

Дмитрий Кузнецов

Суперфункции

Нецелые итерации голоморфных функций.
Тетрация и другие суперфункции. Формулы,
алгоритмы, графики и комплексные карты.

2014

 **LAMBERT**
Academic Publishing

<https://www.morebooks.de/store/ru/book/Суперфункции/isbn/978-3-659-56202-0>

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Covervi.jpg>

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Tetma.jpg> cover map

<http://mizugadro.mydns.jp/BOOK/202.pdf>

<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/BOOK/202.pdf>

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Book>

This version is generated 18 февраля 2017 г.

Дмитрий Кузнецов

Суперфункции

**Нецелые итерации голоморфных функций.
Тетрация и другие суперфункции. Формулы,
алгоритмы, графики и комплексные карты**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-56202-0

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2014 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2014

Оглавление

1	Предисловие	5
1	Физическая математика	6
2	Аксиомы ТОРИ	8
3	Зачем эта книга	11
4	Что в книге есть	15
5	Чего в книге нет	16
2	Введение	20
1	Фильтры и обозначения	21
2	Гнездо	24
3	Волоконный усилитель	24
4	Передаточное уравнение	25
5	Множественность решений	27
6	Постановка задачи	28
3	Примеры суперфункций	30
1	Таблица суперфункций	30
2	Построение элементарных суперфункций	33
3	Имплементация суперфункций	35
4	Элементарные суперфункции	36
1	Итерации линейной функции	36
2	Рациональная функция	38
3	Итерации возведения в степень	46
5	Таня и Шока	49
1	Об узких специалистах	50
2	Таня и Арктаня	51
3	Передаточная функция Doya	56
4	Келлер, Шока и АркШока	58
5	О единственности решения	65

6	Конжекция о почти идентичной функции	67
6	Регулярная итерация	68
1	Общая формула	69
2	Метод проб и ошибок против дедукции	71
3	Пример с известным ответом: опять Doua.	73
4	Уравнение Шрёдера	75
7	Логистическое отображение	77
1	Логистическая последовательность	78
2	Стационарная точка $L=0$	79
3	Абельфункция для логистического оператора	83
4	Половинная итерация	87
5	Иная стационарная точка, $L = 1 - 1/s$	92
8	Корень из факториала	94
1	Факториал и его стационарные точки	96
2	Регулярная итерация для суперфакториала	99
3	АбельФакториал	103
4	Итерации факториала	106
5	Применение и спекуляции	109
9	Экспонента по основанию $\sqrt{2}$	110
1	Суперфункция на стационарной точке $L=4$	113
2	Абельфункция на стационарной точке $L=4$	118
3	Итерации экспоненты по основанию $\sqrt{2}$	121
4	Результаты этой главы	123
5	Большой камень	124
10	Экзотические итерации	127
1	Единичная производная	128
2	Отличная от нуля стационарная точка	131
11	Экспонента по основанию $\exp(1/e)$	132
1	Суперэкспонента по основанию $\eta = e^{1/e} = \exp^2(-1)$	135
2	Абельэкспонента по основанию Генрика	140
3	Итерации	143
12	Функции LambertW и zex	147
1	Голоморфный zex	149
2	SuZex	153

3	AuZex	156
4	Итерации функции zex	159
13	Суперсинус и итерации синуса	161
1	Суперсинус SuSin	162
2	Абельсинус AuSin	165
3	Итерации синуса	170
14	Натуральная тетрация tet	173
1	Экспонента	174
2	Эвристическая тетрация	178
3	Свойства тетрации	183
4	Интеграл Коши	184
5	Разложение Тэйлора в нуле	190
6	Улучшенная аппроксимация	191
7	Разложение в точке $3i$	194
8	Асимптотическое разложение	195
9	Сравнение аппроксимаций	199
15	Арктетрация	205
1	Вычисление арктетрации	206
2	О названиях	209
3	Итерации Экспоненты	211
4	Уроки натуральной тетрации	215
5	Ещё апология	217
16	Тетрация по основанию $b = \sqrt{2}$	219
1	Определение	220
2	Пусть $b = \sqrt{2}$	220
3	Арктетрация по основанию $b = \sqrt{2}$	224
4	Снова итерирую экспоненту по основанию $\sqrt{2}$	231
5	Четыре суперэкспоненты по основанию $\sqrt{2}$	237
6	Комплексные итерации	239
7	Воспроизводимость	242
17	Тетрация по основанию $b > 1$	243
1	Аппроксимация тетрации вблизи нуля	243
2	Различные основания экспоненты и итерации	247
3	Зависимость тетрации от основания	251

18	Комплексное основание	253
1	Стационарные точки логарифма	254
2	Tetration to the Sheldon base	256
3	Область тронной ракушки	259
19	Аскерманны	260
1	Двоичные аскерманны	263
2	Названия	264
3	Пентация	265
4	Стационарные точки пентации	271
5	Сравнение натуральных аскерманнов	273
6	Синдром последнего коэффициента	274
20	Без стационарных точек	277
1	Функция Трапманна	277
2	ArgTra, обратная функция от трапманна	279
3	Супертрапманн	284
4	Связь с другими функциями	290
5	SuTra, имплементация супертрапманна	291
6	AuTra, абельфункция трапманна	293
7	Итерации трапманна	297
21	Заключение	299
1	Основные результаты	299
2	Будущая работа	303
3	Обозначения	304
4	Послесловие	306
5	Acknowledgement	307
22	Приложения	308
1	Про обложку	308
2	Опшмётки	309
3	Рациональная функция, более общий случай	310
4	Сайты	315
5	Новые термины	316
6	English abstract: Superfunctions	317
7	English keywords	318
	Литература	319

Глава 1

Предисловие

Я пишу это предисловие из уважения к моим учителям Английского языка, которые считают, что любая писанина (даже если она не очень по-английски), каждый том, глава должны начинаться с Предисловия (или даже Вступления) и заканчиваться Послесловием. Схожее мнение, ещё в СССР, высказывали учителя русской литературы, объяснявшие школьникам облако в штанах (рис.1.1) и прочие детали соцреализма.



