を特徴づけることも可能である。熱原子雲のピーク密度 $n_T = 2.612 (mk_B T / 2\pi\hbar^2)^{3/2}$ と、衝突断面積 $\sigma = 8\pi a^2$ を用いて、衝突による平均自由行程を $l_{mfp} \simeq (n_T \sigma)^{-1} = 96 \mu\text{m} \times (T/\mu\text{K})^{-3/2}$ のように見積る事もできる。ここで散乱長は $a = 2.75 \text{ nm}$ である。転移温度付近では、熱原子雲の軸方向の rms 長さは $z_{th,0} \simeq 8 l_{mfp}$ であることが分かった。この長さスケールの比較、測定された $2 \cdot \nu_z$ からの周波数シフト、そして高い減衰率、これら全てが熱原子雲の集団的振る舞いが衝突により強い影響を受けることを示すものである。このため、観測された振動は流体力学的な励起、すなわち第一音波の徴候を示している。低い減衰率によって特徴づけられる流体力学的な極限はより大きな原子雲においてのみ達成される。

同様に、 l_{mfp} と高い温度における凝縮体の軸方向の長さ z_c との比較 ($z_c \simeq 4 l_{mfp}$) は、流体力学的な効果が凝縮体の振動にも影響を及ぼし得る事を示している。このため、これらの振動はボーズ気体における第二音波となるかもしれない。我々のデータと比べうるゼロから第二音波への遷移を扱った理論的な予想は少ない。将来のより大きな凝縮体を用いた実験において、このクロスオーバーの徴候が振動の減衰率に現れるかもしれない。これは流体力学的な限界に達するような高い温度において再び減少する。実際、最近のフェディチェフらの解析によって (この本の彼の章を見よ)、我々が測定した高い温度における減衰率が衝突が無いランダウ減衰のモデルを基にした予想値よりもわずかに低くなることを見出され、仮ではあるが流体力学的な効果の始まりの徴候を示すものである。

これ以外の第二音波に関係する集団励起は反対称双極子振動である。これは熱原子雲と凝縮体の重心が互いに反対の位相で振動するものである。このモードは液体ヘリウムにおける第二音波に似ており、この場合には

超流動とノーマル成分の液体が等しい振幅で互いに逆位相で振動を行うものである [224]。我々はこれを非共鳴のレーザー光線を用いて励起した。レーザー光線は熱原子雲とのみ重なっている原子雲の端に照射した。ミラーをモーターによってわずかに振る事によってレーザー光線は原子雲の中心に向かったり離れたりして振って、熱原子雲を軸方向に押し、しかし一方で凝縮体には直接影響を与えないようにした。光はその後オフにし、原子雲は自由振動させた。

その後、最初は小さな凝縮体の重心の振動は原子雲全体の重心の漸近振動に成長した。この全体の重心運動の座標系では、これは原子雲は非対称双極子振動を行っていることになり、これは我々が捜し求めていたものである。このモードのトラップ周波数からの下方の周波数シフト (約 5%) とこの結果生じる散逸は凝縮体と熱原子雲の相互作用を示すさらなるあらわれである [30]。この相互作用を記述するには時間に依存する熱原子雲の取り扱いが必要で、これはほとんどの理論的なアプローチが定常状態の取り扱いをしているのとは対照的である。

6.7 将来への挑戦

過去 3 年間の仕事はボーズ凝縮の雲における音波の基本的な点を明らかにするものであった (表 5)。実験はゼロ度およびゼロ度以外の温度における離散的な定在波モードを調べたり、減衰率および周波数シフト、音波のパルスの伝搬、および流体力学的な振るまいの徴候を調べたものである。これらの実験の進歩は我々の理論的な理解の非常に大きな発展によって達成された。集団励起とゼロ度における音波の伝搬の相補的な描像が組み立てられた。ゼロ度以外においては、凝縮体と熱原子雲が結合した運動に対する理解が進んだ。減衰に対するアプローチは成功裏にトラップされたボーズ凝縮体の関係に研ぎ澄まされ、BEC の転移温度以上および以下におけるトラップ気体の流体力学的な振るまいが明らかになった。

これらの進展から今後のさらなる研究に対する多くの可能性を指摘することができる。例えば、 10^{-3} レベルの集団励起周波数の測定の可能性が示されれば、小さいがしかし概念的に重要な効果、例えば量子欠損による小さな周波数シフト (約 1%) を探索することが可能になる [249]。ほんの数個の離散的な集団モードを細かく調べたにすぎないが、しかし励起を作るために行われた様々な方法は直ちに他の研究に応用可能である。実際、我々はこのようなモードの一つをうっかり励起したことがある。トラップ周波数を測定するために径方向の重心の振動を励起する過程において、トラップ軸方向に 8 個もの節を持つとんでもない高いエネルギー準位にある凝縮体の励起に出くわした (図 21)。これらの他のモードを調べることにより、離散的なモードから連続的な音波の伝搬 [220]、または可能性がある局所的な励起のカオス的な伝搬との関係を明らかにするかもしれない [250]。より低い温度の試料を用意することができるようになれば温度ゼロ度近傍の位相緩和および減衰を調べることができ、一方、より大きく高密度の凝縮体を作り出すことによって真の流体力学的限界を調べる道が開かれる。

6.8 他のダイナミックな性質

ボーズ凝縮体の音波の性質に関する先の議論では外からの摂動に対する線形な応答のみを考えていた。より大きな振幅の運動を調べることはグロス・ピタエフスキー方程式のさらなる強固な検証となる。この節では、このような研究と、同時に凝縮体の形成や減衰を含むこれ以外のダイナミックな過程をまとめてみる。

6.8.1 ボーズ・アインシュタイン凝縮の自由膨張および大振幅振動

調和振動子トラップから自由膨張する間のボーズ凝縮体の時間発展はグロス・ピタエフスキー方程式によって記述される (4.2.2 節)。この膨張を注意深く調べる必要があり、これは平均場近似の検証としてだけでなく、トラッ

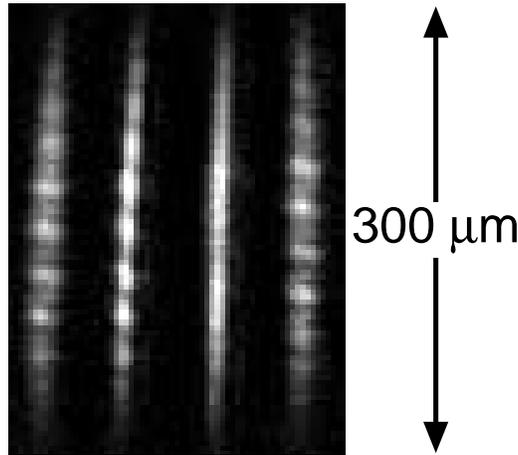


図 21: これから起こる振動の形状。時間間隔 1.3 ms の四つのその場測定像によって葉巻型の凝縮体の高いエネルギーの軸方向の励起が示されている。軸方向周波数約 17 Hz のトラップ中で振動周波数は約 250 Hz である。

プされた凝縮体の性質を調べるために飛行時間法による像を用いる有用性を確かめることにもなる。MIT[2, 148] および JILA[1, 197] におけるこの膨張に関する初期の研究は理論的な予想と良く一致した [251, 195, 194, 252]。

我々は最近、(短い飛行時間による) 位相コントラストおよび (長い飛行時間による) 吸収像を用いてこの時間発展をより詳しく調べた [13]。測定されたアスペクト比を図 22 に示す。二段階の膨張が明らかに示されている。初期の数ミリ秒の間、径方向に加速し、そしてその後の純粋な径方向の膨張する。軸方向および径方向のトラップ周波数もその場測定による像によって決定した。文献 [194] による理論的な予想はトラップ周波数にだけ依存するものであるが、これはデータを非常に良く再現し、大振幅運動の平均場による記述を確実なものにした。

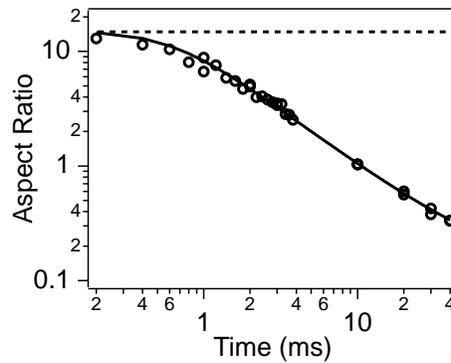


図 22: 膨張するボーズ凝縮体のアスペクト比 (軸方向対径方向の幅)。10 ms 以下の時間に対しては、位相コントラスト像によってデータを取得し、より長い時間に対して吸収像を用いた。点線は径方向 248(1) Hz および軸方向 16.23(3) Hz のトラップ周波数の比を示している。実線は文献 [194] の予想値である。

これ以外の研究にトラップされた凝縮体の大振幅運動に焦点をあてたものがある。集団励起を、励起周波数が擬粒子のスペクトルに反映する温度ゼロ度の極限の十分近くで確実にこれを調べるため、この周波数を振幅の関数として調べた [176, 177, 178, 30]。低温での低いエネルギーの $m = 0$ の四重極子モードの凝縮体の振動に対しては、振動の振幅の低い限界からこれが 50%にまで上がると、励起周波数の 1Hz の上方のシフトを観測した。これはダルフォール等の理論的な解析と一致した [196]。

最近、JILA において二成分凝縮体の大振幅運動のダイナミクスが調べられた [172]。観測された 2 成分系

表 5: 気体のボーズ・アインシュタイン凝縮体の音波の研究。音波の性質の包括的な描像を集めた。しかし多くの現象はまだ解明されていない。

≤ 1998	
実験	ボゴリュボフ (ゼロ) 音波 $T = 0$ 離散的なモード 非ゼロ温度 減衰 音速 第一および第二音波 離散的なモード 減衰
理論	ランダウ減衰 ゼロ、第一、第二音波 離散的なモード ↔ 音波 流体力学的な理論
これから行われる実験	
$T = 0$ 減衰	ベリアエフ減衰 位相ずれ、崩壊、再起
エネルギーの高いモード 量子枯渇の影響 非線型効果	動的な構造因子 $S(\mathbf{q}, \omega)$ ソリトン、カオス、衝撃波 モード結合、周波数結合
流体力学	

のスロッシング (液体が揺れること) および緩和は温度ゼロ度における減衰の現れとして理論的に取り扱われた [242]。

6.8.2 渦の探究

集団励起はそれが角運動量を持っていたとしても、単一粒子の励起を表し、この励起は単一粒子の減衰によって基底状態と結びつく。これに対して渦は凝縮体全体を含む集団運動を表す。永続的なこれらの回転状態が可能であるのは、単一粒子の減衰に対して準安定であることによる。単一の粒子を回転していない基底状態に完全に落とすことによって凝縮体のエネルギーは下がるが、この多粒子全体が緩和することは非常に起き難い。パレーナの夏の学校における議論で示したように (フェッターによる章を見よ)、量子化された永続的な渦の探究は将来の BEC 研究の主要な目的の一つである。

我々の実験室における努力によって、この探索に対するいくつかの基本的な研究が行われた。調和振動子トラップ中にトラップされた気体のボーズ凝縮体の渦の安定性は疑問であるが [253]、渦は多重結合したトラップ配置においては安定であるはずである [254, 255]。最初に断熱的な膨張によって球状調和振動子トラップを作り、次に集光した正に離調したレーザー光をトラップに照射して原子をトラップの中心から追い出すことによって、ボーズ凝縮体に対する「ドーナツ」形のコンテナを作った (図 5)。その後で、バイアス磁場と勾配磁場を用いて磁気トラップの中心を移動させ、光の栓の周りにこれを回転させた。図 23 に示すように、これは凝縮体に角運動量を与え、一方その中には「穴」を維持することによって凝縮体の光の栓の周りの回転運動を引き起こす。我々は駆動を止めた後に回転を観測し、系が永続的な流れがある状態に緩和するのを期待した。それにも関わらず、弾道的に膨張する凝縮体の中心の欠損を探る事によって渦を探索したが、渦を示す証拠は何

も見出せなかった。しかし我々の検出法の S/N 比が低いことにより、凝縮体の中にこの存在を否定することは不可能である [188]。



図 23: ドーナツ型トラップ中で 1 Hz で回転する凝縮体の位相コントラスト像。凝縮体 (直径約 $100 \mu\text{m}$) は運動している間中、非共鳴レーザー光線によって穴を開けられたままでいる。原子雲に明らかに角運動量を与えているが、渦を検出する事はできなかった。図は文献 [188] から引用。

6.8.3 負の散乱長を持つボーズ凝縮体の崩壊

負の散乱長を持つ凝縮体は引力相互作用をもち、このためある一定の大きさを越えると新しいダイナミックな性質である崩壊を示す。崩壊の現れはリチウムの凝縮体 [3] における最大原子数が有限であることおよび凝縮原子の揺らぎから示される [256]。

6.8.4 凝縮体の形成と減衰

凝縮体の非可逆的 [29] および可逆的 [21] な形成の両方が実験によって調べられた。非可逆的な形成は磁気トラップ中において低温原子雲が突然 BEC の転移温度以下に冷却された後に観測された。凝縮体の成長の固有のダイナミクスはボーズ粒子の誘導を仮定したモデルと良く一致した (??節)。光と磁場の複合トラップポテンシャル中における凝縮体の可逆的な形成の研究は 8.2 節で議論する。

文献 [257, 170, 258] では凝縮体の減衰を調べ、これを三体衝突による再結合によって説明している。これは分子を形成してトラップからの原子のロスをもたらす。パート等 [257] によって測定されたボーズ凝縮体からおよび熱原子雲からのロスレートの定数の違いから、凝縮体の高次のコヒーレンスが明らかになった。典型的なナトリウムおよびルビジウムにおける実験では双極子緩和 (二体衝突) は無視でき、一方、水素においてはこれは減衰機構の大部分を占める [4]。これ以外の重要な発見は、 ^{87}Rb の二つの超微細状態の混合状態からの速い減衰が観測されなかったことである [25]。これはこの系の基底状態の散乱長がほとんど縮退していることが明らかになった [259, 260, 261]。凝縮体の減衰の劇的な増加がナトリウムにおいてフェッシュバハ共鳴近くで見出された [262] (8.3 節)。

7 コヒーレンスな特性と原子レーザー

ボーズ・アインシュタイン凝縮の魅力的な側面の一つはマクロな量子系におけるコヒーレンスの性質である。理論的には凝縮体はマクロな波動関数によって記述され、「巨大な物質波」であるかのように振る舞い、これは長距離の秩序によって特徴づけられる。初期の BEC の実験はボーズ凝縮体のエネルギー論に焦点が注がれ、これらの実験によってボーズ凝縮体は原子トラップから解放されると非常に狭い運動量分布を持って広がることが示された [1, 2]。この節ではボーズ凝縮体のコヒーレンスな特性を直接調べた実験による研究を議論し、原子レーザーとボーズ粒子誘導の概念を議論する。

Stimulated emission/scattering of ...

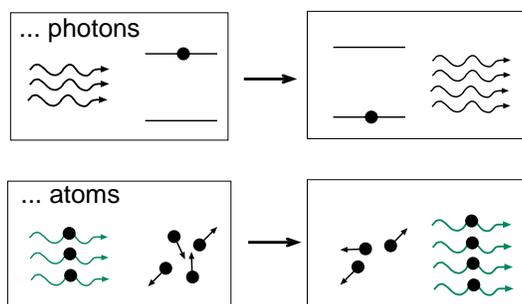


図 24: ボーズ粒子の誘導はレーザーにおける光の増幅 (上の図) および物質波の増幅の原因となる。下の図は如何にしてコヒーレントな物質波が弾性衝突の誘導によって増幅されるかを示している。この弾性衝突はコヒーレントな波に既に占有されている状態への散乱を増大させる。この過程はボーズ・アインシュタイン凝縮体の生成に重要なものである。

7.1 原子レーザーとボーズ粒子誘導

原子レーザーは誘導過程を通して明るい (輝度が高い) コヒーレントな原子線を生成する装置である。これは光に対して光のレーザーが行うことと同じことを原子に対して行う。原子レーザーはコヒーレント物質波を放出し、一方、光のレーザーはコヒーレント電磁波を放出する。コヒーレンスとは、例えば複数の原子レーザー線が互いに干渉可能であることを意味する。高い輝度が得る条件としてはモードあたりまたは量子状態あたりに多数の粒子を必要とする。熱的な原子線はモードあたりの分布数はほんの 10^{-12} であるのに対して、原子レーザーではこの数は $\gg 1$ である。このため原子レーザーの実現にはモードの占有率を非常に大きく増大する方法が必要である。

原子レーザーに対する二つの異なる利得機構が議論されてきた。蒸発冷却 [263, 264, 265] と光ポンピングである [266, 265, 267, 268]。両方の場合において、原子は物質波の共振器のある選択されたエネルギー準位に供給され、あるしきい値以上において、マクロな分布数が達成される。一般的に、系は熱平衡状態には無い。またレーザー動作は共振器のどのモードにおいても可能である。ボーズ・アインシュタイン凝縮は特別の場合で、弾性衝突を通してマクロな分布数が系の基底状態に立ち上がるものである。この弾性衝突は系の熱平衡状態をもたらす。

レーザー光は光子の誘導放出、すなわち光の増幅過程によって作り出されるものである。同様に、原子レーザー線は物質波の誘導増幅によって作り出される (図 24)。原子数の保存は物質波の増幅とは矛盾しない。原子レーザーにおいては、原子は熱浴から取り出されコヒーレント物質波に変換される。同様に、光のレーザーにおいては、エネルギーは熱浴から取り出され、コヒーレントな電磁波に変換される。原子レーザーはボーズ原子に対してのみ可能である。通常の気体においては、原子は無数の可能な量子状態の間に散乱される。しかし、ボーズ・アインシュタイン凝縮の相転移温度に達すると、原子は系の最低エネルギー状態への散乱が優勢になる。この突然起こる過程は光のレーザーの動作におけるしきい値と密接に関連する。ボーズ・アインシュタイン凝縮の存在は基底状態への誘導散乱をもたらし、凝縮体への散乱確率を $N_0 + 1$ 倍だけ増大する。ここで N_0 は凝縮体の原子数である。凝縮体への衝突と凝縮体からの衝突が等しくなった時 (詳細平衡)、熱平衡状態に達する。さらに蒸発冷却を行うことにより、熱平衡状態にはない原子雲が形成され、さらに低温へと緩和する。この結果、凝縮体が成長する。

