

УДК 535.14

КВАНТОВЫЙ ШУМ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

© 1997 г. Д. Кузнецов*, Д. Ройлих**

*Национальный университет Мексики

**Школа физики и астрономии университета Тель-Авива, 69978 Тель-Авив, Израиль

Поступила в редакцию 29.10.96 г.

Квадратурные компоненты одномодового поля интерпретируются как координаты фазового пространства. Предполагается, что квантовый усилитель преобразует состояние одной единственной моды и что исходное состояние поля в этой моде было когерентным сжатым. Передаточная функция, связывающая среднее значение поля в исходном и конечном состояниях, определяет отображение фазового пространства. При усилении неопределенность поля в конечном состоянии обычно больше, чем в исходном. Это увеличение интерпретируется как квантовый шум усилителя. Выводятся нижние оценки этого шума в терминах производных передаточной функции. В качестве иллюстрации рассмотрен вырожденный параметрический усилитель с истощением накачки. Для такого усилителя построены преобразование изначально ортогональной прямоугольной сетки в фазовом пространстве и деформация тела неопределенности, заданного функцией Вигнера.

ВВЕДЕНИЕ

Классическое поле в некоторой моде может быть усилено без внесения дополнительного шума. Квантовое поле – даже если оно приготовлено в когерентном состоянии – не может. Усиление поля в квантовой моде вызывает квантовый шум, т.е. увеличивает общую неопределенность квадратурных компонент поля.

Мы говорим, что усилитель линейный, если операторы усиленного поля могут быть представлены в виде некоторой линейной комбинации операторов исходного поля с C -числовыми коэффициентами. Минимальный шум линейных усилителей известен [1–4]. Но каков минимальный шум нелинейных усилителей? Этот вопрос пока исследован [5, 6] лишь частично.

Для фазово-инвариантного усилителя мы имеем нижнюю оценку квантового шума [6] (фазовая инвариантность означает, что коэффициент усиления не зависит от фазы исходного поля). Эти оценки применимы только для поля, приготовленного исходно в когерентном состоянии. При этом нижние границы шума линейных усилителей [1–4] применимы к любому (не обязательно фазово-инвариантному) линейному усилителю и к любому начальному состоянию поля. Разумеется, для изучения свойств нелинейных усилителей любая частичная нижняя оценка уровня квантового шума может быть полезна. Но в то же время желательно иметь по возможности более сильную и более общую оценку.

Мы показали, что фазово-инвариантный нелинейный усилитель может давать шум меньше, чем идеальный линейный усилитель с тем же ко-

эффициентом усиления [6]. В настоящей статье мы обобщаем нижние оценки шума, полученные в [6], двояко. Во-первых, здесь мы рассматриваем начальное состояние с произвольным сжатием. Во-вторых, мы снимаем требование фазовой инвариантности. Таким образом, наши нижние оценки применимы также к параметрическим квантовым усилителям.

Эти два обобщения связаны. Шум в нашей моде можно определить как $D = D_1 + D_2 - 1/2$, где D_1 и D_2 суть дисперсии квадратурных компонент. При использовании параметрического квантового усилителя любая из дисперсий D_1 или D_2 (но не обе) может быть сколь угодно мала; при этом мы сжимаем исходное состояние поля. Таким образом, чтобы получить полезные нижние оценки для шума усилителя общего вида, нам надо рассмотреть сжатие.

Параметрический усилитель усиливает квадратурные компоненты поля с разными коэффициентами; поэтому преобразование средних значений этих компонент следует описывать двумя функциями или одной комплекснозначной передаточной функцией. Мы определим ее в разделе I. Эта функция отображает исходные значения квадратурных компонент на их выходные средние значения. Квадратурные компоненты одной фиксированной моды соответствуют координатам (x, p) фазового пространства. Поэтому передаточная функция определяет отображение фазового пространства самого на себя; в общем случае это нелинейное отображение. Как уже отмечалось, наша цель – ограничить снизу возможные значения квантового шума, когда передаточная функция задана. В разделе II мы выво-

дим нижние оценки для шума D произвольного усилителя и для дисперсий D_1 и D_2 квадратурных компонент.

В разделе III мы иллюстрируем наши результаты для случая параметрического квантового усилителя с нелинейностью, вызванной истощением накачки. Мы представляем передаточную функцию искажением изначально равномерной прямоугольной сетки значений исходных квадратурных компонент. Чтобы представить графически возрастание неопределенности компонент, мы строим также распределение функции Вигнера как квазивероятности распределения квадратурных компонент и показываем, как искажается тело неопределенности при нелинейном преобразовании фазового пространства.