Рис. 1.1: Фигура Маяковского

Это предисловие пишется не для читателей. Оно пишется для тех, кто Книгу читать не будет:

Для редакторов, издателей и продавцов, которые работают с тысячами книг и которым надо за минуту понять, почему именно эта Книга должна (по мнению автора) стоять на первом месте в списке рекомендованной литературы.

Для опытных критиков, которым достаточно прочесть две страницы, чтобы написать рецензию: «Это что за невидаль: “Тетрация, суперфункции”? Что это за “суперфункции”? Мало нам сверхпроводимости, сверхтекучести, сверхразрешения, суперсимметрии, супергравитации, суперструн и других “супернаук”, и мало нам суперменов, супермаркетов и суперинфляции, и вот, на тебе, теперь ещё “суперфункции”! И швырнул в свет какой-то лазерщик! Слава Богу! Ещё мало забили интернет всякими текстами и извели леса на бумагу! Ещё мало народу, всякого звания и сброду, застряло у мониторов! Дернула же охота и лазерщика потащиться вслед за другими! Правильно, печатной бумаги развелось столько, что не придумаешь скоро, что бы такое завернуть в нее». [4]

Для библиотекарей, которым надо выбрать для этой Книги подходящую полку на самом видном месте, чтобы её было легко найти среди книг про суперсимметрию, сверхтекучесть, сверхпроводимость, суперменов и супермаркеты.

Для коллег, которые удивляются, с какой стати лазерщик, вместо того, чтобы рекламировать оптические керамики, развивая Прикладную Лазерную Науку (за которую дают гранты), вдруг занялся суперфункциями (за которые пока грантов не дают), и ведёт себя как простак, который не знает, где в суши спрятана рыбка (так в стране Восходящего Солнца может звучать русская Теорема о том, с какой стороны у бутерброда масло).

Для родственников и друзей, которые учат меня жить и рекламировать мои результаты. Судя по предварительным отзывам, они лучше меня понимают, где в суши спрятана упомянутая выше рыбка, и как её съесть, совмещая полезное с приятным. Впрочем, исследование взаимопонимания между родственниками и друзьями [23] не включено в этот труд и публикуется отдельно.

Любители чтения увлекательного и благопристойного [1], уставшие от сальных шуток Панурга и желающие хлебнуть чуток физической математики [68, 49], либо интересующиеся именно тетрацией и прочими суперфункциями, могут диагоналить отсюда прямо к главе 2.

1 Физическая математика

Меня спрашивали, как я бы характеризовал жанр этой книги. Я бруснул поисковики, и получается, что ближе всего подходит термин “физическая математика” [68, 49]. Такой порядок слов выбран, чтобы не путать её с математической физикой.

Термин “физическая математика” означает, что для математики не делается исключений, и для проверки математических гипотез используются те же методы, какие приняты и для других наук и, в частности, для физики. Строгое математическое доказательство на основе сформулированных в самом начале аксиом при этом является допустимым методом исследования, но не императивом. Разумеется, приветствуется перевод эвристических утверждений этой Книги на строгий язык чистых математиков.



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aqua_regia_in_Davenport_Laboratories.jpg

Рис. 1.2: Царская водка, $\text{H}_2\text{SO}_4 + 2\text{HCl}$ и водка царская, $3\text{H}_2\text{O} + 2\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$

Желательно не путать физическую математику и математическую физику. Физическая математика использует методы физики и прочих естественных наук в математике (зачастую вместо общепринятой математически-строгой дедукции).

Математическая физика применяет методы, типичные для математики, к уравнениям, которые пришли из физики. Физическая математика похожа на математическую физику, примерно как Царская Водка похожа на водочное царство. Для внутреннего употребления водка царская может быть более подходящим напитком, особенно для любителей, чем царская водка (рис. 1.2).

В этой Книге используется именно физическая математика, а не царская водка, не водка царская и даже не математическая физика. Результаты, представленные здесь, носят прикладной характер. Мне представляется наиболее интересным приложение результатов к Лазерной науке. Поэтому я стараюсь писать популярно, чтобы это могли понять даже лазерщики; Книга рассчитана на попадание в руки даже самого необученного академика.

Некоторые тексты физической математики [68] я считаю сложными¹. Надеюсь, что дедукция в этой Книге более прозрачна.

¹Например, я не сумел проследить “физический” вывод работы [68] о том, что площадь под параболой равна $4/3$ от площади вписанного треугольника

2 Аксиомы ТОРИ

В этой Книге используются Аксиомы ТОРИ. В этой секции предлагается краткий пересказ описания этих аксиом из УФН [55] и J. of Modern Physics [72].

Наукой называется область человеческого знания, человеческих достижений и деятельности, связанная с выработкой специального языка, то есть системы обозначений и концепций для описания воспроизводимых явлений любой природы, характеризующегося следующими аксиомами:

1. Применимость. Каждая научная концепция имеет ограниченную область применимости, отличную от пустого множества и полного множества.

2. Верификабельность. Каждая концепция может быть подтверждена: Не используя эту концепцию, можно описать некоторый специфический эксперимент с таким специфическим результатом, который подтверждает концепцию.

3. Опровержимость (Опровергабельность). Каждая концепция может быть опровергнута (то есть, отвергнута): в терминах этой концепции можно описать некоторый специфический эксперимент с таким специфическим результатом, который указывает, что концепция ошибочна.

4. Внутренняя непротиворечивость. В концепции не найдено внутренних противоречий.

5. Принцип соответствия. Если область применимости новой концепции пересекается с областью применимости другой, уже принятой и подтвержденной концепции, то новая концепция или воспроизводит результаты старой концепции, или указывает способ доказать, что старая концепция ошибочна. (Например, ошибочной может быть оценка области применимости старой концепции.)

6. Плюрализм и простота. Допускается сосуществование взаимно противоречивых концепций, удовлетворяющих критериям (1-5). Если две взаимно-противоречивых концепции имеют одну и ту же область применимости, то более простая из них имеет приоритет и рассматривается как основная по отношению к более сложной.