レーザーを定義するいくつかの議論が行われている。これは光のレーザーの場合においてもそうで [269]、例えば、レーザー放射を得るには誘導放出は必ずしも必要無いことが示唆されてきた [265]。ここでの議論では、レーザーの特性を定義することと望ましい特性を区別しようとはしない。

7.2 ボーズ粒子誘導からのボーズ・アインシュタイン統計の導出

ほとんどの教科書において、ボーズ・アインシュタイン凝縮の分布関数はエントロピーを最大化を用いてその統計を計算するか [270]、同様の仮定を基にグランドカノニカル集団を用いることによって導出される [20]。しかし、ボーズ粒子誘導はボーズ・アインシュタイン統計と同様に基本的なものである。ボーズ・アインシュタイン平衡分布はまさに詳細平衡とボーズ粒子誘導を仮定することによって導出することが可能である [271]。

ここで量子状態 i にある分布数 n_i と弱い相互作用によって記述される気体を仮定する。相互作用によって状態 1 と 2 にある粒子は状態 3 と 4 に散乱される。熱平衡状態においては、二つの確率

$$W_{1,2 \rightarrow 3,4} = |M_{12,34}|^2 n_1 n_2 (n_3 + 1)(n_4 + 1) \quad (58)$$

$$W_{3,4 \rightarrow 1,2} = |M_{34,12}|^2 n_3 n_4 (n_1 + 1)(n_2 + 1) \quad (59)$$

は詳細平衡により等しくなる。さらに行列要素 $M_{12,34}$ と $M_{34,12}$ の絶対値は等しい。このため、

$$\frac{n_1}{n_1 + 1} \frac{n_2}{n_2 + 1} = \frac{n_3}{n_3 + 1} \frac{n_4}{n_4 + 1} \quad (60)$$

が得られる。

ここで唯一保存される物理量がエネルギーと仮定すると、分布数 n_i はエネルギー E_i だけに依存する事が期待される。すなわち

$$\frac{n_i}{n_i + 1} = f(E_i) \quad (61)$$

式 (60) は弱い相互作用によって結合する全ての (1,2) および (3,4) の対に対して $f(E_1)f(E_2) = f(E_3)f(E_4)$ となる。ここで系がエネルギー以外に保存する物理量がないと仮定すると、 $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ である全ての対 (1,2) は対 (3,4) と結合する。このため、関数 f は $f(E_1)f(E_2)$ が唯一 $E_1 + E_2$ に依存するような関数の関係に従う。この関係は指数関数

$$f(E) = e^{-\beta(E-\mu)} \quad (62)$$

によって満たされる。ここで β と μ は定数である。式 (61) と (62) はボーズ・アインシュタイン分布 $n_i = 1/(\exp(\beta(E_i - \mu)) - 1)$ を意味する。

凝縮体がまさに存在すること自体、既に間接的にボーズ粒子誘導の証拠を与えるものである。もし N_0 粒子の凝縮体が熱平衡状態にあるとすると、凝縮体の中に向かうものと外に向かう連続的な散乱がある。凝縮体から外に向かう散乱確率は N_0 に比例する。このため、凝縮体は唯一、ボーズ粒子誘導によって熱的な原子同士が衝突して凝縮体の中に散乱する確率が増大することによって安定になる。

7.3 磁気トラップ中の凝縮体の形成

今までに、コヒーレントな原子が原子の利得媒体を通りすぎるのを調べたり、一回のパスによる利得および増幅を観測する事はできなかった。しかし、凝縮体の形成を調べた際に、利得の証拠 (すなわちボーズ粒子誘導および成長) が得られた。

凝縮体形成のダイナミックスは相互作用する多体系の非平衡ダイナミックスが含まれ、まだ完全には理解されていない。凝縮体の時間スケールに対する最初の予想は無限に長いものから [272]、非常に短いものまで [273]、バリエーションがあった。初期の無限時間に対する予想はボルツマン方程式を基にしたものであった。この枠組みの中では凝縮体の割合はゼロからは成長できないというものである [272, 274, 275]。このため、これとは別個の核形成の過程を導入する必要がある、ボルツマン方程式は核形成の前 [276, 161]、および後 [277, 278, 279] のダイナミックスを記述することのみ用いられた。スタッフは凝縮体は非常に短いコヒーレントな段階にお

いて核形成が行われ [273, 275, 280]、その後、運動方程式に従って成長することを示唆した。カーガンおよび協同研究者は凝縮体の形成を議論した。これは凝縮体とは対照的に、位相揺らぎがあり、系の大きさと共に増大する時間スケールにおいて消滅するというものである [281, 282, 283, 284]。熱力学的な極限においては、非対角項の長距離の秩序が確立されるのに無限の時間がかかることになる。最近、ボーズ気体に対する完全に量子力学的な運動理論が定式化され、凝縮体の形成過程のモデル化に用いられた [285, 286]。

BECの実験による実現は凝縮体が有限時間内に確実に形成することを保証している。同様に二つの凝縮体の高いコントラストの干渉を観測することによって凝縮体は有限時間内に長距離のコヒーレンスを作ることを実演した [169]。しかし、固有の時間スケールはこの初期の研究においては不可能であった。なぜなら冷却は非常に遅く、系は熱平衡状態に近い状態に保たれていたからである。凝縮体形成に向かう固有の緩和を測定するためには、原子雲の空間分布のすそをラジオ波誘導のスピン転移を用いて切り取ることによって、原子雲を BEC の相転移温度以下に急激に冷却した。その後の凝縮体成長の固有のダイナミクスが完全に隔離された系において観測された (図 25)。

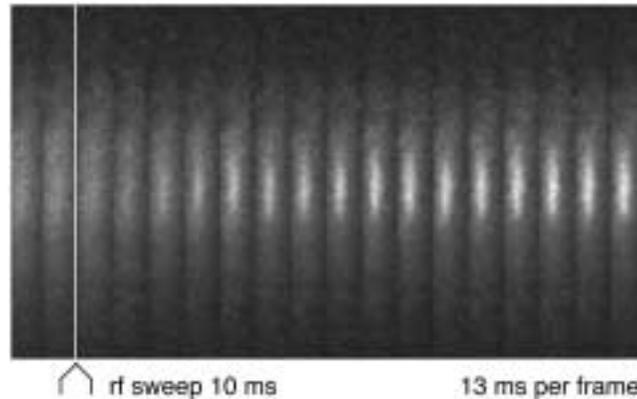


図 25: ボーズ・アインシュタイン凝縮体が如何にして形成されるかの観測 (カラー)。同一の凝縮体のその場測定によって撮られた 18 個の位相コントラスト像を示している。最初の 2 つのフレームは転移温度より上の温度の熱原子雲を示す。これに続く 16 個のフレームは BEC 転移温度以下で原子雲が消えた後に撮ったもので、原子雲の中心において凝縮体が成長するのを 13 ms の間隔で示している。像の長さは $630 \mu\text{m}$ である。図は文献 [29] から引用。

図 26 は様々な初期条件に対する凝縮体原子数の平衡化を示している。ラジオ波の掃引直後に凝縮体が存在しないとき、成長はゆっくり始まり、50 から 100 ms 後に加速される。これとは対照的に、ラジオ波の掃引の始まりの時点ですでに相当の割合の凝縮体が存在するときには、急激な凝縮体の成長が直ちに始まる。この「なだれ」様の振る舞いは利得を持つ系に特有のもので、熱平衡状態への指数関数的な緩和とははっきり異なる。我々の全ての結果はボーズ粒子誘導を基にしたモデルと一致した [29]。

モデルは確率を決定するパラメーター γ を含んでいた。我々の γ に対する結果は最初の理論的な予想 [285] よりも 4 から 30 の範囲の大きさだけ大きかった。より洗練された理論的な取り扱いによって妥当な一致が得られた [286]。しかし、理論は温度 T と平衡状態の凝縮原子数の両方の増加に対して確率 γ の増加を予想していたが、一方、観測された傾向は反対の方向であった。仮の説明は熱原子雲の局所的な欠損による凝縮体の誘導成長率の飽和によるものである。この欠損は密度の欠損ではなく、むしろ対の間の相関関数における欠損かもしれない。これは二つの非凝縮体原子が互いに近づいた時、凝縮体の存在が互いの衝突を誘導し、少し離れた原子対の欠損を引き起こす。このような過程は光のレーザーにおける利得の飽和と似ているといえる。現実の実験のステップも沿った取り扱いをお行ったモンテ・カルロ法シミュレーションによって、さらに詳しく凝縮体の形成のダイナミクスが調べられる [163]。

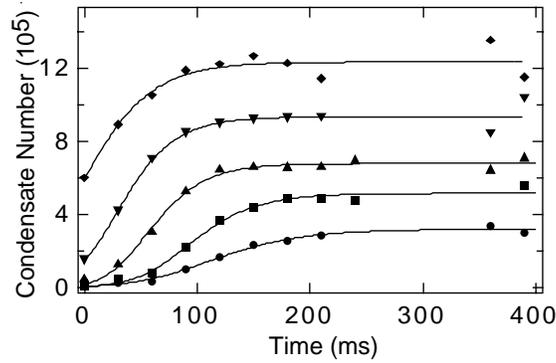


図 26: 平衡に達するまでの凝縮体の割合の成長。非平衡状態を作る速いラジオ波掃引後の時間に対する凝縮原子の数を示している。その結果は 10 個の同様の凝縮体原子数の平衡値を持つトレースの平均から得たものである。実線はボーズ粒子誘導を含むモデルの予想値である。図は文献 [29] から引用

7.4 二つの凝縮体の干渉

ボーズ凝縮体の興味ある特性はマクロな波動関数の存在である。すなわち原子雲全体の共通の位相の存在である。このコヒーレンスは量子液体に間系するもので、なぜなら位相の勾配は超流動の速度に比例するからである。これはまた BEC を基にした原子レーザーの特性を決定する。超伝導および液体ヘリウムにおいては、コヒーレンスおよびマクロな波動関数の存在はジョゼフソン効果を通して印象的に実演された [287, 288, 289]。希薄原子気体において、二つのボーズ凝縮体を干渉させることによって、より直接的にコヒーレンスを実演することができた。

BEC の理論において、対称性の破れは自然に凝縮体をコヒーレント状態によって記述することを可能にする [20]。ボーズ粒子の場はある定まったマクロな波動関数およびある定まった (ただし任意の) 位相を用いた古典的なものである。この位相の仮定は干渉実験を解釈するのに都合が良い。コヒーレント状態は原子数状態の線形結合から成り、これは凝縮体の原子数は定まった値ではないことを意味する。しかし、原理的には、この原子数は測定可能で、波動関数は適当な原子数状態のそれに帰することが可能である。最近の理論的な研究によってこの明らかな対立は単に外面的なものである。凝縮体の位相の測定において (例えば、二つの凝縮体の干渉を観測することによって)、検出過程それ自身が、凝縮体を原子数を保存したまま原子数 (確定) 状態から一定の位相のコヒーレント状態に発展させる原因となる [290, 291, 292, 252, 293]。このため、干渉実験を記述する目的のため、単純に任意のしかし明確な位相を持ったマクロな波動関数という描像を採用することができるかもしれない。

独立した凝縮体が重なることによる干渉パターンは二つの超流動体が弱く接合している時に起こるジョゼフソン電流の観測と似ている [294]。これは最近、超流動 ^3He において観測された [289]。二つの凝縮体の干渉はまた二つの独立なレーザー光線の干渉とも似ている [295]。この場合には各測定は干渉信号を示すが、位相は各実験においてランダムである。これは単一の光線の干渉とは異なる。この場合には単一の光線は分けられ、その後再び重ね合わられ、(干渉) パターンは唯一空間配置に依存する

このような干渉を観測するための最初のステップは、非共鳴レーザー光によって磁気トラップを二つに分離することによって作り出された二重井戸ポテンシャル中で蒸発冷却を行う事によって二つの独立な凝縮体を作り出すことにあった。トラップをオフにした後、落下する原子雲は弾道的に膨張し、重なり合う (図 27)。干渉パターンはトモグラフィ的な吸収像を用いて観測された [169]。図 28 に示すように、干渉パターンは物質波の大きな長さである約 $15\mu\text{m}$ 間隔の直線からなる。室温の原子の物質波の波長はほんの 0.5 \AA しかなく、原子の大きさ以下である。

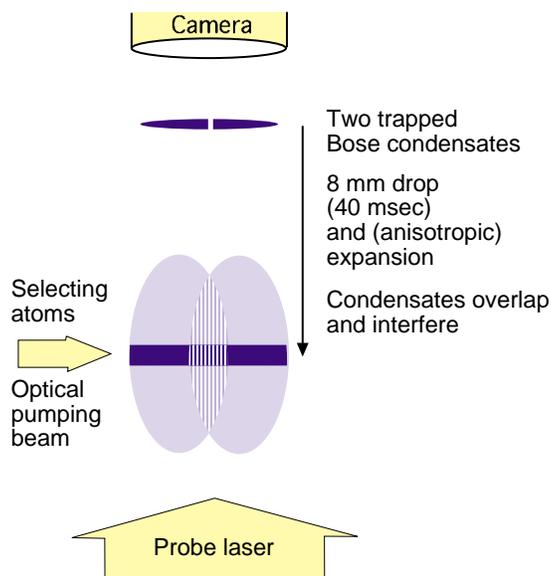


図 27: 二重井戸ポテンシャル中に作られた二つのボーズ凝縮体の干渉を観測するための配置図。二つの凝縮体は原子に反発力を与えるレーザー光線によって分離された。トラップをオフにした後、凝縮体は重力によって加速され、弾道的に膨張し、重なり合う。重なり合った領域においては、高いコントラストの干渉パターンが吸収像を用いて観測された。別のレーザー光線が吸収プローブのための初期状態に原子を光ポンピングして薄い膜状の原子を選択している。このトモグラフィー的な方法によってプローブレザー光の通過するところに沿って干渉パターンを吹き散らすのを防いでいる。

直線のパターンは二つのパルス状の物質波の間の干渉に対して期待される。これは最初に対応する運動量分布を持つ局所的な波束であった。パターンが遅延時間 t 後に観測されたとき、二つの干渉する成分は相対速度 $v = d/t$ を持っており、 d は二つの凝縮体の初期の間隔である。干渉パターンはこの相対速度に関連するド・ブロイ波長から決定される。この議論は観測する位置には独立である。このため、フリンジの間隔は重なった領域を通して一定である。

物質波干渉のコントラストは観測されたフリンジのコントラストから 50 から 100%の間である。より正確な値は得ることはできなかった。なぜなら干渉パターンのより細かい詳細部分を調べて像を撮ることは定量的にはできないからである。干渉の理論的なシミュレーションによって結果は 100%のコヒーレンスを仮定した非線形シュレディンガー方程式の数値解と矛盾しないことが示された [296](関連する研究として文献 [252, 298, 299] を見よ)。双極子力ポテンシャルによって凝縮体が完全には分離していない場合、干渉フリンジは曲線になり、中心部に強く分布の最大の部分が発展した (図 29)。ガーヒングのグループはこれらの全ての特性をグロス・ピタエフスキー方程式を基にした数値計算によるシミュレーションを用いて再現した [296, 297]。これらのボーズ凝縮体のダイナミックスのシミュレーションは凝縮体の位相およびコヒーレンスに敏感な最初のものであった。他の多くの集団励起や弾道的な膨張の様なダイナミックな点は古典的に対応するものがある。

7.5 凝縮体の干渉計

先に示した実験においては、二つの独立なボーズ・アインシュタイン凝縮は、二重井戸ポテンシャル中で蒸発冷却を行って、二つの凝縮体を作り出すことによって生成された。この二つの凝縮体は決してお互い相互作用していないものである (トンネル効果や高いエネルギーの熱的な原子によって引き起こされる相互作用を無

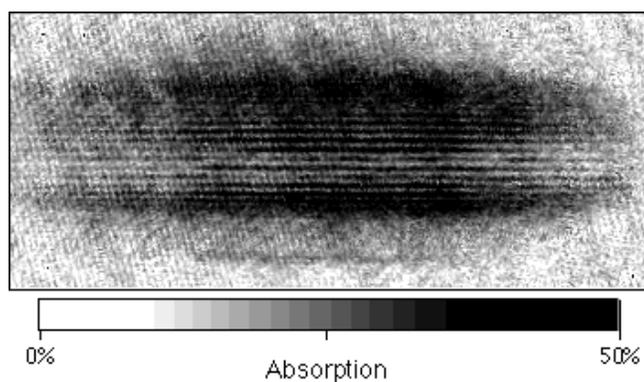


図 28: 40 ms の飛行時間後の二つの膨張する凝縮体の干渉パターン。吸収像の幅は 1.1 mm である。干渉フリンジは $15 \mu\text{m}$ の間隔で、これはボーズ・アインシュタイン凝縮体の長距離のコヒーレンスの強い証拠となる。図は文献 [169] から引用。

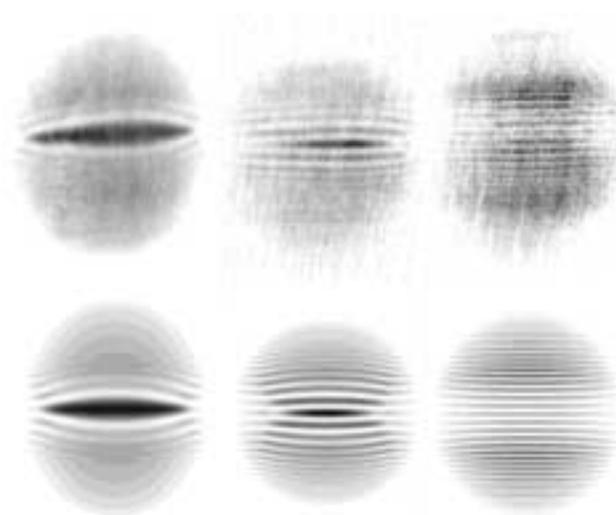


図 29: 三つの異なる二重井戸の障壁の高さに対する干渉パターン。障壁が低いと (左および中央)、二つの凝縮体は完全には分離せず、中心に強く最大部分が生じる。下の列は非線型シュレディンガー方程式を用いたシミュレーションである [296, ?]。各像の視野は高さ約 0.4 mm、幅約 1.2 mm である。