I. УСИЛЕНИЕ, КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И СЖАТИЕ

Квантовая механика усилителей предполагает, что усилитель превращает исходное поле a в выходное поле A унитарным преобразованием: $A = U^+ a U$. Мы используем строчные буквы для исходного поля и заглавные буквы для выходного; для простоты мы ограничиваемся здесь лишь случаем одномодового усилителя. В терминах оператора исходного поля a и его эрмитового сопряжения a^+ исходные квадратурные компоненты могут быть представлены следующим образом:

$$a_1 \equiv \frac{1}{2}(a + a^+), \quad a_2 \equiv \frac{1}{2i}(a - a^+). \quad (1)$$

Эти компоненты являются координатами фазового пространства и не коммутируют. Обозначим математические ожидания входного и выходного полей через $\langle a_i \rangle$ и $\langle A_i \rangle$ соответственно. Тогда U определяет отображение фазового пространства от $\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle$ к $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle$. Переход от $\langle a_1 \rangle + i\langle a_2 \rangle$ к $\langle A_1 \rangle + i\langle A_2 \rangle$ определяет передаточную функцию усилителя. Коэффициент усиления G_i есть отношение выходного и входного математических ожиданий: $G_i \equiv \langle A_i \rangle / \langle a_i \rangle$. В общем случае этот коэффициент зависит и от $\langle a_1 \rangle$, и от $\langle a_2 \rangle$.

Мы определяем шум D усиленного состояния как

$$D \equiv \langle A^+ A \rangle - \langle A^+ \rangle \langle A \rangle = D_1 + D_2 - \frac{1}{2}, \quad (2)$$

где

$$D_i \equiv \langle A_i^2 \rangle - \langle A_i \rangle^2 \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Целью настоящей работы являются нижние оценки для D_1, D_2 и D .

В некоторых частных случаях эти оценки известны. Для линейного квантового усилителя G_i есть константа [1-4]. При этом неопределеннос-

ти усиленных квадратурных компонент удовлетворяют неравенству

$$D_1 D_2 \geq \frac{1}{16} (2G_1 G_2 - 1)^2, \quad (4)$$

из которого следует

$$D \geq G_1 G_2 - 1. \quad (5)$$

При $G_1 = G_2$ усилитель фазово-инвариантный и $D \geq G_2 - 1$. Обе эти нижние оценки (4), (5) справедливы для любого типа линейного усилителя независимо от начального состояния поля, по которому мы берем средние значения. Для нижних оценок шума в общем (нелинейном) случае необходимо знать что-то об исходном состоянии, и минимальный шум не будет определяться значением коэффициента усиления при данном исходном состоянии. В предыдущей работе [6] представлены нижние оценки шума фазово-инвариантного усилителя в предположении, что изначально поле приготовлено в когерентном состоянии. Здесь мы допускаем, что исходное состояние $|\rangle$ сжато

$$|\rangle = |\alpha, 0\rangle_z \equiv T_\alpha S_z |0, 0\rangle, \quad (6)$$

где T_α есть оператор сдвига

$$T_\alpha \equiv \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a), \quad (7)$$

а S_z есть оператор сжатия

$$S_z \equiv \exp[z(a^+)^2/2 - z^* a^2/2]. \quad (8)$$

Здесь α и z суть C -числовые комплекснозначные параметры: α определяет амплитуду и фазу исходного когерентного состояния, а z определяет направление и степень сжатия. Мы используем греческие буквы для обозначения когерентных состояний и латинские для обозначения n -фотонных. Состояние $|m, 0\rangle$ представляет m фотонов в моде поля и некоторое некоррелированное с ним специально приготовленное состояние усилителя. Хотя это обозначение могло бы предполагать, что усилитель приготовлен в основном состоянии, мы не делаем такого предположения. В дальнейшем выражение $\langle Q \rangle$ для любого оператора Q определяет математическое ожидание оператора Q по состоянию $|\alpha, 0\rangle_z$.