Именно эти аксиомы, 1-6, я называю термином “Аксиомы ТОРИ”. На аксиомах ТОРИ (и для приложения этих аксиом) в 2011 году

был построен сайт <http://tori.ils.ues.ac.jp/TORI>, который просуществовал 2 года. 2013.02.27, сайт был атакован политиками от науки и доступ к нему был уничтожен ²; стоило трудов создать его клон <http://mizugadro.mydna.jp/t>. Судя по письмам, предшествовавшим атаке, причиной агрессии явилась критическая статья, подготовленная для журнала Physics Today ³. К сожалению, именно так политики отвечают на критику, когда им нечего возразить по существу. Надеюсь, что эти политики выплачивают администрации нашего университета значительную сумму за каждый день, пока сайт ТОРИ недоступен по его оригинальному урлю. У меня нет других сколько-нибудь логичных объяснений действиям университетской администрации, постфактум одоблившей варварскую атаку.

Основные результаты, представленные в ТОРИ, удалось опубликовать в научных журналах [74, 72, 77, 78]. Для удобства ссылок, для перечисленных выше аксиом потребовался специальный термин. Тогда-то я и назвал их “Аксиомы ТОРИ” (TORI axioms). Эта Книга построена и написана на основе аксиом ТОРИ.

Термин ТОРИ означает “Теоретические Основы Революционных Исследований”. Я предполагаю, что если какое научное исследование не сулит революции в какой-либо области науки или технологии, то не очень понятно, зачем вообще оно нужно (я имею в виду иные мотивации, кроме получения и распила грантов).

ТОРИ есть русификация названия TORI (**T**ools for **O**utstanding **R**esearch and **I**nvestigation). Имеется в виду, что в том, что иногда называют термином “современная наука”, очень много похожих, однотипных исследований, которые с трудом удовлетворяют аксиомам ТОРИ, если вообще (if at al). Поэтому все нетривиальные исследования волей-неволей должны быть “Outstanding”. В ТОРИ собираются инструменты, формализмы, алгоритмы для таких исследований.

Через несколько месяцев после упомянутой атаки, клон ТОРИ удалось установить на новом сервере, <http://mizugadro.mydns.jp/t>; и я продолжаю грузить туда инструменты, которые мне кажутся подходящими для революционных исследований. В частности, в ТОРИ

² http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Tori_attacked

http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/toriattacked.shtml D.Kouznetsov. TORI attacked (2013)

³<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2013physToday.pdf> D.Kouznetsov. Corruption in Russian science. 2013, preprint

загружаются алгоритмы и картинки, использованные в этой Книге:

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Category:Book>

В идеале, генератор каждого рисунка может быть скачан, скомпилирован, прочитан и, при надобности, модифицирован Читателем.

Я грузю генераторы также и на другие серверы. В Приложениях, я предлагаю ссылки на разные интернет-ресурсы, на тот случай, если какой-либо сервер недоступен (рис. 1.3). Таким образом Читатель может использовать и развивать формализм суперфункций с того самого места, до которого дошел я. Эти генераторы можно использовать, даже не повторяя предложенные в Книге выкладки.



Девочка уронила сервер

Рис. 1.3: Сайт недоступен

Я надеюсь, что читатели будут указывать источники, откуда они скачивают алгоритмы и картинки. Это нужно не для того, чтобы застолбить моё авторство, но на тот случай, если вдруг где опечатка или, не дай Бог, методическая ошибка. Ошибки в книге, вероятно, есть. Редакторы и корректоры издательства Lambert Academic Press не только не правят рукописи, предназначенные для публикации, но и даже не читают их. Появление этого абзаца в Книге будет тому наглядным свидетельством. Поэтому, если чего не так, то ругать нужно автора, а не редактора.

Если при генерации (или модификации) рисунков возникают проблемы, то критику надо слать в адрес автора, [dima\(a\)ils.ues.ac.jp](mailto:dima(a)ils.ues.ac.jp) И указать, какой алгоритм не работает так, как это описано в Книге. Чтобы исправить. Чтобы всё заработало. Таким образом, если чего не выходит, надо не упростовать, а спрашивать. Стучите, и вам откроют ⁴ (рис. 1.4).



Рис. 1.4: Стучите - и вам откроют

⁴<http://www.bible.by/nt-slovo-life/read/40/07/> От Матвея, глава 7: .. Просите – и получите, ищите – и найдете, стучите – и вам откроют.

3 Зачем эта книга

После публикации статьи про голоморфную тетрацию [44], я надеялся, что математики сподобятся проделать всю остальную работу по суперфункциям сами. Увы...

Прошло пять лет, а суперфункции, в частности, тетрация и суперфакториал, до сих пор не появились в описаниях алгоритмических языков. До сих пор функция Nest [80] в языке “Математика” требует, чтобы число итераций было целым; а если кто-то аппроксимирует неизвестную колоколообразную функцию, то обычно фантазия коллег не идет дальше Гауссовой экспоненты. В лучшем случае выбирают между Гауссом, гиперболическим секантом и Лоренцом. А ведь можно использовать ещё, например, половинную итерацию экспоненты, то есть такую функцию f , что $f(f(z)) = \exp(z)$. И есть ещё много всяких функций такого рода.

Почти весь матан в школах и вузах построен на первых трех аскерманнах (функциях Аскерманна: сложение, умножение, экспоненцирование) и их обратных функциях в различных комбинациях. Этот арсенал можно значительно расширить за счет нецелых итераций. Но для этого нужны суперфункции.

Когда физики исследуют нелинейный отклик среды, образец стараются сделать оптически-тонким, чтобы можно было пренебречь изменением усиления или поглощения при изменении интенсивности. Можно улучшить точность, взяв образец потолще, измерить передаточную функцию этого образца с несколькими знаками, и восстановить распределение интенсивности по мере усиления или поглощения света в образце [73, 74]. Но для этого нужно уметь строить суперфункции.