視する)。これに代わって、最初に凝縮体を生成し、その後これを二つに分離する事も可能である。これは二つの凝縮体の間に確定した初期位相関係を与える。この分裂した凝縮体を重ね合わせて干渉させることは、単一のレーザー光線を二重スリットに照射した場合のスリットからの干渉に似ている。これは「分離した原子線」による凝縮体による原子干渉計の実験系が構成されていることになる。ここでは一つの凝縮体は最初に二つに分割され、その後再結合される。この場合、位相の再現性があるフリンジパターンが期待できる。しかし、この実験を行った際には [14]、再現性がある位相は読み出せなかった。これはカメラ、凝縮体およびカットするレーザー光線の配置が機械的に安定でなく、揺らぎが $10\mu\text{m}$ 以内に収まっていなかったためである。

しかし、より安定な実験においてフリンジパターンがそのように発展するかを議論する事は意味がある。短い遅延時間に対しては、二つの凝縮体は予想可能な再現性のある位相で干渉することが期待される。長い遅延時間の後には、凝縮体はそれ自身がどのようにして準備されたか忘れてしまい、二つの独立な凝縮体の干渉パターンが得られるだろう。各干渉パターンは高いコントラストが得られるが、ショットごとの位相はランダムに変化するだろう。その中間においては、良く定まった位相からランダムな位相への連続的な遷移が見られるだろう。すなわち位相はその平均値近傍の揺らぎが (理想的には) ゼロから 2π に増加するだろう (例えば文献 [300] を見よ)。

ボルダールのグループは内部状態を用いてこのような凝縮体の干渉計の実験を行うことができた。彼らは干渉パターンが予想可能な位相からランダムなものへ発展するのを観測した [174]。凝縮体のコヒーレンスな特性を探るさらなる実験が NIST において行われた。彼らはラマン遷移を用いて凝縮体から複数のパルス状の原子を取りだし、その干渉を測定した [301]。エール大のグループは一次元の光格子中に多数の凝縮体を作り [302]、ジョゼフソン周波数での時間的な振動を見ることによってコヒーレンスを観測した。

技術的な雑音が無ければ、位相拡散によるコヒーレンスの喪失 (凝縮体が自身の位相を忘れること) は各凝縮体の原子数 N_1 および N_2 の差における揺らぎ $\Delta N = N_2 - N_1$ によって決定される。定まった位相を持つ凝縮体を生成することは共役な量である ΔN の揺らぎを引き起こす。これが生成された後、二つの凝縮体は位相因子 $\exp(i\mu_i t/\hbar)$ で時間発展する。ここで μ_i , $i=1,2$ は二つの凝縮体の化学ポテンシャルで、これは N_i に依存する。トーマス・フェルミ近似においては、 $d\mu_i/dN_i = (2/5)\mu_i/N_i$ となり、位相拡散確率は次のようになる [303, 292, 304, 305]。

$$\gamma_\phi = \frac{d\mu}{dN} \frac{\Delta N}{\hbar} = \frac{2}{5} \frac{\mu}{\hbar} \frac{\Delta N}{N} \quad (63)$$

もし凝縮体が対称的に二つに分割されたら、 $\Delta N \approx \sqrt{N}$ となる [300]。典型的な位相拡散確率は数 Hz である。

7.6 高次のコヒーレンス

先の干渉実験は一次のコヒーレンスを直接測定するものである。これは試料全体を越える長距離の相関に対して、そして二つの凝縮体間の相対位相の存在 (生成) に対する証拠を与えた。コヒーレンスの全ての特徴を得るには高次のコヒーレンスの知識が必要になる。

最初にもし干渉実験が 100% のコントラストを示している場合、高次のコヒーレンスがどのように現れるかを考えてみる。この場合、凝縮体は 100% 空間的にコヒーレントで、すなわち各凝縮体は「完全な波」である。多数回の実験の繰り返しはパルスごとに位相および凝縮体の原子数の揺らぎを示すだろう。原子数揺らぎには原子 (数) 統計のさらに詳しい情報が含まれている。これはモードフィルターを通したパルス的な熱的な光源とパルス的な単一モードのレーザー光線との比較に似ている。熱統計は最確値がゼロである指数関数的な分布によって特徴づけられる。一方、レーザーの分布ははるかに狭いポアソン分布である [306, 307]。ボーズ凝縮体の生成における原子数揺らぎまたはボーズ凝縮体のパルス的な取りだしにおける原子数揺らぎは小さく (典型的には 10% で、たぶん原子トラップの充填の再現性によって決まる)、このため熱的よりもむしろレーザー的である。

直前に議論したことは、凝縮体のパルス列 (それぞれ 100%空間的にコヒーレントである) の全原子数が熱的またはレーザー的な分布に従う揺らぎを示すかどうかという問題であった。今、それぞれの凝縮体が 100%空間的にコヒーレントであるという仮定を無くし、時間的に局所的な密度を記録した場合、(原子数) 分布が滑らか (レーザー的)、または揺らぎを示すかという問題を提起する。この揺らぎは $r = 0$ における 2 次のコヒーレンス関数 $g^{(2)}(r)$ によって以下の様に表される。

$$\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 + \langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle^2 g^{(2)}(0). \quad (64)$$

密度揺らぎが無い場合は $g^{(2)}(0) = 1$ と表され、一方、熱的な揺らぎがある場合は $g^{(2)}(0) = 2$ によって特徴付けられる。後者は最近、レーザー冷却ネオン原子において観測されている [308]。弾性的および非弾性的な二体衝突は n^2 に比例し、このため、 $g^{(2)}(0)$ を決定するのに用いることができる。これをより簡単に言うと、二体衝突は二つの原子が同時に同位置に存在する確率に比例し、この規格化された確率は 2 次の相関関数によって与えられる [309]。

弾性衝突は原子雲の平均場エネルギー U_{int} を生じる原因となり、これは以下のように表される。

$$U_{int} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \int d^3\mathbf{r} g^{(2)}(0)|_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r})^2 \quad (65)$$

MIT[148, 194] およびボルダール [197] で行われた平均場エネルギーの定量的な測定は全て純粋な凝縮体に対する予想 $g^{(2)}(0) = 1$ と矛盾しないものである。これらの測定の誤差範囲は 20%から 50%であるが [309]、 $g^{(2)}(0) = 2$ とは合わないもので、ボーズ凝縮体における局所的な密度揺らぎが抑圧されている証拠を与えるものである。

熱的な原子に対する $g^{(2)}(0)$ の 2 という値は相互作用の行列要素における交換項に由来するものである。この交換項は系が空間的に重なる異なる量子状態を占有する場合に必ず生じる [48]。 $g^{(2)}(0) = 1$ ということは、系が局所的に単一の波動関数によって記述されることを意味する。しかしこれは重なり合わない多くの量子状態の分布は締め出さない。このため、平均場エネルギーと衝突の測定は短距離のボーズ凝縮の相関を調べるだけで、長距離の相関が無い擬凝縮体と、真の凝縮体を区別することはできない [284]。

三次のコヒーレンス関数 $g^{(3)}(0)$ は n^3 に比例し、原子のトラップロスを測定することにより決定される。これは高密度においては主に三体衝突による再結合によって決まる [257]。ボーズ粒子の計数における統計により、凝縮体に対しては $g^{(n)}(0) = 1$ となり、熱原子雲に対しては $g^{(n)}(0) = n!$ となる。このため、同じ密度では、熱原子雲は三体再結合により凝縮体よりも 6 倍速く減衰することになる [310]。パート等は ^{87}Rb の凝縮体のトラップロスを熱原子雲と比較して、 $g^{(3)}(0)$ の比に対して 7.4 ± 2.6 を得て、予想値と良く一致した [257]。これによってボーズ凝縮体の三次のコヒーレンスを明確に示した。

今までの全ての実験による研究は標準的な仮定、すなわちボーズ凝縮体は一次およびより高次においてもコヒーレントであり、マクロな波動関数によって特徴づけることができるという仮定と矛盾していない。しかしさらなる研究を行う意味があり、これによって凝縮体のコヒーレンスな特性のより厳密な特徴が導かれるに違いない。

7.7 原子レーザーに対する出力結合 (鏡)

レーザーには共振器、利得媒質および出力結合鏡が必要である。原子に対する様々な共振器が実現されている。しかし、最も重要なものは磁気トラップ (2.3 節) と光双極子トラップ (8 節) である。これらの光のファブリ・ペロー共振器との主な違いはトラップまたは物質波共振器は通常、最低次のモードで動作する点にあり、これはメーザーと似ている。

出力結合鏡の役割はコヒーレントに共振器から原子を取り出すことにある。これを行う簡単な方法はトラップをオフにして原子を解放することである。これは光のレーザーにおける共振器ダンパーと似ており、閉じ込められていた全ての原子が単一のパルスとして取り出される。より制御性良く原子を取り出す方法は閉じ込め

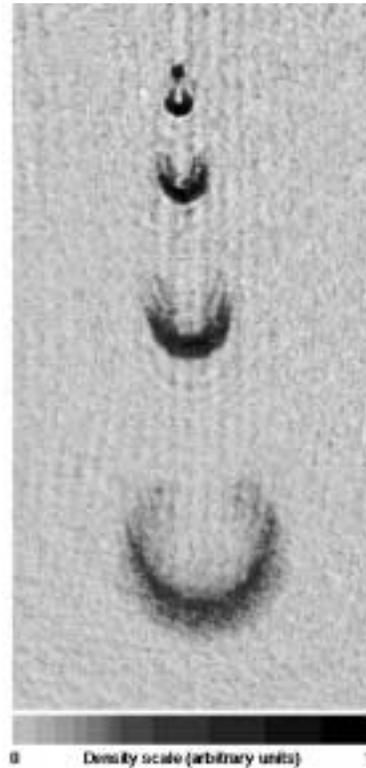


図 30: 200 Hz で動作する MIT の原子レーザー。磁気トラップ中のボーズ凝縮体からコヒーレントなナトリウム原子のパルスが取り出される (視野 2.5×5.0 mm)。5 ms 毎に、短いラジオ波パルスが (凝縮) 原子の一部を非束縛量子状態に移行する。これらの原子は重力によって加速され、反発力相互作用によって広がる。原子パルスは吸収像によって観測された。各パルスは 10^5 から 10^6 の原子を含んでいる。

(量子) 状態と進行 (波) モードとの間の結合が必要になる。このような原子に対するビームスプリッターは短いラジオ波のパルスによって実現された。これはトラップされた原子のスピンを任意の角度に回転するものである。不均一な磁気トラップの磁場は原子をトラップ成分と出力結合成分に分ける [171]。一連のラジオ波パルスによって、コヒーレント原子のパルス列が形成される (図 30)。進行するパルスの三日月型の形状は重力および平均場による結果だと定量的に説明することができる。重力が無ければ、空洞の殻または輪が動径方向に進行することが期待される。中心部はトラップされた凝縮体の反発によって抜けてしまう。しかし、重力によって、原子は上方には取り出さることがなく、その結果、輪ではなく三日月型になる。これはグロス・ピタエフスキー方程式を用いて数値シミュレーションによって再現された [311] (文献 [312] における理論的な議論を見よ)。

可変の出力結合鏡は異なる二つの方法において実現された [171]。共鳴するラジオ波をパルス時間を可変して照射し、トラップ状態と非トラップ状態の間の完全なラビ振動を引き起こした。この代わりに、ラジオ波 (周波数) を共鳴 (周波数) 前後で掃引した。ゆっくりした (周波数) 掃引は原子のスピンを断熱的に回転した。一方、速い掃引は一部の原子しか非トラップ状態へ結合されない。ラジオ波出力結合は部分反射 (銀) 鏡が光に対して働くのと同じ効果を原子におよぼす。コヒーレント状態にある原子を二つのコヒーレント状態に分割する。もし原子数確定状態の原子に適用すると、出力はトラップ状態ともつれ合い状態にある複数の原子数確定状態の重ね合わせ状態となる [153]。

ラジオ波パルスを用いたトラップされた凝縮体の簡単な出力結合機構の実現と [171]、出力結合されたパルスがコヒーレントであるという証明 [169, 14] は BEC が潜在的にコヒーレントな原子線を生成可能であることを示すもので、またこれによって初歩的なパルス原子レーザーが実現されたことになる。これ以降、いくつかの

グループが異なる出力結合の方法を考案した。ミュンヘン大のグループははるかに良く磁場を制御することにより、ラジオ波出力結合を連続的に動作させることができた [313]。NIST のグループはラマン散乱を用いて、光子の反跳運動量の 2 つ分を一部の原子に与えて、これらの原子を凝縮体から飛び出させ、この結果、方向性のある出力結合を実現した [314]。エール大のグループは光格子の間をトンネル効果で抜けることによる自己パルス化した原子線を観測した。これはモードロックレーザーと幾分似たものである [302]。

8 光学的に捕捉されたボーズ・アインシュタイン凝縮体

先の節においては、静かで深いトラップポテンシャルを提供し、強制蒸発冷却を可能にする磁気トラップがボーズ・アインシュタイン凝縮生成にいかに関与しているかを議論した。この磁気トラップはまた良くその性質が分かったトラップポテンシャルを供給するため、ボーズ・アインシュタイン凝縮の特性を調べる最近の多くの実験を可能にした。

しかし、磁気トラップには限界がある。弱い場に向かう超微細構造状態の原子しか閉じ込めることができない。これは加熱や双極子緩和によって強い場に向かう状態へ緩和することによるロスを許すことになる。弱い場に向かう状態にのみ適用できないことは、原子の特性を調べるのに限界を与え、例えば衝突による共鳴は非常に敏感に超微細構造状態に依存する。また多成分凝縮体を調べる事に対して限界を与える。磁気トラップは $m_F = 0$ 状態の原子を捕捉することができない。これは原子時計や他の精密実験には望ましく、これによってトラップされた凝縮体の度量衡への利用を制限している。最後に、長距離の不均一磁場は磁場でトラップされた凝縮体から出される原子レーザーパルスの利用に影響する ($m_F = 0$ 状態の原子のパルスでも 2 次のゼーマンシフトの影響を受ける)[171]。

これらの制限からボーズ・アインシュタイン凝縮体に対する全光学的なトラップの開発が行われた。以下に、このトラップの基本的な特性をまとめ (8.1 節)、その後でボーズ・アインシュタイン凝縮の実験の様々な新しい可能性を示す。

- 光トラップはボーズ・アインシュタイン凝縮体の空間的 (マイクロメートル) および時間的 (マイクロ秒) に正確な操作を可能にする。これは凝縮体に対する箱型トラップ、原子ガイド、光格子の実現を可能にする。光トラップによってもたらされる空間分解能を利用して、新しいえくぼ型トラップを作り、この中で BEC を断熱的にまた可逆的に生成した (8.2 節)。
- 光トラップは新しい外部自由度をもたらす。任意の外部磁場の下で動作させることができる。我々はこの性質を用いて、ナトリウム原子の強い場へ向かう状態のフェッシュバハ共鳴を測定した。これは磁場では閉じ込めることが不可能なものである (8.3 節)。
- 光トラップは新しい内部自由度をもたらす。原子の磁気モーメントの向きは自由度である。これはスピントラップ凝縮体の生成を可能にした。これはナトリウムの $F = 1$ 状態の 3 つの全ての微細構造状態 (磁気副準位?) に分布する凝縮体で、三成分のベクトル秩序パラメータを持っている (8.4 節)。

8.1 ボーズ・アインシュタイン凝縮体の光学的閉じ込め

光学的な (レーザー) 冷却および捕捉技術の長年の目標の一つは純光学的な手段でボーズ・アインシュタイン凝縮体の生成、保存、そして探査であった。これに対する追求は反跳限界以下の冷却技術 [117, 115]、各種の光双極子トラップ [74, 94, 315, 128, 316]、そしてこのトラップ中のラマン冷却 [119, 317, 120]、蒸発冷却 [71] などの開発に対する動機の一つであった。しかし、現在では、光学的な冷却法は BEC に必要な位相空間密度に達することができず、最も近くまで達した方法で 300 だけ足りなかった [119, 120]。主要な困難さの一つに位相空間密度が 1 に達するためには低い温度と高い密度の両方が必要であることがある。基準として反跳限界温度

を用いれば、立方波長あたり一つの原子以上の密度においてのみ気体原子はボーズ凝縮するだろう。これは高い光学密度が近共鳴のレーザー冷却法を混乱させるような領域と一致する。これに対して、蒸発冷却、これは光双極子トラップにおいても原子と光の間の相互作用よりもむしろ原子間相互作用に依存するものであるであるが [71]、これは高密度においてより高い効率となる。

我々は純光学的な方法によって BEC を制御する異なるアプローチを取った。最初に磁気トラップ中で蒸発冷却によって BEC を作り、その後にこれを光トラップに移した [170]。二つの判断規準に基づいて光トラップのパラメータを決めた。トラップはボーズ凝縮体を閉じ込めるのに十分な深さを持っている必要がある。そして凝縮体を長い時間調べることを可能にする十分低い加熱率を持っていることをである。

光トラップの閉じ込めポテンシャルは AC シュタルクシフトによるもので、

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar\omega_R^2(\mathbf{r})}{4} \left(\frac{1}{\omega_0 - \omega_L} + \frac{1}{\omega_0 + \omega_L} \right) \simeq \frac{\hbar\omega_R^2(\mathbf{r})}{4\Delta} \quad (66)$$

と与えられる。ここで ω_0 は共鳴周波数、 ω_L はレーザー周波数、そして $\Delta = \omega_L - \omega_0$ は離調である。ラビ周波数 $\omega_R(\mathbf{r})$ は位置に依存し、便宜的に $2\omega_R^2(\mathbf{r})/\Gamma^2 = I(\mathbf{r})/I_{\text{SAT}}$ によって定義される。ここで強度は飽和強度 $I_{\text{SAT}} = \hbar\omega_0^3\Gamma/12\pi c^2$ によってスケールが与えられており、これはナトリウム原子の場合には 6 mW/cm^2 である (振動子強度を 1 と仮定している)。

保存力ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ 以外に、レーザー光はまたレイリー散乱およびレーザー光線のパワーまたは位置のジッターによる加熱をもたらす。レイリー散乱の確率は

$$\gamma_R = \frac{\alpha^3 \omega_L^3 \Gamma^2}{3 4\omega_A \omega_0} \left(\frac{1}{\omega_0 - \omega_L} + \frac{1}{\omega_0 + \omega_L} \right)^2 \frac{I}{I_{\text{SAT}}} \quad (67)$$