Полезно переписать состояние $|\alpha, 0\rangle_z$ в несколько иной форме. Используя тождество

$$S_z^+ a S_z = a \operatorname{ch}|z| + a^+ \frac{z}{|z|} \operatorname{sh}|z|, \quad (9)$$

мы можем изменить порядок операторов сдвига и сжатия в формуле (6)

$$|\alpha, 0\rangle_z = T_\alpha S_z |0, 0\rangle = S_z T_\beta |0, 0\rangle, \quad (10)$$

где

$$\beta = \alpha \operatorname{ch}|z| - \alpha^* \frac{z}{|z|} \operatorname{sh}|z|, \quad (11)$$

II. НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ШУМА И ДИСПЕРСИЙ

Для нижних оценок шума нелинейных усилителей понадобятся две основные формулы. В первых, из формул (1) и (17) работы [6] следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{\partial^m}{\partial \beta^m} \langle \beta, 0 | Q | \beta, 0 \rangle = \langle 0, 0 | T_{\beta}^+ Q T_{\beta} | m, 0 \rangle \quad (12)$$

для любого Q , не зависящего от β (здесь $|\beta, 0\rangle$ представляет когерентное состояние поля).

Во-вторых, отметим, что оператор

$$I_0 = \sum_{m=0}^{\infty} S_z T_{\beta} | m, 0 \rangle \langle m, 0 | T_{\beta}^+ S_z^+ \quad (13)$$

является проектором, $I_0^2 = I_0$; и для любого состояния $|\alpha\rangle$ справедливо $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq \langle \alpha | I_0 | \alpha \rangle$. В частности,

$$\langle A^+ A \rangle \geq \langle A^+ I_0 A \rangle. \quad (14)$$

Из формул (12)–(14) следует

Теорема 1.

$D \geq E(\alpha, z)$ и $D \geq F(\alpha, z)$, где

$$E(\alpha, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \left(\operatorname{ch}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)^n \langle A^+ \rangle \right|^2 \quad (15)$$

и

$$F(\alpha, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \left(\operatorname{ch}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)^n \langle A \rangle \right|^2 - 1. \quad (16)$$

Доказательство.

Подставим формулы (14) в определение (2) шума D

$$D \geq \langle A^+ I_0 A \rangle - \langle A^+ \rangle \langle A \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle 0, 0 | T_{\beta}^+ S_z^+ A^+ S_z T_{\beta} | m, 0 \rangle|^2. \quad (17)$$

Используем (12) при $Q = S_z^+ A^+ S_z$

$$D \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left| \frac{\partial^m}{\partial \beta^m} \langle 0, 0 | T_{\beta}^+ S_z^+ A^+ S_z T_{\beta} | 0, 0 \rangle \right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left| \left(\operatorname{ch}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)^m \langle A^+ \rangle \right|^2 = E(\alpha, z). \quad (18)$$

С другой стороны, мы можем использовать сопряжение формулы (14), при этом A и A^+ меняются местами. Применим соотношение $AA^+ = A^+A - 1$ к определению (2). Затем, используя (12) при $Q = S_z^+ A S_z$, мы получаем нижнюю оценку $F(\alpha, z)$.

Применим эту теорему к специальным случаям. Полагая параметр сжатия $z = 0$ и предполагая, что $G = G_1 = G_2$ зависит только от $\alpha^* \alpha$, мы получаем условия нелинейного фазово-инвариантного усилителя. При этом выходное среднее значение поля $\langle A \rangle = G \alpha$, и теорема 1 воспроизводит нижнюю оценку шума такого усилителя [6].

В еще более специальном случае мы кладем $G = \text{const}$ и получаем нижнюю границу [1–4] для линейного фазово-инвариантного усилителя.

Обратимся теперь к дисперсиям D_1 и D_2 квадратурных компонент. Для линейного параметрического усилителя шум в одной из компонент может быть сколь угодно (в принципе) мал. Для нелинейного параметрического усилителя справедлива

Теорема 2.

$D_i \geq E_i(\alpha, z)$, где

$$E_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \left(\frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}|z| + \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2i} \left[\operatorname{ch}|z| - \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right)^n \langle A_i \rangle \right|^2. \quad (19)$$

Доказательство.