Многие исследователи считают, что именно их работа чрезвычайно важна. Я не являюсь исключением. С моей точки зрения, тетрация и арктетрация, как и другие суперфункции и абельфункции, столь же важны для науки 21 века, как экспонента и логарифм важны для науки в 19м и в 20м веках. То есть ожидается научная революция, столь же значительная, как открытие того, что с экспонентой

и логарифмом можно легко вычислять любую, даже дробную (или даже комплексную) степень числа. С суперфункциями и абельфункциями легко вычислять любую, даже дробную (или даже комплексную) итерацию практически любой голоморфной функции. Для этого нужны суперфункции.

Для использования суперфункций нужно знать их свойства и уметь их быстро и аккуратно вычислять. Я этому уже научился. Эта книга для того, чтобы вы тоже могли их вычислять.

Когда я объяснял редактору (и рецензентам), почему нашу статью про корень из факториала [51] надо опубликовать в Вестнике Московского Университета, я привел такой пример:

Приезжает студент физфака в деревню, а там колхозник, то есть уже, конечно, не колхозник, а ударник капиталистического труда, видит на студенте значок физфака в виде корня из факториала, и спрашивает: “а что это значит?” - а студент не знает..

Судя по переписке и её результату, рецензенты сочли этот аргумент убедительным. Корень из факториала - это такая функция f , что $f(f(x)) = x!$, хотя бы для всех $x > 1$. Эту функцию нетрудно вычислять. Но для этого надо знать, что такое суперфункция и что такое абельфункция. Для того, чтобы каждый, кто интересуется, мог это знать, пишется эта книга.

Когда основы формализма суперфункций были уже созданы, один из моих соавторов, Акира Ширакава (Akira Shirakawa) [35] заявил о невозможности восстановления интенсивности света в усилителе из его передаточной функции [64], а когда алгоритм для такого восстановления [50, 73, 74] был представлен, пожаловался, что формулы сложны [65]. При всех взаимных недоразумениях, я хочу учесть его замечания. В этой Книге я стараюсь цитировать не только научные статьи и стараюсь избегать сложной математики, хотя бы в некоторых рисунках. Однако, я все же надеюсь, что читатель знает, чем интеграл отличается от логарифма, и умеет извлекать квадратный корень из минус единицы. Такой читатель, вероятно, является узким специалистом, и может не знать, чем Фудоки отличаются от Нибелунгов, отчего умер Пушкин и как очищают политуру [15]. По-

этому я стараюсь не злоупотреблять лирическими отступлениями. Чтобы пояснить, что я имею в виду, предложу только один пример:

Счастлив путник, который после длинной, скучной дороги с её холодами, духотой автобусов, промозглой сыростью аэрокондиционеров в залах ожидания, с тупой придирчивостью консулов и пограничников, отложенными рейсами, въедливыми таможенниками, охочими до грязного белья солдатами спецконтролей, перебранками с везущими в противоположную сторону таксистами, видит, наконец, знакомую крышу с несущимися навстречу огоньками, и предстанут пред ним знакомые комнаты, радостный крик выбежавших навстречу людей, шум и беготня детей и успокоительные тихие речи, прерываемые пылающими лобзаниями, властными истребить все печальное из памяти. Счастлив семьянин, у кого есть такой угол, но горе холостяку! Счастлив автор, который проходит мимо результатов странных, необычных, поражающих своим противоречием с общепринятой парадигмой, но находит и описывает случаи, являющие высокое достоинство Науки, который из великого омута ежедневно вращающихся вопросов избрал одни немногие исключения, для которых и так есть известные ответы, который не изменял ни разу возвышенного строя своей лиры, не ниспускался с вершины своей к неразрешенным вопросам, и, не касаясь земли, весь повергался в свои хвалебные песнопения, далеко отторгнутые от каких-либо несогласий и конфликтов. Вдвойне завиден прекрасный удел его: он среди подобных ему коллег, как в родной семье; а между тем далеко и громко разносится его слава. Он окурил упоительным куревом людские очи; он чудно польстил им, сокрыв печальное в науки и жизни, показав им прекрасные и высокие достижения современников. Всё, рукоплещая, несется за ним и мчится вслед за торжественной его колесницей. Великим всемирным ученым именуют его, парящим высоко над всеми другими гениями мира, как парит орел над другими высоко летающими. При одном имени его уже объемлются трепетом молодые пылкие сердца, ответные слезы ему блещут во всех очах... Нет равного ему в силе - он Бог! Но не таков удел, и другая судьба исследователя, дерзнувшего вызвать наружу все, что ежеминутно

пред очами и чего не зрят равнодушные очи, - всю страшную, потрясающую тину мелочей, опутавших нашу науку, всю глубину холодных, раздробленных, повседневных и мелких исследований, которыми кишат научные журналы и программы конференций, подчас горькая и скучная дорога, и крепкою силою неумолимого резца дерзнувшего выставить их выпукло и ярко на всенародные очи! Ему не собрать народных рукоплесканий, ему не зреть признательных слез и единогодушного восторга взволнованных им душ; к нему не полетит навстречу шестнадцатилетняя девушка с закружившеюся головою и геройским увлечением; ему не позабыться в сладком обаянии им же исторгнутых звуков; ему не избежать, наконец, от современного суда, лицемерно-бесчувственного современного Ученого Совета, который назовет ничтожными и низкими им лелеянные созданья, отведет ему презренный угол в ряду исследователей, оскорбляющих человечество и религиозные чувства, придаст ему качества им же цитированных и критикуемых коллег, отнимет от него и сердце, и душу, и божественное пламя таланта. Ибо не признает Ученый Совет, что одни и те же уравнения могут описывать волны света, и волны звука, и волны на поверхности лазурного океана, что равно чудны нелинейные эффекты в стеклах, кристаллах и керамиках, в тонких оптических волокнах и в толстых образцах; не признает Ученый Совет, что высокий восторженный смех достоин стать рядом с высоким научным устремлением, и что целая пропасть между ним и кривляньем балаганного скомороха! Не признает сего Ученый Совет и все обратит в упрек и поношение непризнанному исследователю; без разделенья, без ответа, без участия, как бессемейный путник, останется он один посреди дороги. Сурово его поприще, и горько почувствует он свое одиночество. [5]

Философские упражнения о месте науки в человеческом знании [55, 56] также публикуются отдельно. Известный философ позапрошлого века Козьма Прутков указал, что нельзя объять необъятное. Чтобы в дальнейшем избежать, по возможности, длинных лирических отступлений, подобных приведенному выше, постараюсь сразу указать, что в этой Книге есть и чего в ней нет.