と与えられ、ここで ω_A はリュドベルグ周波数の 2 倍で、 α は微細構造定数である。

対向して回転する項を無視することにより ($|\Delta| \ll \omega_0$)、ポテンシャルの深さは I/Δ のように大きさが変わり、一方、散乱確率は I/Δ^2 のように変る。近共鳴の光は大きなトラップの深さを与えるが、これはまた深刻な加熱の原因ともなりうる。このため、表 6 に示してあるように、光双極子トラップは大きな離調を用いる傾向にある。これはレーザー冷却原子を十分閉じ込めるために高いレーザー出力を用いることを余儀なくされる。

表 6: 光双極子トラップ: 光サンプラー。

	離調 Δ/Γ	パワー (Watts)	深さ (mK)	原子数	密度 (cm^{-3})
Chu ('86) [74]	10^4	0.2	5	500	8×10^{11}
Heinzen ('93) [315]	2×10^5	0.8	6	10^4	2×10^{12}
Chu 達 ('95) [71]	2×10^7	8	0.9	5×10^5	4×10^{12}
光学的に捕捉された BEC[170]	7×10^7	$\simeq 0.005$	$\simeq 0.005$	10^7	$10^{14} - 10^{15}$

これに対して、我々のアプローチにおいては、光トラップに先行して蒸発冷却を用いてトラップ原子の温度を 100 分の 1 に下げる。このため、大きな離調においても数 mW のレーザーパワーしか必要無く、これに対して直接レーザー冷却原子をトラップするには数 W のパワーが用いられる。このため、トラップの取り扱いが簡単になり、また長寿命のトラップ原子が得られる。さらに、磁気トラップ中で冷却している間は原子雲は収縮するため、光双極子トラップの小さいトラップ体積への移行効率は増加する。このため、磁気トラップと蒸発冷却は「じょうご」で光トラップへ入れる理想的な方法である。これは多くの応用、例えば光誘起会合分光や共振器 QED などの応用に対して有用であるだろう。

光トラップは一本の近赤外レーザー光線を磁気トラップの中心に軸方向に沿って集光することによって作られる。同様の単一光線による方法は過去に用いられた [74, 94, 315, 128]。焦点における光強度分布は式 (66) よ

りトラップポテンシャルを与えるが、これは

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi w_0^2(1 + (z/z_R)^2)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w_0^2(1 + (z/z_R)^2)}\right) \quad (68)$$

のように与えられる。ここで P はレーザーパワー、 w_0 は最大から $1/e^2$ の強度のビームウエスト半径、 z_R はレイリー範囲、そして ρ と z はそれぞれ径方向および軸方向の焦点からの距離である。長さのスケール w_0 および z_R は $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ のように関係しており、 λ はトラップレーザーの波長である。トラップポテンシャルの底は周波数 ν_ρ および ν_z の調和振動子のポテンシャルに近似することができる。我々が選んだ波長 $\lambda = 985\text{nm}$ においては、トラップの深さ U 、径方向の周波数 ν_ρ 、そしてアスペクト比 ν_ρ/ν_z は

$$U/k_B \simeq 1 \mu\text{K} \times \frac{P}{\text{mW}} \times \left(\frac{6 \mu\text{m}}{w_0}\right)^2 \quad (69)$$

$$\nu_\rho \simeq 1 \text{kHz} \times \left(\frac{U}{k_B \mu\text{K}}\right)^{1/2} \times \frac{6 \mu\text{m}}{w_0} \quad (70)$$

$$\frac{\nu_\rho}{\nu_z} \simeq 28 \times \frac{6 \mu\text{m}}{w_0} \quad (71)$$

である。上式中の尺度 $w_0 = 6 \mu\text{m}$ は $f/\# = 10$ の結像レンズによって得られるビーム半径である。最後に、大きく離調したトラップ光線による小さな自然放出確率 ($5 \times 10^{-3}\text{s}^{-1}$) は我々の実験において制約にはなっていない。このため、さらに (遠) 赤外 [128] または正に離調したトラップ [citekuga97,lee96](#) を用いることによってさらにこれを下げることはあまり意味が無い。

凝縮体は、安定な磁気トラップに保持されながら赤外レーザーの光パワーを増大し、その後急に磁気トラップをオフにすることによって、光トラップに移行される。ほとんど全ての原子の移行が観測され、最大 10^7 個の原子数の凝縮体を光トラップに移行することができた。様々な実験に対して、レーザー光のビーム半径は 6 から $20 \mu\text{m}$ の範囲で、赤外レーザーの光パワーは 5 から 50mW の範囲において光トラップを作った。

光トラップ中の凝縮体は通常、純粋で、すなわち凝縮体の割合は非常に高い。これは光トラップの体積は非常に小さく、非凝縮体の原子数を非常に低く抑える。原子雲の温度 T をトラップの深さの約 $1/10$ に仮定することにより、この原子数を見積ることができる (光トラップはトラップの深さを制限することによるそれ自身に組み込みの蒸発冷却機構がある)。非凝縮体原子数はおおよそ $(k_B T/\hbar\omega)^3$ で、これは典型的な実験条件に対して、数 10^4 個で、これは我々の観測と定量的に一致する。約 5×10^6 個の凝縮原子に対して、この見積りは凝縮体の割合は 99% を超えることを示している。磁気トラップ中の「純粋な」凝縮体は通常、大きな割合の非凝縮体があり、これはトラップ周波数がこれより小さいこと、またラジオ波誘導の蒸発冷却を用いて小さなトラップの深さを調整することが技術的に難しいことによるものである。なぜならトラップの深さは残留磁場に非常に敏感だからである。将来においては、光トラップによる凝縮体の高純度化が温度ゼロ度において予想される各種の現象を調べることを可能にするかもしれない。これには集団励起の崩壊と再起や [241]、量子枯渇による励起周波数の微小なシフトなどがあり、これは有限温度の効果によって隠れてしまうかもしれない [249]。また一般的には高いコントラストの原子レーザーに対する研究も可能にする。

我々の光学的に捕捉された凝縮体は長寿命である。観測されたロスは三体再結合によるロスが主なものである。原子あたりのロス確率は、ピーク密度 $n_0 = 3 \times 10^{15}\text{cm}^{-3}$ における 4s^{-1} から、 $n_0 = 3 \times 10^{14}\text{cm}^{-3}$ における $1/10 \text{s}^{-1}$ 以下までの範囲で変化する。

これらの寿命の測定より、光トラップ中のレーザー光線のジッターや自然放出による加熱に対する上限を見積ることができる。測定された原子数のロスの解析から密度に依存しないロス確率 $0.03(2) \text{s}^{-1}$ が示された。トラップの深さを $5 \mu\text{K}$ と仮定すると、これは 150nK/s の加熱レートを意味する。これは自然放出の影響だけから期待される加熱レート 25nK/s よりも大きい。この加熱レートの別の見積りは磁気トラップ中の試料気体に赤外レーザー光を照射して、この混合トラップポテンシャル中の気体の温度を測定することによって得ら

れた(図 31)[21]。原子は光ポテンシャル中に約 10%しか滞在しないことを考慮すると、加熱レートは今回は約 100 nK/s となる。

小さく集光されたレーザー光線によってもたらされる光双極子力は簡単に典型的な磁気トラップの磁力の大きさを超える。このため、光トラップされた凝縮体は簡単に非常に高い密度に圧縮され、我々のいくつかの実験においてこれは $3 \times 10^{15} \text{cm}^{-3}$ にもなる。このような高密度においては、三体再結合衝突の確率は非常に高いが、このような密度が高い試料の過渡的な実験は可能である。低密度の極限では、密度 $3 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$ において数 100 万個の原子の凝縮体が平均周波数 $\bar{\omega} = 2\pi \times 7 \text{Hz}$ の広げた磁気トラップにおいて生成された。この凝縮体の可能な密度範囲が広いことは驚きに値いし、特に数年前までは「BEC の窓」が一体存在するのだろうかという議論が数多くあった(2.6 節)。

以下の段落で議論する新しい科学的な可能性の他に、光トラップは凝縮体を操作および移行するための重要な道具になるだろう。これは凝縮体を光またはマイクロ波共振器または表面近くに移動するための光ピンセットとして使えるかもしれない。

8.2 ボーズ・アインシュタイン凝縮体の可逆的な形成

通常のクライオスタット(低温装置)においては、実験家は試料の温度を可逆的に上げたり下げたりすることができる。これに対して、蒸発冷却は蒸発原子のロスがあるため非可逆的である。試料を加熱して温度を再度上げても、原子数は冷却の段階で既に減少している。これはトラップされた原子は試料であると同時に冷蔵庫の「作業液体」でもあることを反映している。

トラップポテンシャルの強さを断熱的に変えると、温度を可逆的に上げたり下げたりすることができる。しかし密度も同時に変化し、位相空間密度はそのままである。このため、理想気体においては、トラップポテンシャルの強さを断熱的な変化することによって BEC の転移のラインを越えることはできない(相互作用する気体の場合については文献 [318] において議論されている)。

しかし、トラップ原子の試料のほんの一部を容器に入れることを想像してもらいたい。この容器は残りの原子と熱接触が保たれており、この容器を用いて小さな試料を圧縮する。これはトラップ気体の一部の密度を上昇させるが、大きな熱浴原子との熱接触により、温度上昇はわずかなものになるだろう。さらに、このような圧縮がゆっくり行われたならば(擬定常的に)、気体の全エントロピーは変化せず、最大位相空間密度を(小さな容器を圧縮および拡張することによって)可逆的に変化することができるだろう。

この断熱的な(エントロピーの変化が無い)位相空間密度の増加は衝突が存在する場合にのみ起こりうる。衝突による熱平衡化が無ければ、断熱過程はおのおのの量子状態の原子数を保存し(すなわちエーレンフェストの断熱性の法則)、このため位相空間密度は変化しない。こうしてもトラップポテンシャルの変化が衝突(そして運動)によるトラップ気体の平衡化の時間に比べてゆっくり行われれば位相空間密度の増加が最大になる。基底状態の分布数の断熱的な変化は最初にピクス等によって最初に実演された [154]。彼らの論文で取り扱っているパワーローポテンシャルに対しては、位相空間密度の最大増加は 20 に制限されている。しかし、先に議論した「大きな箱の中の小さな箱」は任意の大きさだけ位相空間密度を増加することが可能である。我々は磁気トラップと光(双極子)力を組み合わせて用いてこれを実演した [21]。磁気トラップ中の原子は熱浴として働き、一方、原子雲の一部が集光された負に離調したレーザー光線を加えることによって、より高い密度に圧縮された。このレーザー光は磁気トラップの中心に狭いポテンシャルの井戸(「えくぼ」)を作る。

原子雲を相転移温度以上の様々な温度に冷却し、小さなボーズ凝縮体が生成されるのに必要な赤外レーザーのパワーを決定することによって、位相空間密度の増加が調べられた [21]。位相空間密度の 50 倍の増加が得られた。レーザーパワーの制限および変形したトラップ内の各種の過熱およびロスの過程によって決まる増加時間の限界によってより大きな増加は見られなかった。

さらなるポテンシャルの変形によって試料は BEC 相転移を越えることになる。観測された凝縮体の割合は

理想気体に対して予想された値よりもはるかに小さいものであった。これは相互作用のポーズ・アインシュタイン凝縮気体の熱力学におよぼす効果に対する最初の明確な証拠となるものである (5.2.2 節)。実際、「えくぼ」型トラップはこのような効果を調べるのに理想的である。相互作用の熱力学的な量に対する重要性は無次元パラメーター η に依存する [208, 198]。これは温度ゼロ度における平均場エネルギー μ_0 の転移温度 T_c に対する比で与えられる。平均トラップ周波数 $\bar{\omega}$ に対する調和振動子トラップポテンシャルに対しては、 $\mu_0 \propto \bar{\omega}^{6/5}$ および $T_c \propto \bar{\omega}$ となり、これは $\eta \propto \bar{\omega}^{1/5}$ を導く。この弱い依存性によって、調和振動子トラップは熱力学的な相互作用の効果を測定するには向いていないことになる。これに対して、「えくぼ」トラップは二つのトラップ周波数によって特徴付けられ、これらは独立に制御することが可能である。一つはブロードな磁気トラップのポテンシャルのそれで、これは T_c を決定し、もう一つは光トラップポテンシャルの底に対するもので、これは凝縮体を閉じ込め、その平均場エネルギーを決定する。このため、パラメーター η は非常に大きくすることが可能である。

最後に、凝縮体生成は断熱的であるため、これは可逆的である。これは磁場でトラップされた T_c よりほんの少し上の温度の原子雲を用意し、その後で正弦波的に赤外レーザー光のパワーを変調することによって実演された。各振動において、トラップされた試料は BEC の相転移の前後を行き来する (図 31)。この振動のピークは光トラップのわずかな加熱の効果によりゆっくり減衰する。

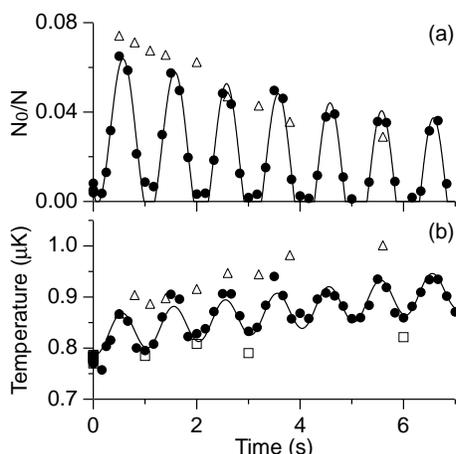


図 31: 相転移点を過ぎる断熱的なサイクル。時間に対する凝縮体の割合 (a) と温度 (b) を赤外光を変調した場合 (黒丸)、および赤外光のパワーを一定の値まで徐々に上げた場合 (白い三角)、および赤外光が無い場合 (白い四角) に対してそれぞれ示してある。2.5.3 節で議論したラジオ波遮蔽を持っている。実線は目で追うための補助である。図は文献 [21] から引用。

この凝縮体を作る方法は凝縮体の形成を調べる新しい機会を与えるものである。先に示した実験においては、凝縮体の部分はレーザーパワーの変調に対して 70ms 遅れて現れることが分かった。これは (凝縮体の) 形成時間の測定に相当する。これは異なった方法を用いた凝縮体の形成の実験的 [29] および理論的 [285] な研究と一致する。しかし、「えくぼ」トラップを用いることは、光および磁気トラップのパラメーターを広い範囲で選べる融通性があり、これは凝縮体の形成時間の温度および密度依存性を明らかにすることを助けることになる。

光トラップはマイクロ秒台でオンにすることができるため、トラップ気体における (BEC が) 形成する時間スケールは他の時間スケールと簡単に分離することができる。実際、ある実験においては、赤外光を即座にオンにし、磁気トラップ中の光トラップの閉じ込めの弱い方の軸に沿った振動周期よりもはるかに速い時間スケールで凝縮体を観測した [21, 13]。このような衝撃 - 凝縮体の研究は擬凝縮体および励起状態の凝縮体の形成に新しい洞察を与えるだろう [281, 319]。

また、トラップポテンシャルの変形は実現可能な転移温度の範囲を非常に大きく広げる。光ポテンシャルに

よる熱原子雲の圧縮は非常に高い臨界密度 $n_c \approx 5 \times 10^{14} \text{cm}^{-3}$ および臨界温度 $T_c \approx 5 \mu\text{K}$ となる。低い密度では、ラジオ波蒸発が有効に働かないことによって（重力による原子雲の垂下によってこれは生じる [15]）、また非常に小さなトラップの深さをラジオ波および磁場でこれを制御することの技術的な難しさによって、純粋な磁気トラップ中で BEC 転移を越えるのは見られない。しかし我々のポテンシャルを変形する方法を用いれば、広げた磁気トラップに赤外レーザーを照射して、 $n_c \approx 2 \times 10^{12} \text{cm}^{-3}$ および $T_c \approx 100 \text{nK}$ において相転移を越えることができる。

最後に、位相空間密度を増加させるこの可逆的な方法は蒸発冷却の非可逆的な方法と似ている点があることを指摘しておく。トラップポテンシャルの断熱的な変形による可逆的な冷却は状態密度を変更することによって達成される。ポテンシャルのくぼみがブロードな調和振動子ポテンシャルに加えられた場合、これは基底状態のエネルギーを下げるが、ほんの少しの系の励起状態に影響を与える。井戸の深さが増加すると、基底状態のエネルギーは化学ポテンシャルに達し、BEC が起こる。この過程を記述する別の方法は、調和振動子の周波数をくぼみの底における値にまで増加することによって最初に原子雲全体を圧縮し、その後ポテンシャルを小さな中心領域の外に広げて最初の広い調和振動子ポテンシャルにする。最後の段階で、高いエネルギーの状態密度は増加し、その結果、弾性衝突は選択的にこれらの状態に分布を作る。これは蒸発冷却に非常に似ている。蒸発冷却では高いエネルギー状態は連続状態に結合しており、原子を衝突によってこれらの状態に移行させる。主な違いは蒸発冷却においては蒸発原子とトラップ原子の間で平衡が達成されない。これに対して変形したポテンシャルの場合には、全原子雲は引き続き熱平衡状態のままである。

8.3 ボーズ・アインシュタイン凝縮体のフェッシュバツハ共鳴の観測

ボーズ凝縮系の全ての基本的な性質、凝縮体の形成と形、その集団励起の性質と統計的揺らぎ、ソリトンと渦のダイナミクス、などは原子の相互作用の強さによって決まる。低温においては、これらの相互作用はほとんど原子間の弾性衝突の s 波散乱長によって制御される (J. ダリバードと D. ハインチェンの章を見よ)。しかし凝縮系の振るまいを支配する多くの化学的な特性とは違って、散乱長は不変なものではなく、ゼロエネルギー衝突の共鳴近傍では劇的に変化しうる。これは形状の共鳴 [320]、または現在の実験に関係しているフェッシュバツハ共鳴である [321]。

フェッシュバツハ共鳴は、二つの衝突する原子のエネルギーが擬束縛分子状態のエネルギーと等しくなったときに起こる。このような共鳴は双極子緩和 [322, 323] や三体再結合などの弾性および非弾性衝突の両方に強い影響を与える。フェッシュバツハ共鳴は過去に衝突エネルギーを変化させて擬束縛状態の固定のエネルギーに一致するようにすることによって調べられた [324]。(ボーズ凝縮体の) 極低温原子に対しては、ほとんどゼロの衝突エネルギーは固定であるため、擬束縛状態のエネルギーをゼロに下げなくてはならない。外部磁場 [322, 323, 325, 326, 327]、光 [328, 329]、ラジオ波 [330]、そして電場 [320] を用いてこれを行う提案がなされた。