По аналогии с доказательством теоремы 1 мы исходим из определения $D_i = \langle A_i^2 \rangle - \langle A_i \rangle^2$ и имеем

$$D_i \geq \langle A_i I_0 A_i \rangle - \langle A_i \rangle^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle 0, 0 | T_{\beta}^+ S_z^+ A_i S_z T_{\beta} | m, 0 \rangle|^2. \quad (20)$$

Учитывая (12), мы получаем

$$D_i \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left| \left(\operatorname{ch}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{z}{|z|} \operatorname{sh}|z| \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)^m \langle A_i \rangle \right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left| \left(\frac{1}{2} \left[\operatorname{ch}|z| + \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \right. \right. \quad (21)$$

$$+ \frac{1}{2i} \left[\operatorname{ch}|z| - \frac{z^*}{|z|} \operatorname{sh}|z| \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left. \langle A_i \rangle \right|^2 = E_i(\alpha, z).$$

Отметим, что для линейного параметрического усилителя выживает только первое слагаемое ($m = 1$) в выражении (19) для $E_i(\alpha, z)$. При подходящем выборе параметра сжатия z можно сделать любую из дисперсий D_1 или D_2 сколь угодно малой. Выбор z , который делает малой D_1 , в то же время делает большой D_2 , и наоборот; поэтому мы не можем сделать обе D_1 и D_2 сколь угодно малыми, сохраняя уравнение (4). Чтобы обобщить это уравнение на случай нелинейных параметрических усилителей, мы могли бы умножить оценки $D_1 \geq E_1(\alpha, z)$ и $D_2 \geq E_2(\alpha, z)$ теоремы 2 и получить $D_1 D_2 \geq E_1(\alpha, z) E_2(\alpha, z)$, но это не будет наилучшей возможной оценкой: в линейном случае она не воспроизводит формулу (4) [7].

III. ПРИМЕР

Все реальные усилители насыщаемы. Насыщение проявляется в зависимости коэффициентов усиления G_i от входных амплитуд α_1 и α_2 , отображение фазового пространства становится нелинейным. В качестве примера такого нелинейного отображения рассмотрим параметрический усилитель с истоцаемой накачкой [8]

$$H = \frac{1}{2i} [a^2 b^+ - (a^+)^2 b]; \quad (22)$$

$U = \exp(-iHt)$ определяет унитарное преобразование. Здесь b – оператор поля в моде накачки с такими же коммутационными соотношениями, как в моде a ; a, a^+ коммутируют с b, b^+ . Предположим, что начальное состояние когерентно в каждой моде: $\alpha = \langle a \rangle, \beta = \langle b \rangle$. Передаточная функция отображает α_1, α_2 в $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle$.

Для численных расчетов, иллюстрирующих отображение фазового пространства, мы диагонализировали гамильтониан на подпространстве состояний с числом фотонов, не превышающим 40. При этом мы рассматриваем состояния $|k - 2m, m\rangle$ с $0 \leq k \leq 40$ и $0 \leq m \leq k/2$ в фоковском представлении; k и m – целые. Здесь $a^+ a |k - 2m, m\rangle = (k - 2m) |k - 2m, m\rangle$ и $b^+ b |k - 2m, m\rangle = m |k - 2m, m\rangle$. Отметим, что преобразование U не смешивает состояния с различными значениями k , так что фактически нам не пришлось диагонализировать матрицы шире, чем 21×21 .

Для диагонализации был использован пакет MAPLE, собственные значения и собственные функции были рассчитаны с 20 значащими цифрами.

Мы выбрали значение $\beta = 2$, чтобы показать, как при нелинейном параметрическом усилении деформируется исходное фазовое пространство. Пусть при $t = 0$ мы имеем однородную ортого-

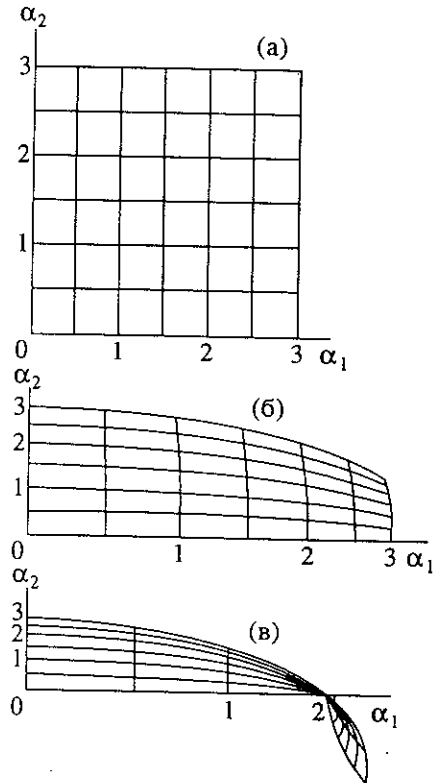


Рис. 1. Преобразование исходной прямоугольной сетки $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ в параметрическом усилителе: а – при $t = 0$, (б) – 0.3, в – 0.5.