4 Что в книге есть

В книге предлагается общий подход для построения суперфункций и различные алгоритмы для их вычисления. Выбор алгоритма зависит от того, каковы стационарные точки передаточной функции (и есть ли у передаточной функции хоть какие-то стационарные точки) и какие свойства требуются от суперфункции.

Я рассказываю про свойства и поведение суперфункций и абель-функций. (После общения с германскими коллегами, я не могу подавить искушение писать такие слова слитно.) Для данной функции T , суперфункцией называется решение F уравнения

$$F(z+1) = T(F(z))$$

Функцию T я называю передаточной функцией. Абельфункцией я называю функцию, обратную от суперфункции. Через них выражаются нецелые итерации передаточной функции. В книге предлагаются способы их эффективного вычисления. Эффективного - значит, быстрого и с маленькой погрешностью. Например, при использовании арифметики `complex double`, суперфункции и абельфункции оцениваются примерно с 14 значащими цифрами, а комплексные карты этих функций могут строиться в реальном времени. Я грузю генераторы рисунков в ТОРИ <http://mizugadro.mydns.jp/t>; Читатели могут проверить их на компьютере.

По умолчанию, предполагается, что параметры имеют вещественные значения, а аргументы функций имеют комплексные значения. Однако, я больше физик, чем математик (хотя мои соавторы-физики обычно высказывают противоположное мнение), и для физических приложений вещественные значения аргументов и функций представляют особенный интерес. Поэтому графики функций при вещественных значениях аргумента тоже представлены. Я считаю, что такой вещизм оправдан прикладным и популярным характером этой Книги.

5 Что в книге нет

В Книге нет четких и аккуратных указаний значений, которые могут принимать параметры и аргументы функций. Такое исследование предлагается читателям в качестве упражнений.

Я стараюсь определять функции так, чтобы хотя бы окрестность положительной части вещественной оси попадала в область голоморфизма, но не всегда это возможно. Похоже, что это первая монография с описанием эффективного вычисления голоморфных суперфункций, и в ней неизбежен несколько эвристический стиль изложения. К сожалению, один из немногих чистых математиков – Генрик Траппманн, который шел рядом с рубанком, веником и совком, сметая грязь и превращая топорную работу плотника в математически строгое доказательство – занялся бизнесом, хотя его недавняя публикация [75], как мне кажется, заслуживает внимания.

В книге нет строгих доказательств сходимости, существования и единственности решений. Сюда не включены доказательства, выработанные в сотрудничестве с Генриком. Особо въедливым читателям предлагается скачать оригинальные статьи [50, 69, 63, 75], продрать себя сквозь дедукцию, выписанную с германской педантичностью Генрика, и задавать вопросы. Указания на ошибки, если таковые там есть, особенно приветствуются.

История развития теории суперфункций и функций Абеля начинается примерно с 19 века и может быть весьма интересна, но она выходит за рамки темы этой книги. Обзоры древних публикаций можно найти в интернете по ключевым словам **Abel function, iterated functions, tetration, superexponential, superfunction**. Искать лучше по английски, так как наука в РФ превратилась в искусство по “отмыванию” бюджета ⁵, и это отражается на качестве русскоязычных научных (и не очень) публикаций [71]. Настоящая книга является попыткой противопоставить этой тенденции русскоязычный пример того, что я называю термином “наука” [55, 56, 83, 84, 85]. А заодно показать коллегам, что не издательство красит Книгу, а

⁵http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/desciencer.shtml Уничтожение науки в РФ

Книга - издательство.

В книге нет подробного цитирования работ коллег, которые пытались вычислять суперфункции и абельфункции в течение последней пары веков. Чтобы понять, чем занимались на эту тему в прошлые века, можно посмотреть работы Генрика Нильса Абеля (Neils Henryk Abel) [3], Петера Фато (P. Fatou) [6], Хельмута Кнезера (Hellmuth Kneser) [10], Жана Екале (Jean Ecalle) [17], Г.Сзекереса (G.Szekeres) [11] и Петера Валкера (Peter Walker) [24]. Ещё обзоры публикаций по теме представлены в линках, перечисленных в приложении.

Я вижу аналогию с тем, что в современном учебнике географии не обязательно рисовать Землю на трех китах, плавающих в мировом океане. Читатель может счесть такую аналогию чересчур претензионной; однако, многочисленные методы вычисления суперфункций, предложенные коллегами, столь неэффективны, что с ними пока НИКОМУ не удалось построить комплексные карты этих функций. Судя по публикациям, с такими алгоритмами не построено ни одной, вообще ни одной карты тетрации. Генрик объясняет это тем, что у меня очень хороший графопостроитель `conto.cin`, который быстро и аккуратно проводит линии уровня, правильно интерпретируя разрезы области аналитичности и сингулярности...

Я считаю, что дело в удобном математическом представлении функций и эффективных алгоритмах, а не в графопостроителе. Поэтому в этой книге нет описания моего графопостроителя; его можно скачать из ТОРИ [81] или из Ситизендиума [82] и использовать, даже не зная, как он работает. Кроме того, если запастись терпением в стиле “to press a key, to have a tea” [41], то качественные графики можно строить и из Математики, или даже из Мапле, если примириться с тем, что придется корячиться с подробной сеткой, а размер файлов для комплексных карт будет существенно больше, чем при создании EPS файлов прямо из C++ процедурой “`conto.cin`” .