最近、極低温原子に対するフェッシュバツハ共鳴が外部磁場の下で見つかった。我々のグループはナトリウムにおいていくつかのフェッシュバツハ共鳴を発見した。そしてこれが凝縮体の相互作用エネルギーに与える劇的な効果を直接確かめた [331]。ほんのわずかな磁場の変化がいかにマクロな系の劇的な変化をもたらすかを実際に確かめた。 ^{85}Rb における測定は非凝縮体を用いて光誘起会合分光によって行われた。これは衝突する原子の間の相対位置の波動関数 [332, 333] を弾性衝突の断面積の測定によって調べるものである [334]。

理論計算はナトリウムに対して、磁気トラップで捕捉できない方の超微細状態において高磁場でフェッシュバツハ共鳴があることを予想していた [325, 335]。このため、ナトリウムの凝縮体のフェッシュバツハ共鳴を調べるには光トラップは必要不可欠であった。

フェッシュバツハ共鳴を起すには、最初に光でトラップされた凝縮体を欲しい超微細状態にする。その後で磁場強度を 1200G まで上げていき、その間繰り返し位相コントラスト像で原子を調べる。ある特定の磁場強度において、急激に原子が失われるのが観測された。この急激なロスがフェッシュバツハ共鳴において予想される

もので、これは散乱長が負になることによって凝縮体が崩壊するか、または非弾性衝突確率が増加することによる。さらに、ロス特定の超微細構造状態の原子においてのみ観測される。これは衝突による共鳴であることを示している。この方法によって 853G、907G、そして 1195G 近傍に 3つの共鳴を引き起こした [331, 262]。

フェッシュバツハ共鳴を決定的に同定するため、我々は真の「煙をいた銃」現象、すなわちボーズ凝縮体の相互作用エネルギーの劇的な変化を調べた。散乱長は飛行時間法による像から凝縮体の原子数と膨張した凝縮体の幅を測定することによって決定された。これは??節で詳細を述べた凝縮体のトーマス・フェルミ描像を利用している。これらの測定は図 32 に 907 G における共鳴に対して磁場の関数として示されている。磁場 B_0 でのフェッシュバツハ共鳴近傍では、散乱長 a は磁場 B の関数として分散的に変化することが予想されていた [325]。

$$a = \tilde{a} \left(1 + \frac{\Delta B}{B_0 - B} \right) \quad (72)$$

ここで \tilde{a} は共鳴から離れたところでの散乱長で、 ΔB は共鳴幅で、これは擬束縛状態と入ってくる原子の自由粒子状態の間の結合の強さから決定される。我々の測定はこの分散形を検証し、共鳴衝突による散乱長の 10 倍の変化を示した。

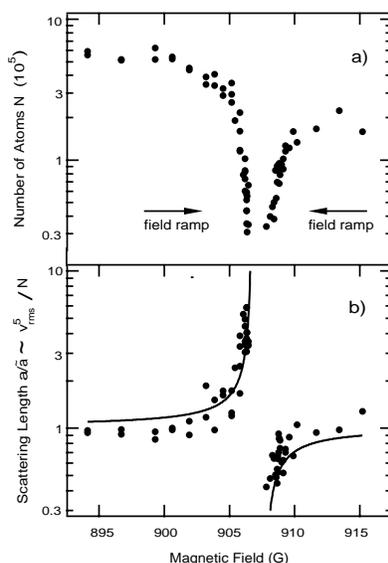


図 32: 磁場 907 G における ^{23}Na 原子のフェッシュバツハ共鳴の観測。(a) 共鳴を越えて (磁場の) 低いほうから、および高い方から共鳴点まで (磁場を) 掃引した時の急激な原子数のロス。(b) 膨張する凝縮体の飛行時間法による像を基にした散乱長の測定から分散的な変化が確認される。実線は式 (72) を基にフィットしたものである。図は文献 [331] から引用。

我々の観測によって、新奇な特性を持つ原子量子気体をデザインするという観点での散乱長の同調性に関する理論的な予想が確かめられた。例えば、 $a \approx 0$ にすることによって、基本的に相互作用が無い原子の凝縮体を作る事ができる。 $a < 0$ にすることにより、いったん安定な凝縮体を作って、これを突然不安定にすることができ、制御された方法でマクロな波動関数の崩壊を観測することができる [336, 337, 338]。これは ^7Li の凝縮体の崩壊 [3] と似ているが、この場合には制御がむずかしい。急激な a の変化は新しい形態の集団励起を引き起こすかもしれない [337]。共鳴を越えて掃引することにより凝縮原子を断熱的に分子凝縮体に移すこともできるかもしれない [339]。さらに、フェッシュバツハ共鳴は異種の原子または異なる超微細構造状態の間の衝突に対しても存在することが予想されている。このような共鳴は異なる原子種間の相互作用を調整するのに用い

ることが可能である。これによって多成分ボーズ凝縮体の重なり合わせ、または相分離ができる (8.5 節)。最後に、フェッシュバツハ共鳴は原子光学においても重要で、原子レーザーにおける原子間相互作用を変えたり、またより一般的には非線型原子光学係数を制御することができる。

しかし、我々の実験からフェッシュバツハ共鳴の利用には深刻な制約があることが示唆される。それは非弾性衝突確率とこれに付随するトラップロスの増加によるものである。フェッシュバツハ共鳴が観測された速いロスは、もっぱらこれらの確率が増加した結果によるものである。なぜなら弾性衝突によって凝縮体の崩壊を生じうる負の散乱長の領域には決して接近しないからである。我々はこれらのロスを三体衝突の結果によるものであると考えている。なぜなら、双極子緩和は二体の減衰機構であるが、これはこれらの共鳴の二つが起こる最低エネルギーの超微細構造状態においては禁止されているからである。三体衝突による減衰の確率定数は共鳴の両サイドで 3 桁以上、増加することが見出された [262]。この振る舞いは理論的には説明されていない。三体再結合確率の増加の観測は任意のフェッシュバツハ共鳴に対して一般的なものなのか、またはナトリウムに対してのみ成り立つ特別なものなのかは調べてみる必要がある。フェッシュバツハ共鳴におけるナトリウムの凝縮体のダイナミクスを十分長い時間調べるには、大きな体積の光トラップを用いたより低密度の凝縮体が必要になる。この点に関しては、磁場でトラップ可能な原子で起こる ^{85}Rb 原子のフェッシュバツハ共鳴の方がこのような研究には適しているかもしれない。

8.4 スピン場ボーズ・アインシュタイン凝縮

磁気トラップにおいては、原子のスピンは断熱的に磁場の方向に従う (2.3 節)。このため、アルカリ原子は内部スピンを持っているが、そのボーズ・アインシュタイン凝縮体はスピンが無い超流動 ^4He と同様に、スカラーの秩序パラメーターによって表される。これに対して、光トラップは全てのスピン状態の原子を閉じ込める。これによって原子のスピンは新しい自由度として解放される。このため、光でトラップされたボーズ・アインシュタイン凝縮はスカラーではなく、ベクトルの秩序パラメーターによって表される。このため、スピン場ボーズ凝縮体と呼ばれる。このような凝縮体に対しては、様々な新しい現象が予想されており、これにはスピン構造、スピン波、そして原子スピン間の結合および超流動がある [340, 341, 342]。

名前について。用語「スピン場 (スピノール)」は $2n + 1$ 成分の波動関数を意味する。これは $F = n$ のスピンを持つ粒子のスピン状態を表す。ある文献では、用語「スピン場」をスピン $1/2$ の粒子のスピンの波動関数を指すのに用いている。そしてより高い次元の対象に対しては $2n$ スピン場と直接掛け合わせる。この用語法においては、 $F = 1$ の粒子は三つの独立した成分を持つ 2 階のスピン場テンソルの部分集合として記述できる [343, 344]。他の文献では半整数のスピンを表すスピン場と整数のスピンを表すベクトル場とを区別している。これらは 2π の回転に対して異なった振るまいをする [345]。

最近、2 成分凝縮体が磁場でトラップされた ^{87}Rb 原子の二つの異なる超微細構造状態によって作られ、一連のすばらしい実験に用いられた [346]。この 2 成分凝縮体に比べて、スピン場凝縮体はいくつかの新しい特徴を持つ。これには秩序パラメーターの多成分のベクトル的な特性や、スピン緩和衝突の役割が変化してトラップからのロス無しに衝突によって超微細構造状態間の分布数の交換を可能にする。これに対して、 ^{87}Rb 原子の実験においては、スピン緩和によるトラップロスが寿命を制限する。さらに、以下で議論するが、スピン場凝縮体の特性は弱い磁場によって便利に操作することが可能で、(^{87}Rb の実験と同様に) 2 成分混合体を研究することが可能となり、(^{87}Rb の実験とは違って) これらは混合しているか、もしくは混合していないかのどちらの場合もとりうる。

この新しい量子液体を紹介するのに、まずどのようにしてこれを作り、どのようにしてこれを調べたかを示す。スピン場凝縮体を作るのに、先ず光トラップされた $|F = 1, m_F = -1\rangle$ 超微細状態の凝縮体から始めた。その後で、ラジオ波共鳴技術を用いて (原子レーザーの出力結合に用いたの似たランダウ・ツェナー掃引 [171])、凝縮体を $F = 1$ の磁気副準位間に分布させた。任意の超微細構造状態の間の分布を得るため、ラジオ波遷移

を大きな (15 – 30 G) バイアス磁場において行う必要があった。これによって 2 次のゼーマンシフトによって $|m_F = +1\rangle \rightarrow |m_F = 0\rangle$ 遷移と $|m_F = 0\rangle \rightarrow |m_F = -1\rangle$ 遷移が分離することができた。

スピン場凝縮体はステルン・ゲルラッハのスピンの分離法と共に飛行時間法による像によって調べられた (図 33)。光トラップを急峻にオフにして、非等方性が大きな光トラップから原子を主に径方向に膨張させた。その後、約 5ms 間相互作用エネルギーが完全に運動エネルギーに変換された後、磁場勾配を加え、これによってスピン状態を変化させることなくこれらを分離した。最後に、15 – 30 ms 後に、引き続いて行われる $|F = 2, m_F = 2\rangle$ から $|F' = 3, m_F = 3\rangle$ へのサイクリング遷移のプロープによる吸収において全ての原子に対して同じ (吸収断面積を与えるため、原子は $|F = 2\rangle$ 超微細状態に光ポンピングされる。このプロープ方法によって光トラップの軸に沿った空間分布および超微細状態の分布の両方が決定された。

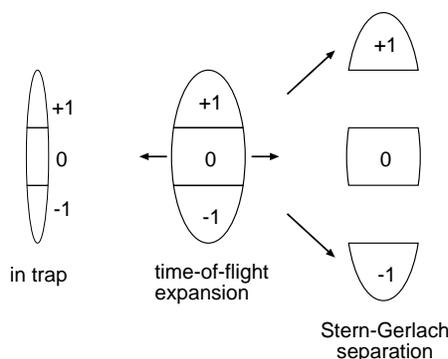


図 33: スピン場凝縮体を調べる。細長い光トラップから解放された後、トラップされたスピン場凝縮体は主に径方向に膨張し、軸方向の超微細構造状態の分布は保たれる。磁場勾配は異なる成分を分離するのに用いられ、その一方で各成分の形は保たれる。引き続き吸収によるプロープによってトラップ内の空間的および超微細構造状態の分布が明らかになる。

我々は最近、光トラップ中のスピン場凝縮体の平衡状態を調べた [347]。全スピン (角運動量) の磁場方向の射影成分が $\langle F_z \rangle = 0$ のスピン場凝縮体は、トラップされた全凝縮体を $|m_F = 0\rangle$ 状態にする、もしくは凝縮体を $|m_F = +1\rangle$ と $|m_F = -1\rangle$ 状態の 50 対 50 の割合の混合状態にする、の二つの方法の一方を用いて用意された。凝縮体はその後、自由に平衡状態となり、その超微細構造状態の分布はスピン緩和によって変化する。これは二つの $m_F = 0$ 状態の原子が衝突して $m_F = +1$ 状態および $m_F = -1$ 状態の原子を一個ずつ作る、またはその反対の過程である。両方のスタート状態から、凝縮体は同じ基底状態の分布に向けて平衡状態に達した。この状態においては全ての三つの超微細構造状態のドメインが形成された。

基底状態の性質を理解するため、純粋な $m_F = 0$ の凝縮体に磁場の効果と平均場相互作用の効果をゆっくり加えたときの時間発展を考えてみる (図 34)。

- a) 均一な (磁) 場からの 1 次のゼーマンシフト。わずかな磁場 (ナノケルビン台の相互作用エネルギーより大きな μG 台の磁場) が存在すると最低エネルギー状態は純粋な $m_F = +1$ 凝縮体となる。しかし、スピンを保存しない衝突 (双極子緩和) は凝縮体の寿命の間は無視できる。このため、全スピンは保存量とみなすことができ、 $m_F = 0$ 凝縮体は変化しない。
- b) 磁場勾配からの 1 次のゼーマンシフト。磁場勾配 B' は、二つの $m_F = 0$ 状態の原子のスピン緩和による衝突をエネルギー的に起きやすくし、これによって $m_F = +1$ 状態の原子を原子雲の磁場が高い方の端に作り、 $m_F = -1$ 状態の原子を低い方の端に作る。原子あたりのエネルギー利得は $\hat{p}B'z$ で、ここで z は原子雲の中心からの距離で、 $\hat{p} = 35\mu\text{K}/\text{G}$ である。このため、凝縮体は二つの純粋なスピンドメインに磁気的に分極される。

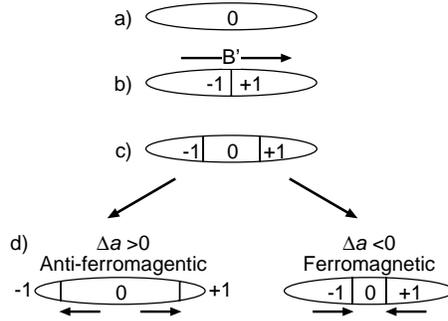


図 34: トラップ中に基底状態の $\langle F_z \rangle = 0$ スピン場を作る。各段階において (a – d)、ハミルトニアンに対するこれ以外の寄与を考慮する (本文を見よ)。

- c) 均一な磁場からの 2 次のゼーマンシフト。磁場 B_0 下の 2 次のゼーマンシフトは $m_F = 0$ 状態の原子のエネルギーを $m_F = +1$ 状態と $m_F = -1$ 状態の原子の平均エネルギーよりも $\hat{q}B_0^2$ だけ低くする。ナトリウムの場合、 $\hat{q} = 20 \text{ nK/G}^2$ となる。これは原子雲の中心の境界 $\hat{q}B_0^2 = \hat{p}B'|z|$ において $m_F = 0$ のドメインが形成される原因を作る。
- d) スピンに依存した平均場エネルギー。磁場ゼロにおける回転対称性は全ての $F = 1$ の副準位間の衝突の扱いを非常に簡単にする。様々な散乱長は二つの散乱長 $a_{F_{tot}=2}$ と $a_{F_{tot}=0}$ だけに依存し、ここで F_{tot} は衝突する原子の全スピンの大きさである。この結果、スピンの依存した平均場相互作用エネルギーが簡単に $c = n \cdot 4\pi\hbar^2 \Delta a / m$ によって $c\langle \mathbf{F} \rangle^2$ と与えられる。ここで $\Delta a = (a_{F_{tot}=2} - a_{F_{tot}=0})/3$ および n は凝縮体の密度である [340]。もし $\Delta a > 0$ であると、相互作用は $|\langle \mathbf{F} \rangle| = 0$ のドメインを好み、 $m_F = 0$ のドメインがより大きくなる。これは反強磁性結合と呼ばれる。このような結合下の全体の基底状態は分極化した状態となる。もし $\Delta a < 0$ であると、 $|\langle \mathbf{F} \rangle| = 1$ ドメインがより大きくなり、このため $m_F = 0$ ドメインは縮む。これは強磁性結合と呼ばれる。

これらの効果は一般的なスピンドメイン図に集約される。これは強磁性および反強磁性のスピン場凝縮体の任意の磁場、磁場勾配、および平均スピン $\langle F_z \rangle$ におけるバルクの特長 (トーマス・フェルミ近似) を表す [347]。このスピン図によって図 35 に示される観測された基底状態のスピン構造が説明された。基底状態の性質を様々な磁場および磁場勾配において調べることににより、ナトリウムのスピン場凝縮体は反磁性であると同定された。散乱長の違い Δa は $m_F = 0$ ドメインの大きさを測定することにより決定され、これは予想された値と非常に良く一致することが分かった [348]。

典型的な我々の実験における密度 ($\approx 3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) では、基底状態の性質を決める反磁性の平均場エネルギーはちょうど 2.5 nK であることが分かった。これは驚くに値する。2.5 nK の相互作用エネルギーは温度約 100 nK の光トラップ中の気体のスピンドメインや相分離の原因となる！ 熱エネルギー $k_B T$ は希薄熱原子雲に対してのみ有効で、一方、凝縮体は nK 以下の精度の基底状態となる。このため、BEC はナノケルビンの効果をこのような低温を作ることなしにこれを研究することを可能にする。

8.5 スピン場凝縮体成分の混合および相分離

これらの実験結果およびより最近の研究により [349]、 $m_F = -1$ と $m_F = +1$ 成分が混合し、 $m_F = \pm 1$ と $m_F = 0$ 成分は混合しない明確な証拠が示された。混合した超流動の簡単な解説と議論でこの章を締めくくる。

多成分超流動系の研究は低温物理の数 10 年間にわたるじれったい目標であった。最も初期の議論は $^4\text{He} - ^6\text{He}$ 混合体に焦点が当てられた。 ^6He は半減期 1 秒の放射性である。グットマンとアーノルドによる 1953 年の