нальную сетку (рис. 1а). Качество воспроизведения рисунков позволяет видеть слабую деформацию этой сетки в верхнем правом углу; она вызвана конечностью подпространства, на котором диагонализирован гамильтониан. Рисунки 1б, 1в показывают деформацию этой сетки при $t = 0.3$ и 0.5 . Эти отображения симметричны относительно $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1$ и $\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2$, так что на рисунках представлен только первый квадрант координатной плоскости. При $t = 0.3$ отображение почти линейно для $|\alpha| < 2$. Координатные квадраты превращаются в вытянутые прямоугольники, характерные для линейного сжатия. При больших значениях исходного поля эти прямоугольники деформируются. При $t = 0.5$ это отображение становится взаимно неоднозначным.

Более детально неопределенность выходного поля может быть охарактеризована функцией Вигнера

$$W(\alpha'_1, \alpha'_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,m}^* c_{k,m} \times \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \left(\alpha'_1 \sqrt{2} - \frac{u}{2} \right) \phi_k \left(\alpha'_1 \sqrt{2} + \frac{u}{2} \right) e^{i\sqrt{2}\alpha'_2 u} du, \quad (23)$$

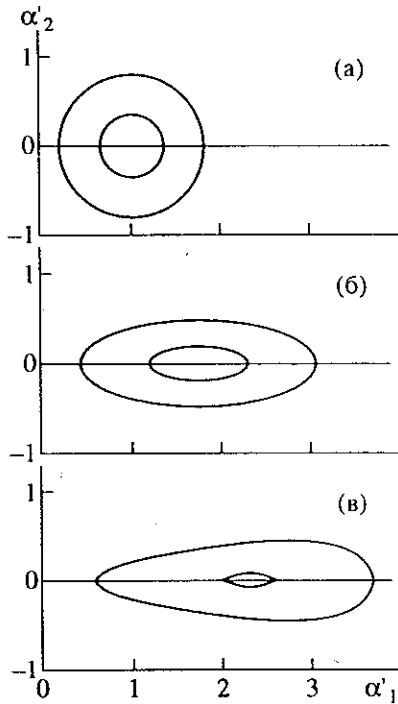


Рис. 2. Деформация функции Вигнера исходного когерентного состояния с $\alpha = 1$: а при $t = 0, 6 - 0.3$ в -0.5 . Прочерчены линии уровня $W = 0.3$ и $W = 0.8$.

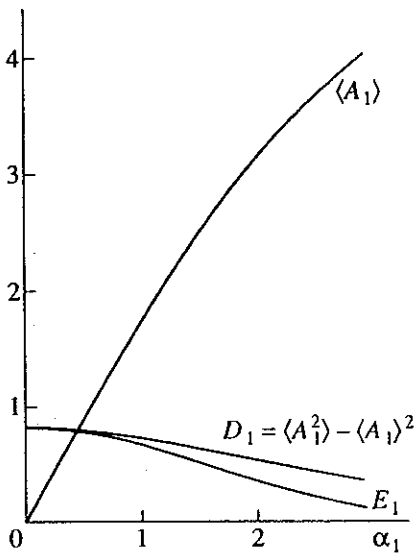


Рис. 3. Вещественная часть передаточной функции $\langle A_1 \rangle$ при $\alpha_2 = 0$; $t = 0.3$. Дисперсия D_1 и ее нижняя оценка E_1 для такой передаточной функции.

где $c_{n,m}$ суть коэффициенты разложения преобразованного состояния по состояниям с n фотонами поля и m фотонами накачки, $\phi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2} / \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$, $H_n(x)$ суть полиномы Эрмита [9].

Начальное состояние при $\alpha = 1$ представлено на рис. 2а концентрическими окружностями, центрированными в точке $\alpha_1' = \alpha_1, \alpha_2' = \alpha_2$ (мы строим функцию Вигнера в координатах α_1', α_2' , которые соответствуют $x/\sqrt{2}, p/\sqrt{2}$). При $t = 0.3$ эти окружности деформированы; они похожи на эллипсы, и эта деформация соответствует линейному сжатию сетки на рис. 1б.

При бóльших значениях t правая часть тела неопределенности становится шире левой (рис. 2в).