Аналогично, в книге нет кодов программ, использованных для вычисления функций и построения графиков. Во-первых, описания алгоритмов достаточно подробны, сами алгоритмы просты, и даже студент после одного семестра изучения какого-либо языка про-

граммирования, поддерживающего комплексную арифметику, может легко воспроизвести их. Во-вторых, никто не станет отцифровывать, перепечатывать из бумажного издания код, который можно скачать из интернета. Коды рисунков и программ, использованных в Книге, доступны в ТОРИ, Ситизендиуме и других сходных ресурсах. Поэтому, вместо текстов программ, я помещаю ссылки.

В книге нет последовательного изложения свойств уравнения Шрёдера. Мне не удалось построить пример, который бы решался с функциями Шрёдера

<http://mathworld.wolfram.com/SchroedersEquation.html>

https://en.wikipedia.org/wiki/Schroeder_equation

но не решался бы с суперфункциями.

В книге нет описаний “драконов” ⁶, то есть таких объектов, которые, вроде бы, и могли бы существовать, но почему-то их существования предъявить не удастся и комплексные карты для них тоже не построены. Драконоведение, как оно изложено в аннотации курса лекций, который с 2007 года (и, возможно, до сих пор) читает на Мехмате МГУ профессор всяческих наук, лауреат многочисленных наград и премий Андрей Николаевич Квашенко ⁷, не удовлетворяет Аксиомам ТОРИ, и поэтому в Книге не представлено. Впрочем, как только с помощью суперфункций, или ещё как, кто-либо предложит способ опровергнуть гипотезу о существовании драконов, эта гипотеза удовлетворит Аксиоме 3 (об опровержимости), и тогда я могу всерьез рассматривать даже такую гипотезу.

В отличие от драконологии, мои результаты, в принципе, опровергнуть можно. Для этого достаточно указать пример, в котором суперфункция, построенная описанными в Книге методами, не удовлетворяет передаточному уравнению (или дополнительным условиям, добавляемым для её единственности). Или построить две различные суперфункции, удовлетворяющие условиям, которые, по замыслу, должны обеспечить единственность. Или, хотя бы, предло-

⁶<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Category:Dragon>

⁷ <http://mmmf.msu.ru/lect/kvashenko.html> <http://mmmf.msu.ru/lect/lect9.html> Андрей Николаевич КВАШЕНКО. Драконы. 2007-2013

жить такую передаточную функцию, для которой нельзя построить суперфункцию методами, описанными в этой Книге. Пока мне не встретилась такая передаточная функция, для которой я бы не мог построить суперфункцию. Поэтому таких передаточных функций в этой Книге нет.

Многие, как и я, ещё с младенчества, предпочитают листать книжку и смотреть картинки, вместо того, чтобы читать текст. Поэтому я старался, чтобы каждая страница Книги была иллюстрирована хотя бы одним рисунком. Пока на некоторых страницах нет рисунков. Я надеюсь исправить это упущение в следующих изданиях.

Кроме того, в книге нет многих других примеров, которые, как мне кажется, можно рассмотреть аналогичным образом, но решения для которых мне не удалось найти в литературе. Однако, я старался собрать здесь все известные суперфункции, чтобы потом отдыхать (рис. 21.4) и на вопросы про итерации и суперфункции отвечать либо “Этого не знает никто”, либо “Это есть в моей Книге”.

Если всё-же какая-либо важная и красивая суперфункция ускользнула от великого и могучего гуглевского серча, то, пожалуйста, сообщите мне об этом. Тогда я постараюсь и её оприходовать, задействовав, если потребуется, всю мощь дарственного аппарата суперфункций, абельфункций, ТФКП и прочего матана.

Глава 2

Введение

Итерации и Суперфункции возникают в физике естественным образом при описании последовательности похожих преобразований чего-либо в однородной физической системе. Это может быть ослабление ударной волны в одной из последовательных секций автомобильного глушителя. Это может быть накопление массы снежным комом, который раз за разом скатывается с холма, покрытого липким снегом. Это может быть изменение интенсивности в световой волне при прохождении одной секции лазерного усилителя или просветляемого поглотителя. Простор для фантазии.

Если состояние системы до преобразования описывается параметром x , а после - параметром y , и эти две величины связаны соотношением $y = T(x)$, то функция T называется передаточной функцией. Можно рассмотреть постепенное изменение соответствующей величины от значения x к значению y , в зависимости от координаты, вдоль которой усилитель считается однородным. Эта зависимость называется суперфункцией от функции T . Такие суперфункции являются объектом исследования; им посвящена эта Книга.

В принципе, для каждого процесса последовательного применения одного и того же преобразования, можно строить физические модели, и сравнивать результаты измерений с предсказаниями модели. Это методически-корректный подход, и большинство коллег в каждом случае работает именно с моделями. При этом нет надобности восстанавливать что-либо по результатам измерений; достаточно обобщить, расширить модель вплоть до того, чтобы предсказывать,

какое показание следует ожидать от гальванометра или осциллоскопа или секундомера в том или ином случае. Методом перебора возможных моделей, задачу можно решать без всяких суперфункций. Однако это не единственный путь.

В физике известны также обратные задачи, когда модель какого-либо процесса неизвестна (или, наоборот, имеется столько моделей, что трудно примерять к результатам экспериментов каждую), и предлагается восстановить по результатам измерений характеристики системы, не предполагая какую-либо специфическую модель процессов в этой системе.

В этой Книге предполагается, что измерена передаточная функция системы, и по этой функции предлагается восстановить преобразование сигнала в системе. Чтобы рассматривать достаточно общий случай, такая система называется фильтром.

1 Фильтры и обозначения

С точки зрения физики, итерация описывает последовательную комбинацию фильтров. Пусть каждый фильтр характеризуется передаточной функцией (Transfer function) T . Если на входе фильтра имеется сигнал z , то сигнал на выходе фильтра будет $T(z)$.