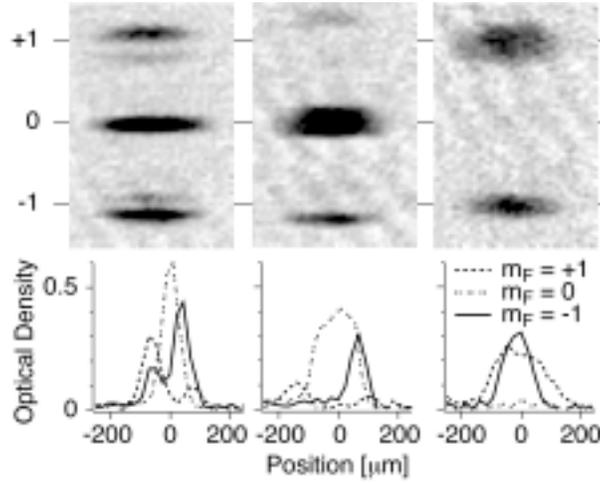


図 35: $F = 1$ スピン場ボーズ・アインシュタイン凝縮体における基底状態スピンドメイン。シュテルン・ゲルラッハ分離の後の飛行時間法による像を示す。シュテルン・ゲルラッハ分離を行わなかった場合の光トラップ中の軸方向の密度の輪郭を共に示してある。左と中央の像は三つ成分の全てのスピンドメインを示している。右の像は混ざっている $m_F = \pm 1$ 成分凝縮体を示している。条件は: $B = 20$ mG、 $B' = 11$ mG/cm (左); $B = 100$ mG、 $B' = 11$ mG/cm (中央); $B = 20$ mG、 $B' \simeq 0$ 、 $\langle F_z \rangle > 0$ (右)

野心的な実験 [350] は ^4He が混合した ^6He の超流動の流れの証拠を探究するものであったが無駄に終わった。それにもかかわらず、この追求は一連の二成分超流動の流体力学の理論的な研究を誘発した [351, およびこれ以降の他の文献]。1978 年、コルソンとフェッター [352] は現在の実験に直接適用されている平均場理論の範疇でこのような混合体を取り扱い、超流動体の間の相互作用に対する混じりあうまたは相分離を引き起こすためのクライテリオンを議論した。スピン偏極された水素原子気体の安定化における進展の後、シギアとリュッケンシュタイン [353] は異なる超微細構造状態を用いて超流動の混合を得ることを考えた。気体のボーズ凝縮の観測の後、多成分凝縮体に疾風のような理論的な観点からの注目を伴って再び興味が持たれた [354, 355, 356, 357, 例えば]。最初の多成分凝縮体は JILA において [25]、 ^{87}Rb の異なる超微細構造状態を磁場でトラップすることによって作られた。最終的には、二成分凝縮体の混ぜ合わさった混合体がナトリウムのスピン場凝縮体によって作られ [347]、長い間の目標が達成された。

二成分凝縮体の混合体のバルクの混じり合いまたは混じり合わない性質は平均場理論から予想される [352, 354, 355, 358, 356]。このような凝縮体の全平均場相互作用エネルギーは $2\pi\hbar^2/m \times (n_a^2 a_a + n_b^2 a_b + 2n_a n_b a_{ab})$ によって与えられ、ここで m は共通の原子の質量で、 n_a と n_b は各成分の密度、 a_a および a_b は同種同士の衝突の散乱長、 a_{ab} は異種間の衝突に対する散乱長である。二成分凝縮体が体積 V の箱の中に各成分に N 個の原子がある場合を考える。もし凝縮体が重なり合うと、その平均場エネルギーは

$$E_O = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{N^2}{V} (a_a + a_b + 2a_{ab}) \quad (73)$$

となり、もし相分離すると、そのエネルギーは

$$E_S = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{N^2}{V_a} a_a + \frac{N^2}{V_b} a_b \right) \quad (74)$$

となる。分離した凝縮体のそれぞれが占める体積 V_a および V_b は、圧力が等しいと言う条件から決定される。

$$a_a \left(\frac{N}{V_a} \right)^2 = a_b \left(\frac{N}{V_b} \right)^2 \quad (75)$$

E_O と E_S を比べると、もし $a_{ab} > \sqrt{a_a a_b}$ の場合には凝縮体は相分離し、またもし $a_{ab} < \sqrt{a_a a_b}$ ならばこれは混合する。

先に示した $F = 1$ のスピン場系においては、散乱長は $a_{F_{tot}=0}$ と $a_{F_{tot}=2}$ によって決まる [340]。 $\bar{a} = (2a_{F_{tot}=2} + a_{F_{tot}=0})/3$ および $\Delta a = (a_{F_{tot}=2} - a_{F_{tot}=0})/3$ を定義することにより、 $m_F = 1, 0$ の二成分系 (または等価的に $m_F = -1, 0$ の系) に対する散乱長は $a_0 = \bar{a}$ と $a_1 = a_{01} = \bar{a} + \Delta a$ によって与えられる。 Δa が正と測定されているため [347]、条件 $a_{01} > \sqrt{a_0 a_1}$ が適用され、我々が観測したように [347, 349]、これらの成分は相分離する。興味深いことに、この相分離は非凝縮原子雲においては起こらない。これは同種の平均場相互作用エネルギーが交換項により 2 倍となるからである。

$m_F = +1, -1$ の二成分系においては、散乱長は $a_1 = a_{-1} = \bar{a} + \Delta a$ および、 $a_{1,-1} = \bar{a} - \Delta a$ となる。このため、 $a_{1,-1} < \sqrt{a_1 a_{-1}}$ となり、これらの二成分は混合するはずである。実際、図 35c に示されているように、 $\langle F_z \rangle \neq 0$ で、磁場勾配が小さく、磁場がゼロ近くの場合の平衡状態のスピン場凝縮体は $m_F = \pm 1$ 状態の原子の重なり合った混合体からなる。特にこの混合した二成分系は重要な点を持っている。もしトラップポテンシャルを二成分凝縮体に渡って変化すると、もし $a_a \neq a_b$ ならば、条件 $a_{ab} < \sqrt{a_a a_b}$ が満たされなくても最低エネルギー状態は相分離した状態になる [359]。この場合、より小さな散乱長を持つ原子がトラップの中心近くに集中し、混合を観測するのがより難しくなる。しかし、 $m_F = \pm 1$ の系においては、二つの散乱長 a_1 および a_{-1} は磁場ゼロの近傍では回転対称性に対してこれらは等しくなり、トラップポテンシャル中においても完全に混合する。

9 結び

気体のボーズ・アインシュタイン凝縮の基本的な現象は 70 年以上も前に予言されていた。実験によってこれを実現するためには、一番目に、BEC 転移に至るまで気体のままでいて、分子やクラスターを形成して BEC を占有しないような原子系を同定することであった。二番目には、この領域まで達するための冷却および捕捉の技術の発展が必要であった。これが達成された後、いくつかの BEC の研究が数 10 年前に作られた理論を検証することを可能にした。しかし実験的には検証されなかった。しかし、研究は既に古い理論の検証をはるかに越えて進歩し、これはパレンナの夏の学校の間中、印象的に示されてきた。原子トラップにおける BEC はいくつかの新しい定量的な特性を持っており、これらは主に 1950 年代に発展した弱く相互作用する希薄ボーズ気体の理論的取り扱いには含まれていないものである。

- 不均一トラップポテンシャル。これは部分的に凝縮体と熱原子雲の間の空間的な分離を引き起こす。これは深遠な方法で動的な特性を変化させ、実験家が直接的に凝縮体を「見る」ことを可能にする。
- メソスコピック物理。試料が有限の大きさであることは新しい長さの尺度をもたらす。いくつかのグループが有限の大きさによる熱力学的な極限に対する補正を計算している。異なる統計集団が熱力学の極限に一致することが議論されているが、しかし小さなボーズ凝縮体に対しては一致しない。負の散乱長を持つ凝縮体は有限の大きさおよびこれに伴う零点エネルギーにより唯一安定になる。
- 凝縮体の位相。これは自発的な対称性の破れに関係しており、量子力学的な測定過程はマイクロな描像の中で取り扱われる。ボーズ凝縮は、小さい系における散逸、コヒーレンスおよび量子揺らぎに対するモデルとなる系となるかもしれない。
- 調整可能な凝縮体。フェッシュバツハ共鳴は原子間の相互作用を変えるのに用いることができ、新奇な特性を持つ量子物質をデザインすることができる。
- スピン場および多成分凝縮体。浸透している超流動体の流体力学、複雑な相図および豊富なダイナミクスを研究する見込みのある新しい研究の場がある。

- ナノケルビン温度と原子レーザー。記録的に低い温度に達する新しい技術とコヒーレントな原子線を生成する技術は BEC の研究を超えて一般的に応用することができる。

これらの見地は希薄原子気体の BEC が引き続き豊かで新しい物理を提供するという楽観的な見方を引き起こす。これは ^4He と ^3He の量子液体の伝統に続いて原子物理と凝縮系物理の新しい学際的な分野を確立するかもしれない。これによって多体系物理が原子物理の方法および精度で研究することが可能になる！ さらに、原子の制御と操作は原子物理の中心的な分野になり、コヒーレント原子線は原子光学、原子干渉計、精密測定およびその先の研究における主要な役割を果たしそうである。最近数年間は多くの驚きがあった。この夏の学校全体およびこの厚い本はほんの数年の発展を基にしたもので、さらに多くの興奮が来ることを示しているものである！

A 画像処理

3 節で議論した画像技術は不完全な環境において用いられる。それは背景光、散乱したプローブ光、そして不完全な光学系が欲しい信号を不明瞭にする。目標は像全体の積分したカラム密度 $\tilde{n}(x, y)$ を決定することである。この補遺では、用いた画像処理法を議論する。この方法は先に議論した様に、吸収像と位相コントラスト像では異なる。

A.1 吸収像の画像処理

吸収像は光が作用する場 $F_I(x, y)$ を測定するもので、これは三つの成分によって与えられる。

$$F_I(x, y) = F_{I0} \left[P(x, y)e^{-\tilde{D}(x, y)} + S(x, y) \right] + N(x, y) \quad (76)$$

原子雲を通りすぎる光を表す最初の成分は、結像系によって集光され、カメラ上に結像される。プローブ光の作用は F_{I0} によって与えられ、 $P(x, y)$ は物体面における規格化された光のビーム形状をあらわす。このビーム形状は一般的にはガウス関数とはかけ離れたもので、これは光学素子のキズや物体面の前までの光軸中の多重反射によるものである。量 $\tilde{D}(x, y)$ は原子雲の光学密度で、これからカラム密度 $\tilde{n}(x, y)$ が導出される。二番目の成分、 $F_{I0}S(x, y)$ は物体面の後方へのプローブ光の散乱を表す。最後の成分 $N(x, y)$ はプローブ光以外の全ての光源からの背景光を表す。一般的に、有用なデータは吸収像だけからは取り出す事ができない(例えば図 36a を見よ)。このため、各吸収像に対して、さらに二つの像を撮る：一つはプローブ光を吸収する原子が無く結像させた明るい場の像 $F_B(x, y)$ と、原子およびプローブ光も無い場合の暗い像 $F_D(x, y)$ である。これらの像において測定された強度は以下のように与えられる。

$$F_B(x, y) = F_{B0} [P(x, y) + S(x, y)] + N(x, y) \quad (77)$$

$$F_D(x, y) = N(x, y) \quad (78)$$

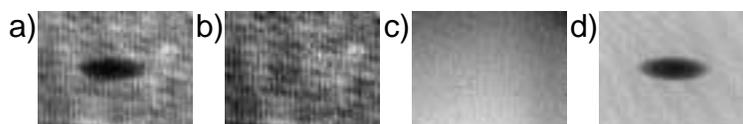


図 36: 信頼性の高い透過像を得る。三つの像が集められる: a) 原子を通りすぎた後のプローブ光の像、b) 明るい場の像、c) 暗い場の像。式 (80) に従って処理され、透過像 (d) を得る。

透過像 $\tilde{T}(x, y) = t^2$ は規格化することによって得られる。

$$\tilde{T}(x, y) = \frac{F_I(x, y) - F_D(x, y)}{F_B(x, y) - F_D(x, y)} \quad (79)$$

$$= \frac{F_{I0} P(x, y) e^{-\tilde{D}(x, y)} + S(x, y)}{F_{B0} P(x, y) + S(x, y)} \quad (80)$$

ショットごとのプローブ光の強度の揺らぎ ($F_{I0} \neq F_{B0}$) は、各像の原子が無い部分を調べることによって行う。これを用いて、雑音の項 $S(x, y)$ が小さいと仮定して、

$$\tilde{T} \simeq e^{-\tilde{D}(x, y)} + \left[1 - e^{-\tilde{D}(x, y)}\right] \frac{S(x, y)}{P(x, y)} \quad (81)$$

が得られる。

$S(x, y)$ が小さく、光学密度が小さい場合には、この規格化によって原子によるプローブ光の吸収が直接求められる。この規格化の一例が図 36 に与えられている。プローブ光の大きな不均一性に関わらず、高品質な吸収像が得られることをここに記しておく。この規格化の方法には限界がある。例えば、 $\tilde{D}(x, y) = -\ln[\tilde{T}(x, y)]$ で、このため、光学密度の誤差は $d\tilde{D} = -d\tilde{T}/\tilde{T}$ によって与えられる。このため、高い光学密度 (2 以上) の測定は技術的な雑音に非常に敏感である。

二番目の制限は結像系の振動がある時には高い空間周波数の雑音を打ち消すのは難しいことである。波数ベクトル \mathbf{k} (すなわち $P(x, y) = P_0[1 + \epsilon \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ で、ここで \mathbf{r} はベクトル (x, y) の $P(x, y)$ の成分を考え、結像系が吸収像と明るい場の像の間で小さい距離 d だけずれていると仮定する。この時、 $N(x, y)$ と $S(x, y)$ を無視して、規格化をすると、

$$\tilde{T}(x, y) = \frac{[1 + \epsilon \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] e^{-\tilde{D}(x, y)}}{1 + \epsilon \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d}))} \quad (82)$$

$$\simeq e^{-\tilde{D}(x, y)} [1 + \epsilon[\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}] \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (83)$$

が得られる。雑音の振幅 ϵ を下げ、結像系の振動を最小限に抑えることによりこの雑音を最小にすることができる。たいていの場合、主な技術的な雑音が典型的な変位に対して直交している、または像を解釈するのに直接関係しない方向の空間周波数であることが保証される。

A.2 位相コントラスト像の画像処理

位相コントラスト像における空間フィルタリングには一つの複雑な問題が加わる：プローブ光線の空間周波数の高い成分がフーリエ面の位相シフト点を見失う可能性がある (図 7)。このため、吸収像と位相コントラスト像に対しては異なる規格化法が必要となる。位相コントラスト像においては、像の誤差を与える二つの要因がある：(1) プローブ光の不均一性と、(2) プローブ光のカメラ上のランダムな散乱とがある。議論を簡単にするため、同時にこの内の一つの誤差がある場合を考える。

最初の場合、原子に入射する光線が不均一性 $\epsilon(x, y)$: $E_1(x, y) = E_0[1 + \epsilon(x, y)]$ を持っているとする。試料原子を通過後、位相シフト $\phi(x, y)$ を得て、電場は $E_2(x, y) = E_0[1 + (e^{-i\phi} - 1) + \epsilon(x, y)e^{-i\phi}]$ となる。この光の均一な部分は結像系のフーリエ面においては小さく焦点され、カメラ上の光の場は $E_3(x, y) = E_0[-i + (e^{-i\phi} - 1) + \epsilon e^{-i\phi}]$ となる。像に集められた光は

$$F_I(x, y) = F_{I0} \left[3 - 2\sqrt{2} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) + |\epsilon|^2 + 2\text{Re} [\epsilon e^{-i\phi} (e^{i\phi} - 1 + i)] \right] + N(x, y) \quad (84)$$

となる。この信号から誤差を取り除こうとすると、先に述べたさらに二つの像を撮る。明るい場の像 $F_B(x, y)$ と暗い場の像 $F_D(x, y)$ でこれは以下の様に与えられる。

$$F_B(x, y) = F_{B0} [1 + |\epsilon|^2 + 2\text{Re}[i\epsilon]] + N(x, y) \quad (85)$$

$$F_D(x, y) = N(x, y) \quad (86)$$

位相コントラスト信号を再生するため二つの方法を用いた。最初の方法は吸収像を解析するのに用いたのと同じものである。これによって位相コントラスト信号は

$$PC^{(1)}(x, y) = 1 + 2 \left[\frac{1 - \sqrt{2} \cos(\phi + \frac{\pi}{4}) + \text{Re}[\epsilon(1 - e^{-i\phi})(1 - i)]}{1 + |\epsilon|^2 - 2 \text{Im}[\epsilon]} \right] \quad (87)$$

となる。この方法ではプローブ光の雑音 ϵ は位相コントラスト信号に混入している。

二番目の規格化の方法は暗い場の像を差し引くものである。そして像の原子雲が見えない箇所（通常、像の隅）の平均光強度で $F_I(x, y)$ と $F_B(x, y)$ を独立に除算を行って規格化するものである。その後、 $F_I(x, y)$ から規格化された $F_B(x, y)$ を引いて、

$$PC^{(2)}(x, y) = 2 \left[1 - \sqrt{2} \cos(\phi + \frac{\pi}{4}) + \text{Re}[\epsilon(1 - e^{-i\phi})(1 - i)] \right] \quad (88)$$

を得る。こうして分母の信号の中への雑音の混入が取り除かれる。

ここで雑音 $\epsilon(x, y)$ が物体面以降の表面からの散乱に因るスペックルパターンである場合を考えてみる。このため、雑音 ϵ は原子によって影響を受けない。すなわちカメラ上での電場は $E_3(x, y) = E_0[-i + \epsilon + (e^{-i\phi} - 1)]$ となる。カメラ上で集められた像のデータは

$$F_I(x, y) = F_{I0} \left[3 - 2\sqrt{2} \cos(\phi + \frac{\pi}{4}) + |\epsilon|^2 + 2 \text{Re}[\epsilon(e^{i\phi} - 1 + i)] \right] + N(x, y) \quad (89)$$

によって表される。この場合、二つの規格化の方法は

$$PC^{(1)}(x, y) = 1 + 2 \left[\frac{1 - \sqrt{2} \cos(\phi + \frac{\pi}{4}) + \text{Re}[\epsilon(e^{i\phi} - 1)]}{1 + |\epsilon|^2 - 2 \text{Im}[\epsilon]} \right] \quad (90)$$

$$PC^{(2)}(x, y) = 2[1 - \sqrt{2} \cos(\phi + \frac{\pi}{4}) + \text{Re}[\epsilon(e^{i\phi} - 1)]] \quad (91)$$

となる。この場合、 ϵ の位相が空間的に変化していると、二番目の規格化の方法の方が誤差がランダムであるため、明らかに優れている。

最後に、どの規格化方法を用いたかという疑問に答えるために我々が取ったデータに戻る。図 37 は部分的に凝縮した原子雲の像のデータを比較したものである。これは両方の規格化法を用いて規格化されたものである。二番目の規格化法は凝縮体の密度の輪郭を期待される放物線により良くフィットすることができ、この方法の方がより適切である。

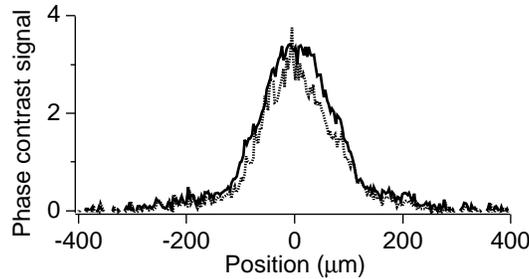


図 37: Comparison of two normalization methods for phase-contrast images. Dotted line shows result of normalization $PC^{(1)}$, and the solid line shows $PC^{(2)}$, which gives a more reliable signal.