Отметим, что $A_1 = G_1 a_1$ и $A_2 = G_2 a_2$, и для линейного параметрического усилителя функция Вигнера W усиленного состояния может быть выражена в терминах функции Вигнера w исходного состояния: $W(\alpha_1', \alpha_2') = w(\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle)$ при $\langle A_1 \rangle$ и $\langle A_2 \rangle$, определенных передаточной функцией для входных значений α_1', α_2' . Истощение накачки нарушает это соотношение. Чтобы увидеть это, достаточно сравнить рисунки 1в и 2в: сетка на рис. 1в сгущается с правого края, а тело неопределенности, наоборот, становится шире; лишь среднее положение тела неопределенности следует отображению передаточной функцией исходного положения. Нелинейное поведение тела неопределенности показывает, как вторая и более высокие производные передаточной функции увеличивают шум усилителя.

Рассмотрим усилитель с передаточной функцией, показанной на рис. 2б. Рисунок 3 представляет $\langle A_1 \rangle$ как функцию α_1 при $\alpha_2 = 0$. Только первая квадратурная компонента поля усиливается в таком усилителе. Рассмотрим дисперсию этой компоненты. Эта дисперсия построена на том же графике в сравнении с нижней оценкой по теореме 2. И коэффициент усиления G_1 , и дисперсия D_1 , и ее оценка снизу E_1 убывают с ростом амплитуды, но D_1 остается больше, чем ее нижняя оценка, как это и должно быть.

Сплюсчивание контура неопределенности в области сжатия сетки может быть интерпретировано полуклассически. Отображение, соответствующее вырожденному параметрическому усилению, не изменяет элемент фазового объема $dpdx$ и поэтому может осуществляться без дополнительных степеней свободы (уравнение (23) с S -числом вместо b описывает параметрический усилитель с классической накачкой). Но сжатия или растяжения координаты и импульса, при которых фазовый объем не сохраняется (как это имеет место в правой части рис. 1б), подразумевают коррелированность состояния поля с состояниями дополнительных степеней свободы. Такая коррелированность выступает как дополнительный квантовый шум.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы охарактеризовали одномодовый усилитель общего вида его передаточной функцией, определенной на фазовом пространстве. Эта функция отображает математические ожидания квадратурных компонент исходного поля на математические ожидания компонент выходного поля. Насыщение усиления делает эту функцию нелинейной. Такое отображение генерирует квантовый шум, и мы вывели нижнюю оценку этого шума – как для общего шума, так и для дисперсии каждой из квадратурных компонент – в теоремах 1 и 2. Теорема 1 дает нижнюю оценку шума истоцаемого параметрического усилителя со сжатым когерентным входным сигналом. Для такого усилителя теорема 2 дает нижнюю оценку дисперсии одной квадратурной компоненты усиленного поля. Это первые оценки снизу квантового шума нелинейного усилителя общего вида.

Конкретные примеры показывают, что нижние границы, даваемые теоремами 1 и 2, справедливы, хотя тело неопределенности и фазовое пространство не всегда деформируются одинаковым образом.

Для простоты мы рассмотрели состояния одной моды поля. Практически могут быть важны и многомодовые состояния. Для них нижние оценки, даваемые теоремами 1, 2, не являются наилучшими возможными, потому что проектор I_0 , введенный в (13), это только один из множества ортогональных проекторов в многомодовом пространстве. Рассмотрение дополнительных проекторов может улучшить нижние оценки.

Работа Д. Ройлиха частично финансирована правительством Израиля (Ministry of Absorption, Center for Absorption in Science) и фондом Тича (Ticho Fund). Деятельность Д. Кузнецова частично поддерживается Мексиканской Системой Национальных Исследователей (Sistema Nacional de Investigaciones, Mexico). Д. Кузнецов благодарен за дискуссии и помощь, которую ему оказали Роберто Ортега и В. Манько.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haus H.A., Mullen J.A. // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 2407.
2. Yamamoto Y., Haus H.A. // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 1001.
3. Caves C.M. // Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1817.
4. Vaccaro J., Pegg T.D. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. P. 4985; Lugiato L.A., Pregnato A., Spineli L. // J. Mod. Opt. 1966. V. 43. P. 259; Stenholm S. // Opt. Commun. 1986. V. 58. P. 177.
5. Kouznetsov D., Ortega R. // Quantum and Semiclassical Optics. 1995. V. 7. P. 517.
6. Kouznetsov D., Ortega R., Rohrllich D. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 1665.
7. Kouznetsov D., Rohrllich D. // Tel Aviv University. Preprint TAUP 2373-96. 1996.
8. Nikitin S.P., Masalov A.V. // Quant. Opt. 1991. V. 3. P. 105.
9. Abramovitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphics and Mathematical Tables. National Bureau of Standards. 1996. Русский перевод: Абрамович М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.