В этой книге рассмотрен простой случай, когда сигнал выражается одним числом, вещественным или комплексным. В принципе, термин “передаточная функция” допускает обобщение на многомерный случай, тогда эта функция превращается в функционал; аргумент z мог бы иметь смысл вектора или функции. Как выяснилось, даже одномерный случай вызывает много недоумений и конфузов (некоторые примеры такого рода упомянуты в последующих главах).

Продвигать многомерные обобщения, пока коллеги сомневаются даже в одномерном случае, представляется методически некорректным. В соответствии с определением Науки [55, 83], сперва следует представить результаты по простейшему случаю, который всё ещё опровергает устоявшуюся точку зрения о том, что восстановление распределения сигнала внутри однородной нелинейной системы по

её передаточной функции невозможно [59, 60, 61, 64, 65]. Рассмотрение комплексных значений аргумента передаточной функции позволяет сузить класс возможных решений, и в этом смысле существенно важнее, чем рассмотрение многомерного сигнала. Поэтому в этой книге считается, что передаточная функция и её суперфункция определены для комплексных значений аргумента; кроме того, предполагается, что каждая из этих функций голоморфна в той области, которая требуется для рассмотрения.

Сигнал на выходе фильтра (например, усилителя) может быть подан на вход еще одного такого фильтра, и тогда сигнал на выходе второго фильтра будет

$$T(T(z)) = T^2(z) \quad (2.1)$$

Здесь используется обозначение с верхним индексом. Вальтер Бергвейлер (Walter Bergweiler) использовал такие обозначения ещё в прошлом веке [26]. Если после имени функции следует верхний индекс (и это не штрих, указывающий производную), то этот индекс указывает номер итерации функции. В частности, нулевая итерация есть идентичная функция (которая равна своему аргументу),

$$T^0(z) = z \quad (2.2)$$

Первая итерация от функции есть она сама, а минус первая итерация соответствует обратной функции. Например, для функции $T = \sin$,

$$\sin^{-1}(z) = \arcsin(z) \quad (2.3)$$

$$\sin^0(z) = z \quad (2.4)$$

$$\sin^1(z) = \sin(z) \quad (2.5)$$

$$\sin^2(z) = \sin(\sin(z)) \quad (2.6)$$

В некоторых учебниках используется (хотя и не декларируется) обозначение, в котором $\sin^a(z)$ имеет смысл $\sin(z)^a$. Такое обозначение приводит к путанице. Например, при $a = -1$, это выражение может указывать на $\arcsin(z)$, но может указывать также и на $\frac{1}{\sin(z)}$.

В этой Книге, число в верхнем правом индексе при имени функции указывает число итераций (или номер итерации), и никогда не

указывает степень, в которую следует возвести результат выполнения функции. Когда следует сперва вычислить синус числа z , а потом результат возвести во вторую степень, то это записывается как $\sin(z)^2$. Я надеюсь, что Читатель может отличить константу или переменную (или иное арифметическое выражение) в верхнем индексе от штриха, который обозначает дифференцирование, и путаницы не будет.

Иногда, при указании количества итераций, вместо $f^n(z)$ пишут $f^{\circ n}(z)$, по аналогии с использованием операции “кружочек” \circ в выражениях вроде $\sin(\sin(z)) = \sin \circ \sin(z)$. В этой Книге, верхний индекс после имени функции используется либо для указания производной, если это штрих, либо для указания количества итераций (если это не штрих). Поэтому символ “кружочек” не использован. В качестве оправдания для такой сокращенной записи можно напомнить, что в частном случае, когда число итераций равно минус единице, обратную функцию от f записывают в виде f^{-1} , и обычно не пишут $f^{\circ -1}(z)$. Разумеется, символ \circ может быть восстановлен добавлением команды `\circ` в латексную версию Книги в тех местах, где в формуле указано число итераций функции.

Выражения $f^n(z)$, $f(z^n)$ и $f(z)^n$ не должны конфузиться. В первом случае функция f итерируется n раз, во втором функция оценивается при значении аргумента z^n , а в третьем - функция вычисляется при значении аргумента z , а результат возводится в n -тую степень.

Идея этой Книги в том, что функция может итерироваться не обязательно целое число раз. Зависимость результата такого итерирования от числа итераций и есть суперфункция. Для физических приложений, особенно интересны случаи, когда такая суперфункция вещественно-голоморфна; то есть имеет вещественные значения по крайней мере вдоль некоторой части вещественной оси и допускает аналитическое продолжение в область комплексных значений аргумента; это соответствует комплексному числу итераций.

2 Гнездо

Для итераций в языке программирования “Математика” есть специальная функция, которую можно назвать “гнездо”, делая не слишком удачную кальку с английского слова Nest [80]. Впрочем, можно транслитерировать английское слово как “Нест” и склонять его в соответствии с обычаями русского языка: Нест, Неста, Несту, Нест, Нестом, о Несте. В некоторых текстовых редакторах при этом приходится подавлять поползновения автоматических корректоров заменить букву Н на букву М. Нест используется для итераций.

При использовании Неста требуется указать три аргумента. Первый аргумент указывает имя функции, которая итерируется. Вторым указывает начальное значение при итерациях, а последний, третий аргумент указывает число итераций. Обращение к Несту имеет следующий вид:

$$\text{Nest}[f, x, z]$$

В программировании на Математике, аргумент функции указывают в квадратных скобках; и такая запись обозначает выражение $f^z(x)$.

По крайней мере до 2014 года, имплементация Неста не позволяет использовать его в случаях, когда последний аргумент не выражается целой константой, натуральным числом. (Даже нулевая и минус первая итерация запрещены.)

Возникает естественный вопрос: “Какой смысл может иметь нецелая итерация функции?” Этот вопрос обсуждается в следующей секции.