MIT における BEC の研究はすばらしいチームの努力によるものであった。興奮とハードな仕事を分かち合った今までおよび現在の協同研究者に感謝したい。: M.R. Andrews, A.P. Chikkatur, K.B. Davis, J. Gore, S. Inouye, M.A. Joffe, M. Köhl, C. Kulewicz, A. Martin, M.-O. Mewes, H.-J. Miesner, R. Onofrio, D.E. Pritchard, C. Raman, J. Stenger, C.G. Townsend, N.J. van Druten, and J. Vogels. 特に Dan Kleppner と Tom Greytak にはインスピレーションといつも変らぬ励ましに対して感謝したい。またこの実り多き興奮を与

える研究分野に貢献した同じ研究者仲間に対しても実りのある彼らとの交流に対して感謝したい。そして最後に特にこのパレンナサマースクールの主催者と参加者に対して集団励起と多くの(ボーズ粒子の)刺激をもたらしてくれたことに対して感謝したい。この研究に対する奨励と資金援助に対してナバルリサーチ、NSF、the Joint Services Electronics Program (ARO)、NASA、そして David and Lucile Packard 基金に感謝する。

参考文献

- [1] M.H. Anderson et al. *Science*, **269** (1995) 198.
- [2] K.B. Davis et al. *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 3969.
- [3] C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 985.
- [4] D.G. Fried et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 3811.
- [5] BEC home page of the Georgia Southern University, <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html> .
- [6] K. Huang in *Studies in Statistical Mechanics*, edited by J. DE BOER AND G.E. UHLENBECK (North-Holland, Amsterdam) 1964, Vol. II, p. 3.
- [7] A. Griffin, D.W. Snoke, and S. Stringari *Bose-Einstein Condensation* (Cambridge University Press, Cambridge) 1995.
- [8] W. Ketterle et al. *Phys. Scr.*, **T66** (1996) 31.
- [9] N.J. van Druten et al. *Czech. J. Phys.*, **46** (1996) 3077.
- [10] C.G. Townsend et al. in *Ultracold Atoms and Bose-Einstein-Condensation, 1996, OSA Trends in Optics and Photonics Series, Vol. 7*, edited by K. BURNETT (Optical Society of America, Washington D.C.) 1996, p. 2.
- [11] C.G. Townsend et al. in *Atomic Physics 15, Fifteenth International Conference on Atomic Physics, Amsterdam, August 1996* (World Scientific, Singapore) 1997, p. 192.
- [12] M.R. Andrews et al. *J. Low Temp. Phys.*, **110** (1998) 153.
- [13] J. Stenger et al. *J. Low Temp. Phys.*, **113** (1998) 167.
- [14] H.-J. Miesner and W. Ketterle *Solid State Comm.*, **107** (1998) 629.
- [15] W. Ketterle and N.J. van Druten in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, edited by B. BEDERSON AND H. WALTHER (Academic Press, San Diego) 1996, Vol. 37, p. 181.
- [16] W. Ketterle and M.-O. Mewes LEOS Newsletter, IEEE, August 1996, pp. 18-21 (1996).
- [17] C.G. Townsend, W. Ketterle, and S. Stringari *Physics World*, **March** (1997) 29.
- [18] D.S. Durfee and W. Ketterle *Optics Express*, **2** (1998) 299.
- [19] W. Ketterle in *McGraw-Hill 1999 Yearbook of Science and Technology, companion volume to Encyclopedia of Science and Technology* (McGraw-Hill, New York) 1999.
- [20] K. Huang *Statistical Mechanics* (Wiley, New York) 1987.

- [21] D.M. Stamper-Kurn et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 2194.
- [22] P. Ehrenfest and J.R. Oppenheimer *Phys. Rev.*, **37** (1931) 333.
- [23] J.H. Freed *Journal of Chemical Physics*, **72** (1980) 1414.
- [24] P. Nozières in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 15.
- [25] C.J. Myatt et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 586.
- [26] Y.B. Zel'dovich and R.A. Sunyaev *Sov. Phys. JETP*, **81** (1972) 153.
- [27] O. Penrose and L. Onsager *Phys. Rev.*, **104** (1956) 576.
- [28] M.R. Andrews et al. *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 553.
- [29] H.-J. Miesner et al. *Science*, **279** (1998) 1005.
- [30] D.M. Stamper-Kurn et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 500.
- [31] A. Pais *Subtle is the Lord, The Science and the Life of Albert Einstein* (Clarendon Press, Oxford) 1982.
- [32] K. Gavroglu *Fritz London: A Scientific Biography* (Cambridge University Press, Cambridge) 1995.
- [33] A. Einstein *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **Bericht 1** (1925) 3.
- [34] B.C. Crooker et al. *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 666.
- [35] J.D. Reppy *Physica B*, **126** (1984) 335.
- [36] M. Rasolt, M.H. Stephen, M.E. Fisher, and P.B. Weichman *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984) 798.
- [37] J.P. Wolfe, J.L. Lin, and D.W. Snoke in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 281.
- [38] E. Fortin, E. Benson, and A. Mysyrowicz in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 519.
- [39] M.Y. Shen, T. Yokouchi, S. Koyama, and T. Goto *Phys. Rev. B*, **56** (1997) 13066.
- [40] J.L. Lin and J.P. Wolfe *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993) 1222.
- [41] C.E. Hecht *Physica*, **25** (1959) 1159.
- [42] W.C. Stwalley and L.H. Nosanow *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976) 910.
- [43] I.F. Silvera and J.T.M. Walraven *Phys. Rev. Lett.*, **44** (1980) 164.
- [44] R.W. Cline, D.A. Smith, T.J. Greytak, and D. Kleppner *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980) 2117.
- [45] T.J. Greytak in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 131.
- [46] T.J. Greytak and D. Kleppner in *New Trends in Atomic Physics, Les Houches Summer School 1982*, edited by G. GRYNBERG AND R. STORA (North-Holland, Amsterdam) 1984, p. 1125.

- [47] I.F. Silvera and J.T.M. Walraven in *Progress in Low Temperature Physics*, edited by D.F. BREWER (Elsevier, Amsterdam) 1986, Vol. X, p. 139.
- [48] J.T.M. Walraven in *Quantum Dynamics of Simple Systems*, edited by G.L. OPPO, S.M. BARNETT, E. RIIS, AND M. WILKINSON (Institute of Physics Publ., London) 1996, p. 315.
- [49] V.V. Goldman, I.F. Silvera, and A.J. Leggett *Phys. Rev. B*, **24** (1981) 2870.
- [50] D.A. Huse and E. Siggia *J. Low Temp. Phys.*, **46** (1982) 137.
- [51] J. Oliva *Phys. Rev. B*, **39** (1989) 4197.
- [52] H.T.C. Stoof, J.M.V.A. Koelman, and B.J. Verhaar *Phys. Rev. B*, **38** (1988) 4688.
- [53] H.F. Hess *Phys. Rev. B*, **34** (1986) 3476.
- [54] N. Masuhara et al. *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 935.
- [55] I.F. Silvera in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 160.
- [56] A.P. Mosk, M.W. Reynolds, T.W. Hijmans, and J.T.M. Walraven *J. Low Temp. Phys.*, **113** (1998) 217.
- [57] A. Matsubara et al. in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 478.
- [58] A.I. Safonov et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 4545.
- [59] E. Arimondo, W.D. Phillips, and F. Strumia *Laser Manipulation of Atoms and Ions* (North-Holland, Amsterdam) 1992.
- [60] H. Metcalf and P. van der Straten *Phys. Rep.*, **244** (1994) 203.
- [61] C.S. Adams and E. Riis *Progress in Quantum Electronics*, **21** (1997) 1.
- [62] S. Chu *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 685.
- [63] C.N. Cohen-Tannoudji *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 707.
- [64] W.D. Phillips *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 721.
- [65] V.S. Letokhov and V.G. Minogin *Optics Comm.*, **35** (1980) 199.
- [66] S. Chu et al. *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) 48.
- [67] D.E. Pritchard in *Electronic and atomic collisions : invited papers of the XIV International Conference on the Physics of Electronic and Atomic Collisions, Palo Alto, California, 24-30 July, 1985*, edited by D.C. LORENTS, W.E. MEYERHOF, AND J.R. PETERSON (Elsevier, New York) 1986, p. 593.
- [68] T. Walker and P. Feng in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, edited by B. BEDERSON AND H. WALTHER (Academic Press, San Diego) 1994, Vol. 34, p. 125.
- [69] J. Weiner in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, edited by B. BEDERSON AND H. WALTHER (Academic Press, San Diego) 1995, Vol. 35, p. 45.

- [70] T. Walker, D. Sesko, and C. Wieman *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 408.
- [71] C.S. Adams et al. *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 3577.
- [72] D. Boiron et al. *Phys. Rev. A*, **57** (1998) R4106.
- [73] M.T. DePue et al. preprint. (1998).
- [74] S. Chu, J.E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986) 314.
- [75] M. Drewsen et al. *Appl. Phys. B*, **59** (1994) 283.
- [76] C.G. Townsend et al. *Phys. Rev. A*, **52** (1995) 1423.
- [77] C.G. Townsend et al. *Phys. Rev. A*, **53** (1996) 1702.
- [78] J. Vigué *Phys. Rev. A*, **34** (1986) 4476.
- [79] E.A. Cornell, C. Monroe, and C.E. Wieman *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 2439.
- [80] W. Ketterle and D.E. Pritchard *Appl. Phys. B*, **54** (1992) 403.
- [81] D.E. Pritchard, K. Helmerson, and A.G. Martin in *Atomic Physics 11*, edited by S. HAROCHE, J.C. GAY, AND G. GRYNBERG (World Scientific, Singapore) 1989, p. 179.
- [82] A.L. Migdall et al. *Phys. Rev. Lett.*, **54** (1985) 2596.
- [83] V.S. Bagnato et al. *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987) 2194.
- [84] K. Helmerson, A. Martin, and D.E. Pritchard *J. Opt. Soc. Am. B*, **9** (1992) 1988.
- [85] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, and C. Wieman *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) 1571.
- [86] C. Monroe, E. Cornell, and C. Wieman in *Laser Manipulation of Atoms and Ions, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXVIII*, edited by E. ARIMONDO, W.D. PHILLIPS, AND F. STRUMIA (North-Holland, Amsterdam) 1992, p. 361.
- [87] W. Ketterle et al. *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 2253.
- [88] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.A. Joffe, and W. Ketterle in *Fourteenth International Conference on Atomic Physics, Boulder, Colorado, 1994, Book of Abstracts, 1-M3* (University of Colorado, Boulder, Colorado) 1994.
- [89] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher, and E.A. Cornell in *Fourteenth International Conference on Atomic Physics, Boulder, Colorado, 1994, Book of Abstracts, 1M-7* (University of Colorado, Boulder, Colorado) 1994.
- [90] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 1687.
- [91] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 1170.
- [92] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher, and E.A. Cornell *J. Opt. Soc. Am. B*, **11** (1994) 1332.
- [93] W.D. Phillips, J.V. Prodan, and H.J. Metcalf *J. Opt. Soc. Am. B*, **2** (1985) 1751.

- [94] W.D. Phillips in *Laser Manipulation of Atoms and Ions, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXVIII*, edited by E. ARIMONDO, W.D. PHILLIPS, AND F. STRUMIA (North-Holland, Amsterdam) 1992, p. 289.
- [95] J.V. Prodan, W.D. Phillips, and H. Metcalf *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982) 1149.
- [96] M.A. Joffe, W. Ketterle, A. Martin, and D.E. Pritchard *J. Opt. Soc. Am. B*, **10** (1993) 2257.
- [97] S. Chu in *Laser Manipulation of Atoms and Ions, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXVIII*, edited by E. ARIMONDO, W.D. PHILLIPS, AND F. STRUMIA (North-Holland, Amsterdam) 1992, p. 239.
- [98] E.L. Raab et al. *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 2631.
- [99] D.E. Pritchard and W. Ketterle in *Laser Manipulation of Atoms and Ions, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXVIII*, edited by E. ARIMONDO, W.D. PHILLIPS, AND F. STRUMIA (North-Holland, Amsterdam) 1992, p. 473.
- [100] M.H. Anderson, W. Petrich, J.R. Ensher, and E.A. Cornell *Phys. Rev. A*, **50** (1994) R3597.
- [101] D.J. Han, R.H. Wynar, P. Courteille, and D.J. Heinzen *Phys. Rev. A*, **57** (1998) R4114.
- [102] L.V. Hau et al. *Phys. Rev. A*, **58** (1998) R54.
- [103] B.P. Anderson and M. Kasevich *Phys. Rev. A*, in press (1998).
- [104] P.D. Lett et al. *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 169.
- [105] P.D. Lett et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6** (1989) 2084.
- [106] D.S. Weiss et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6** (1989) 2072.
- [107] C.J. Cooper et al. *Europhys. Lett.*, **28** (1994) 397.
- [108] A. Cable, M. Prentiss, and N.P. Bigelow *Optics Lett.*, **15** (1990) 507.
- [109] A. Steane, P. Szriftgiser, P. Desbiolles, and J. Dalibard *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 4972.
- [110] C.J. Myatt et al. *Optics Lett.*, **21** (1996) 290.
- [111] K. Gibble, S. Chang, and R. Legere *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 2666.
- [112] Z.T. Lu et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 3331.
- [113] T.B. Swanson et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **13** (1996) 1833.
- [114] K. Dieckmann, R.J.C. Spreeuw, M. Weidemüller, and J.T.M. Walraven *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 3891.
- [115] M. Kasevich and S. Chu *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 1741.
- [116] J. Reichel et al. *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 4575.
- [117] A. Aspect et al. *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 826.
- [118] J. Lawall et al. *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 4194.

- [119] H.J. Lee, C.S. Adams, M. Kasevich, and S. Chu *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 2658.
- [120] H.J. Lee and S. Chu *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 2905.
- [121] H. Hess et al. *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 672.
- [122] R. van Rooijen, J.J. Berkhout, S. Jaakkola, and J.T.M. Walraven *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) 931.
- [123] J.D. Weinstein et al. *Nature*, **395** (1998) 148.
- [124] J. Kim et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 3665.
- [125] R.J.C. Spreeuw et al. *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994) 3162.
- [126] Y.B. Ovchinnikov, I. Manek, and R. Grimm *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 2225.
- [127] Y.B. Ovchinnikov et al. *Europhys. Lett.*, **43** (1998) 510.
- [128] T. Takekoshi and R.J. Knize *Optics Lett.*, **21** (1995) 77.
- [129] S. Friebel et al. *Phys. Rev. A*, **57** (1998) R20.
- [130] T.A. Savard, K.M. O'Hara, and J.E. Thomas *Phys. Rev. A*, **56** (1997) R1095.
- [131] C.C. Agosta, I.F. Silvera, H.T.C. Stoof, and B.J. Verhaar *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 2361.
- [132] R.V.E. Lovelace, C. Mahanian, T.J. Tommila, and D.M. Lee *Nature*, **318** (1985) 30.
- [133] E. Riis and S.M. Barnett *Europhys. Lett.*, **21** (1993) 533.
- [134] F. Shimizu and M. Morinaga *Jpn. J. Appl. Phys.*, **31** (1992) L1721.
- [135] N.R. Newbury and C.E. Wieman *Am. J. Phys.*, **64** (1996) 18.
- [136] T. Bergeman, G. Erez, and H. Metcalf *Phys. Rev. A*, **35** (1987) 1535.
- [137] K.-J. Kügler, K. Moritz, W. Paul, and U. Trinks *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, **228** (1985) 240.
- [138] W.H. Wing *Prog. Quant. Electr.*, **8** (1984) 181.
- [139] E. Majorana *Nuovo Cimento*, **9** (1932) 43.
- [140] J. Schwinger *Phys. Rev.*, **51** (1937) 648.
- [141] T.H. Bergeman et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6** (1989) 2249.
- [142] K.B. Davis et al. *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 5202.
- [143] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher, and E.A. Cornell *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 3352.
- [144] V.E. Shapiro *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R1018.
- [145] D.E. Pritchard *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 1336.
- [146] Y.V. Gott, M.S. Ioffe, and V.G. Tel'kovskii *Nuclear Fusion Supplement*, **3** (1962) 1045.

- [147] U. Ernst et al. *Europhys. Lett.*, **41** (1998) 1.
- [148] M.-O. Mewes et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 416.
- [149] T. Esslinger, I. Bloch, and T.W. Hänsch *Phys. Rev. A*, **58** (1998) R2664.
- [150] J. Söding et al. *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 1869.
- [151] J.J. Tollet, C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet *Phys. Rev. A*, **51** (1995) R22.
- [152] B. Desruelle et al. *European Physical Journal D*, **1** (1998) 255.
- [153] M.-O. Mewes Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [154] P.W.H. Pinkse et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 990.
- [155] C.V. Sukumar and D.M. Brink *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 2451.
- [156] J.M. Doyle et al. *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 603.
- [157] T.W. Hijmans, O.J. Luiten, I.D. Setija, and J.T.M. Walraven *J. Opt. Soc. Am. B*, **6** (1989) 2235.
- [158] W. Ketterle et al. OSA Annual Meeting, Toronto, Canada, October 3-8 (1993).
- [159] H. Wu and C.J. Foot *J. Phys. B*, **29** (1996) L321.
- [160] M. Holland, J. Williams, K. Coakley, and J. Cooper *Quantum and Semiclassical Optics*, **8** (1996) 571.
- [161] H. Wu, E. Arimondo, and C.J. Foot *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 560.
- [162] C.A. Sackett, C.C. Bradley, and R.G. Hulet *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 3797.
- [163] E. Arimondo, E. Cerboneschi, and H. Wu this volume (1998).
- [164] P.W.H. Pinkse et al. *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 4747.
- [165] W.D. Phillips this volume (1998).
- [166] C.J. Myatt Ph.D. thesis, University of Colorado, 1997.
- [167] E. Cornell, J.R. Ensher, and C.E. Wieman this volume (1998).
- [168] M.R. Andrews et al. *Science*, **273** (1996) 84.
- [169] M.R. Andrews et al. *Science*, **275** (1997) 637.
- [170] D.M. Stamper-Kurn et al. *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 2072.
- [171] M.-O. Mewes et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 582.
- [172] D.S. Hall et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 4531.
- [173] M.R. Matthews et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 243.
- [174] D.S. Hall, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1543.
- [175] M. Kozuma et al. preprint (1998).

- [176] D.S. Jin et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 420.
- [177] M.-O. Mewes et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 988.
- [178] D.S. Jin et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 764.
- [179] B.J. Verhaar in *Atomic Physics*, edited by D.J. WINELAND, C.E. WIEMAN, AND S.J. SMITH (AIP, New York) 1995, Vol. 14, p. 351.
- [180] D. Guéry-Odelin, J. Söding, P. Desbiolles, and J. Dalibard *Europhys. Lett.*, **44** (1998) 25.
- [181] M. Arndt et al. *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 625.
- [182] E. Cornell private communication (1998).
- [183] C.A. Sackett, C.C. Bradley, M. Welling, and R.G. Hulet *Bra. J. Phys.*, **27** (1997) 154.
- [184] H.D. Politzer *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 1140.
- [185] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg *Atom-Photon Interactions* (Wiley, New York) 1992.
- [186] O. Morice, Y. Castin, and J. Dalibard *Phys. Rev. A*, **51** (1995) 3896.
- [187] L. Allen and J.H. Eberly *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Dover Publications, New York) 1975.
- [188] M.R. Andrews Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [189] O.J. Luiten et al. *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 544.
- [190] V. Bagnato, D.E. Pritchard, and D. Kleppner *Phys. Rev. A*, **35** (1987) 4354.
- [191] G. Baym and C.J. Pethick *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 6.
- [192] M. Edwards and K. Burnett *Phys. Rev. A*, **51** (1995) 1382.
- [193] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari *Rev. Mod. Phys.*, in press (1998).
- [194] Y. Castin and R. Dum *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 5315.
- [195] Y. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R1753.
- [196] F. Dalfovo, C. Minniti, S. Stringari, and L. Pitaevskii *Physics Letters A*, **227** (1997) 259.
- [197] M. Holland, D.S. Jin, M.L. Chiofalo, and J. Cooper *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 3801.
- [198] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 3987.
- [199] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari *J. Low Temp. Phys.*, **109** (1997) 309.
- [200] R.J. Dodd, K. Burnett, M. Edwards, and C.W. Clark *Acta Physica Polonica*, **93** (1998) 45.
- [201] M. Naraschewski and D.M. Stamper-Kurn *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 2423.
- [202] R.J. Dodd, C.W. Clark, M. Edwards, and K. Burnett *Optics Express*, **1** (1997) 282.

- [203] H. Wu and E. Arimondo *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 3822.
- [204] H. Wu and E. Arimondo *Europhys. Lett.*, **43** (1998) 141.
- [205] B. Anderson and M. Kasevich private communication (1998).
- [206] M. Bijlsma and H.T.C. Stoof *Phys. Rev. A*, **54** (1996) 5085.
- [207] P. Grüter, D. Ceperley, and F. Laloë *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1998) 3549.
- [208] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R4633.
- [209] S. Grossman and M. Holthaus *Zeitschrift für Naturforschung*, **50a** (1995) 921.
- [210] W. Ketterle and N.J. van Druten *Phys. Rev. A*, **54** (1996) 656.
- [211] J.R. Ensher et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 4984.
- [212] D.A.W. Hutchinson, E. Zaremba, and A. Griffin *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 1842.
- [213] R.J. Dodd, M. Edwards, C.W. Clark, and K. Burnett *Phys. Rev. A*, **57** (1998) R32.
- [214] A. Minguzzi, S. Conti, and M.P. Tosi *Journal of Physics: Condensed Matter*, **9** (1997) L33.
- [215] W.I. McAlexander et al. *Phys. Rev. A*, **51** (1995) R871.
- [216] P. Nozières and D. Pines *The Theory of Quantum Liquids* (Addison-Wesley, Redwood City, CA) 1990.
- [217] A. Griffin *Excitations in a Bose-condensed liquid* (Cambridge University Press, Cambridge) 1993.
- [218] N.N. Bogoliubov *J. Phys. (USSR)*, **11** (1947) 23.
- [219] T.D. Lee and C.N. Yang *Phys. Rev.*, **113** (1959) 1406.
- [220] S. Stringari *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 2365.
- [221] M. Edwards et al. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 1671.
- [222] S. Stringari *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 2360.
- [223] M.R. Andrews et al. *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 2967.
- [224] E. Zaremba, A. Griffin, and T. Nikuni *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 4695.
- [225] G.M. Kavoulakis and C.J. Pethick *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 1563.
- [226] S.A. Morgan, R.J. Ballagh, and K. Burnett *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 4338.
- [227] W.P. Reinhardt and C.W. Clark *J. Phys. B*, **30** (1997) L785.
- [228] A.D. Jackson, G.M. Kavoulakis, and C.J. Pethick *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 2417.
- [229] C. Gay and A. Griffin *J. Low Temp. Phys.*, **58** (1985) 479.
- [230] V.N. Popov *Functional Integrals and Collective Modes* (Cambridge University Press, New York) 1987.
- [231] A. Griffin *Phys. Rev. B*, **53** (1996) 9341.

- [232] D.A.W. Hutchinson, R.J. Dodd, and K. Burnett *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 2198.
- [233] M. Olshanii preprint, cond-mat/9807412 (1998).
- [234] M.J. Bijlsma and H.T.C. Stoof preprint, cond-mat/9807051. (1998).
- [235] W.V. Liu *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 4056.
- [236] L.P. Pitaevskii and S. Stringari *Physical Letters A*, **235** (1997) 398.
- [237] S. Giorgini *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 2949.
- [238] P.O. Fedichev, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 2269.
- [239] L.P. Pitaevskii *Physics Letters A*, **229** (1997) 406.
- [240] A.B. Kuklov et al. *Phys. Rev. A*, **55** (1997) R3307.
- [241] R. Graham, D.F. Walls, M.J. Collett, and E.M. Wright *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 484.
- [242] A. Sinatra et al. preprint, cond-mat/9809061 (1998).
- [243] A. Griffin and E. Zaremba *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 4839.
- [244] V.B. Shenoy and T.-L. Ho *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 3985.
- [245] A. Griffin, W.-C. Wu, and S. Stringari *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1996) 1836.
- [246] G.M. Kavoulakis, C.J. Pethick, and H. Smith *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 2938.
- [247] G.M. Kavoulakis, C.J. Pethick, and H. Smith *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 4036.
- [248] E. Tiesinga et al. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, **101** (1996) 505.
- [249] L.P. Pitaevskii and S.Stringari *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 4541.
- [250] M. Fliesser and R. Graham preprint, cond-mat/9806115 (1998).
- [251] M. Holland and J. Cooper *Phys. Rev. A*, **53** (1996) R1954.
- [252] M. Naraschewski et al. *Phys. Rev. A*, **54** (1996) 2185.
- [253] D.S. Rokhsar *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 2164.
- [254] E.J. Mueller, P.M. Goldbart, and Y. Lyanda-Geller *Phys. Rev. A*, **57** (1998) R1505.
- [255] J. Javaneinen, S.M. Paik, and S.M. Yoo *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 580.
- [256] R.G. Hulet Invited talk at ICAPXVI, Windsor, Canada, August 3-7 (1998).
- [257] E.A. Burt et al. *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 337.
- [258] J. Söding et al. preprint, cond-mat/9811339 (1998).
- [259] J.P.J. Burke, J.L. Bohn, B.D. Esry, and C.H. Greene *Phys. Rev. A*, **55** (1997) R2511.
- [260] S.J.J.M.F. Kokkelmans, H.M.J.M. Boesten, and B.J. Verhaar *Phys. Rev. A*, **55** (1997) R1589.

- [261] P.S. Julienne, F.H. Mies, E. Tiesinga, and C.J. Williams *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 1880.
- [262] J. Stenger et al. preprint (1998).
- [263] H. Wiseman, A. Martins, and D. Walls *Quantum and Semiclassical Optics*, **8** (1996) 737.
- [264] M. Holland et al. *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R1757.
- [265] H.M. Wiseman *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 2068.
- [266] H.M. Wiseman and M.J. Collett *Physics Letters A*, **202** (1995) 246.
- [267] R.J.C. Spreeuw, T. Pfau, U. Janicke, and M. Wilkens *Europhys. Lett.*, **32** (1996) 469.
- [268] M. Olshanii, Y. Castin, and J. Dalibard in *Laser Spectroscopy XII*, edited by M. INGUSCIO, M. ALLEGRINI, AND A. SASSO (World Scientific, Singapore) 1996, p. 7.
- [269] D. Kleppner *Physics Today*, Aug. 1997, p. 11; Jan. 1998, p. 90 .
- [270] D.J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, Englewood Cliffs) 1995.
- [271] M. Toda, R. Kubo, N. Saito, and N. Hashitsume *Statistical Physics I* (Springer-Verlag, New York) 1991.
- [272] E. Levich and V. Yakhot *Phys. Rev. B*, **15** (1977) 243.
- [273] H.T.C. Stoof *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991) 3148.
- [274] S.G. Tikhodeev *Sov. Phys. JETP*, **70** (1990) 380.
- [275] H.T.C. Stoof in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 226.
- [276] D.W. Snoke and J.P. Wolfe *Phys. Rev. B*, **39** (1989) 4030.
- [277] U. Eckern *J. Low Temp. Phys.*, **54** (1984) 333.
- [278] B.V. Svistunov *J. Moscow Phys. Soc.*, **1** (1991) 373.
- [279] D.V. Semikoz and I.I. Tkachev *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 3093.
- [280] H.T.C. Stoof *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 768.
- [281] Y. Kagan, B.V. Svistunov, and G.V. Shlyapnikov *Sov. Phys. JETP*, **75** (1992) 387.
- [282] Y. Kagan and B.V. Svistunov *Sov. Phys. JETP*, **78** (1994) 187.
- [283] Y. Kagan and B.V. Svistunov *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 3331.
- [284] Y. Kagan in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. GRIFFIN, D.W. SNOKE, AND S. STRINGARI (Cambridge University Press, Cambridge) 1995, p. 202.
- [285] C.W. Gardiner, P. Zoller, R.J. Ballagh, and M.J. Davis *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 1793.
- [286] C.W. Gardiner et al. *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1998) 5266.

- [287] B.D. Josephson *Phys. Lett.*, **1** (1962) 251.
- [288] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading,MA) 1964.
- [289] S.V. Pereversev et al. *Nature*, **388** (1997) 449.
- [290] J. Javanainen and S.M. Yoo *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 161.
- [291] J.I. Cirac, C.W. Gardiner, M. Naraschewski, and P. Zoller *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R3714.
- [292] Y. Castin and J. Dalibard *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 4330.
- [293] T. Wong, M.J. Collett, and D.F. Walls *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R3718.
- [294] P.W. Anderson in *The Lesson of Quantum Theory*, edited by J.D. BOER, E. DAL, AND O. ULFBECK (Elsevier, Amsterdam) 1986, p. 23.
- [295] R.L. Pfleeger and L. Mandel *Phys. Rev.*, **159** (1967) 1084.
- [296] A. Röhrhl, M. Naraschewski, A. Schenzle, and H. Wallis *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 4143.
- [297] H. Wallis and H. Steck *Europhys. Lett.*, **41** (1998) 477.
- [298] W. Hoston and L. You *Phys. Rev. A*, **53** (1996) 4254.
- [299] H. Wallis, A. Röhrhl, M. Naraschewski, and A. Schenzle *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 2109.
- [300] J. Javanainen and M. Wilkens *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 4675.
- [301] K. Helmerson private communication (1998).
- [302] B.P. Anderson and M.A. Kasevich *Science*, **282** (1998) 1686.
- [303] M. Lewenstein and L. You *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 3489.
- [304] E.M. Wright, D.F. Walls, and J.C. Garrison *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 2158.
- [305] K. Mølmer *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 566.
- [306] R. Loudon *The Quantum Theory of Light* (Clarendon, Oxford) 1983.
- [307] S.J. Kuo, D.T. Smithey, and M.G. Raymer *Phys. Rev. A*, **43** (1991) 4083.
- [308] M. Yasuda and F. Shimizu *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 3090.
- [309] W. Ketterle and H.-J. Miesner *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 3291.
- [310] Y. Kagan, B.V. Svistunov, and G.V. Shlyapnikov *JETP Lett.*, **42** (1985) 209.
- [311] B. Jackson, J.F. McCann, and C.S. Adams preprint, cond-mat/9804038 (1998).
- [312] W. Zhang and D.F. Walls *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 1248.
- [313] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger preprint, cond-mat/9812258. (1998).
- [314] E. Hagley et al. preprint (1998).

- [315] J.D. Miller, R.A. Cline, and D.J. Heinzen *Phys. Rev. A*, **47** (1993) R4567.
- [316] T. Kuga et al. *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 4713.
- [317] A. Kuhn, H. Perrin, W. Hänsel, and C. Salomon in *Ultracold Atoms and Bose-Einstein-Condensation, 1996, OSA Trends in Optics and Photonics Series, Vol. 7*, edited by K. BURNETT (Optical Society of America, Washington D.C.) 1996, p. 58.
- [318] M. Houbiers, H.T.C. Stoof, and E.A. Cornell *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 2041.
- [319] C.W. Gardiner et al. preprint, cond-mat/980101 (1998).
- [320] M. Marinescu and L. You *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 4596.
- [321] H. Feshbach *Annals of Physics*, **19** (1962) 287.
- [322] E. Tiesinga, A.J. Moerdijk, B.J. Verhaar, and H.T.C. Stoof *Phys. Rev. A*, **46** (1992) R1167.
- [323] E. Tiesinga, B.J. Verhaar, and H.T.C. Stoof *Phys. Rev. A*, **47** (1993) 4114.
- [324] H.C. Bryant et al. *Phys. Rev. Lett.*, **38** (1977) 228.
- [325] A.J. Moerdijk, B.J. Verhaar, and A. Axelsson *Phys. Rev. A*, **51** (1995) 4852.
- [326] J.M. Vogels et al. *Phys. Rev. A*, **56** (1997) R1067.
- [327] H.M.J.M. Boesten, J.M. Vogels, J.G.C. Tempelaars, and B.J. Verhaar *Phys. Rev. A*, **54** (1996) R3726.
- [328] P.O. Fedichev, Y. Kagan, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 2913.
- [329] J.L. Bohn and P.S. Julienne *Phys. Rev. A*, **56** (1997) 1486.
- [330] A.J. Moerdijk, B.J. Verhaar, and T.M. Nagtegaal *Phys. Rev. A*, **53** (1996) 4343.
- [331] S. Inouye et al. *Nature*, **392** (1998) 151.
- [332] P. Courteille et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 69.
- [333] F.A. van Abeelen, D.J. Heinzen, and B.J. Verhaar *Phys. Rev. A*, **57** (1998) R4102.
- [334] J.L. Roberts et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 5109.
- [335] F.A. van Abeelen and B.J. Verhaar private communication (1997).
- [336] M. Ueda and A.J. Legget *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 1576.
- [337] Y. Kagan, A.E. Muryshev, and G.V. Shlyapnikov *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 933.
- [338] C.A. Sackett, H.T.C. Stoof, and R.G. Hulet *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 2031.
- [339] P. Tommasini, E. Timmermans, M. Hussein, and A. Kerman preprint, cond-mat/9804015 (1998).
- [340] T.-L. Ho *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 742.
- [341] T. Ohmi and K. Machida *Journal of the Physical Society of Japan*, **67** (1998) 1822.
- [342] C.K. Law, H. Pu, and N.P. Bigelow preprint, cond-mat/9807258 (1998).

- [343] L.D. Landau and E.M. Lifshitz *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Pergamon Press, New York) 1977.
- [344] M.I. Petrashen and E.D. Trifonov *Applications of Group Theory in Quantum Mechanics* (MIT Press, Cambridge) 1969.
- [345] M. Tinkham *Group Theory and Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York) 1964.
- [346] E.A. Cornell, D.S. Hall, M.R. Matthews, and C.E. Wieman *J. Low Temp. Phys.*, **113** (1998) 151.
- [347] J. Stenger et al. *Nature*, **396** (1998) 345.
- [348] J.P. J. Burke, C.H. Greene, and J.L. Bohn *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 3355.
- [349] H.-J. Miesner et al. preprint, cond-mat/9811161 (1998).
- [350] L. Guttman and J.R. Arnold *Phys. Rev.*, **92** (1953) 547.
- [351] I.M. Khalatnikov *Soviet Physics JEPT*, **5** (1957) 542.
- [352] W.B. Colson and A.L. Fetter *J. Low Temp. Phys.*, **33** (1978) 231.
- [353] E.D. Siggia and E.A. Ruckenstein *Phys. Rev. Lett.*, **44** (1980) 1423.
- [354] T.-L. Ho and V.B. Shenoy *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 3276.
- [355] B.D. Esry, C.H. Greene, J.P.J. Burke, and J.L. Bohn *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 3594.
- [356] E.V. Goldstein and P. Meystre *Phys. Rev. A*, **55** (1997) 2935.
- [357] C.K. Law, H. Pu, N.P. Bigelow, and J.H. Eberly *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 3105.
- [358] P. Ao and S.T. Chui *Phys. Rev. A*, **58** (1998) 4836.
- [359] H. Pu and N.P. Bigelow *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 1130.