3 Волоконный усилитель

Рассмотрим волоконный лазерный усилитель. Предположим, Изготовитель дает Физiku кусок активного оптического волокна длиной, скажем, один метр, и систему накачки, с тем, чтобы Физик узнал, как изменяется интенсивность света в волокне по мере усиления, но не разрешает разрезать волокно и смотреть, что там у него внутри; Физик лишь верит, что волокно однородно и равномерно освещено источником накачки. Для того, чтобы считать накачку равномерной, предположим, что используется схема поперечной накачки [31, 32, 33, 38]. Физик может измерить передаточную функ-

цию T этого волокна. На основе этой передаточной функции, Физик может сказать, какая будет передаточная функция у аналогичного двухметрового волокна. В предположении, что накачка доставляется вместе с волокном и поэтому её интенсивность не зависит от длины усилителя, передаточная функция двухметрового усилителя будет T^2 , трехметрового T^3 , четырехметрового T^4 , и так далее. Но какая будет при этом передаточная функция у волокна длины z метров при нецелом значении z ?

На языке “Математика”, такая функция могла бы выражаться в виде $T^z(x) = \text{Nest}[T, x, z]$. В современной реализации этого языка, последний аргумент должен быть выражен целым числом; иначе “Математика” выдает сообщение об ошибке!

Можно ли выразить нецелую итерацию передаточной функции в виде уравнения? Оказывается, это сделать можно, и такое уравнение представлено в следующей секции.

4 Передаточное уравнение

В этой Книге, передаточным уравнением (transfer equation) называется уравнение, которое указывает, как должен изменяться сигнал внутри фильтра (усилителя) с тем, чтобы сигнал на выходе выражался передаточной функцией от сигнала на входе. При переносе, передаче сигнала в усилителе на единичную длину, сигнал преобразуется функцией T :

$$F(z+1) = T(F(z)) \quad (2.7)$$

Здесь, как и в предыдущей секции, буквой T обозначена передаточная функция, z - координата, вдоль которой распространяется сигнал (усиливаемый свет, или звук, или ещё чего-нибудь эдакое), и функция F выражает зависимость сигнала от этой координаты. (В Лазерной Науке, сигналом называется усиливаемое излучение, иногда видимый свет, даже если никакая информация с этим излучением не передается.) Если длина усилителя не точно один метр, то без ограничения общности можно взять длину усилителя за новую единицу измерения. Решение F уравнения (2.7) называется супер-функцией по отношению к передаточной функции T . В соответствии

с Аксиомой ТОРИ номер 6, о простоте, я по умолчанию считаю, что и передаточная функция T , и суперфункция F голоморфны в той области, коротая требуется для рассмотрения.

Обратная функция, то есть $G = F^{-1}$, называется абельфункцией, или функцией Абеля, для передаточной функции T . Абельфункция $G = F^{-1}$ удовлетворяет уравнению Абеля

$$G(T(z)) = G(z) + 1 \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) получаются одно из другого заменой переменной. Читатели приглашаются проделать это несложное преобразование в порядке упражнения (или подсмотреть этот вывод в какой-нибудь Википедии [79]).

Уравнение (2.7) тоже иногда называют уравнением Абеля, и это может вызвать путаницу. Чтобы избежать путаницы, я называю соотношение (2.7) передаточным уравнением, и лишь уравнение, похожее на (2.8), - уравнением Абеля.

Решение F уравнения (2.7) я называю суперфункцией, а решение G уравнения (2.8) называю абельфункцией. В общем случае решения не единственны. Я выбираю решения так, что $F(G(z)) = z$ в некоторой области значений z ; обычно в некоторой окрестности вещественной оси или, хотя бы, в окрестности некоторого отрезка вещественной оси.

Вернемся к задаче об Изготовителе и Физике, упомянутой в предыдущей секции. Допустим, Физик у удалось найти решение F передаточного уравнения (2.7), имеющее физический смысл. Тогда он может построить абельфункцию $G = F^{-1}$ и выразить передаточную функцию усилителя произвольной длины z :

$$T^z(x) = F(z + G(x)) \quad (2.9)$$

Таким образом, решение задачи о восстановлении передаточной функции усилителя произвольной длины по передаточной функции T усилителя единичной длины сводится к нахождению подходящего решения F передаточного уравнения (2.7) и построению соответствующей обратной функции G . Тогда передаточная функция усилителя длины z выражается явным образом (2.9).

5 Множественность решений

Решение F уравнения (2.7) не единственно. Можно сузить множество решений, если выбрать значение функции F в нуле, то есть потребовать, чтобы

$$F(0) = F_0 \quad (2.10)$$

где F_0 есть фиксированная константа. Во многих случаях, эта константа не влияет на восстановление нецелой итерации передаточной функции по формуле (2.9) в том смысле, что при преобразовании

$$\tilde{F}(z) = F(z+x_0), \quad \tilde{G}(z) = G(z)-x_0 \quad (2.11)$$

и подстановке $F \rightarrow \tilde{F}$, $G \rightarrow \tilde{G}$ в уравнение (2.9), получаемое значение для нецелой итерации передаточной функции не меняется.

Однако даже после такого сужения, решение не становится единственным. Если F решение, то новое решение \tilde{f} можно построить по формуле

$$\tilde{f}(z) = F(z + \theta(z)) \quad (2.12)$$

где θ есть голоморфная периодичная функция с периодом единица. При $\theta(0) = 0$, даже условие (2.10) для суперфункции \tilde{f} сохраняется.

Неоднозначность указывает, что могут быть разные способы восстановления нецелой итерации передаточной функции. Поэтому многие думали, что нецелые итерации функций смысла не имеют. В частности, считалось [42], что не имеет смысла выражение $\sqrt{!} = \text{Factorial}^{1/2}$, означающее половинную итерацию от факториала. Это выражение используется в качестве эмблемы Физфака МГУ (см.рис. 2.1) с 1950 года, и было интересно придать ему четкий физический и математический смысл. Это удалось сделать только в 2009 году [51], когда был построен аппарат суперфункций.



Рис. 2.1: Значок Физфака МГУ и значок Мехмата

Воображение у математиков развито сильнее, чем у физиков. В частности, вопрос о математическом смысле нанизывания Мёбиуса на знак интеграла, напрашивающийся при взгляде на эмблему Мехмата (правая часть рисунка 2.1), до сих пор не имеет ответа. Возможно, значок Мехмата тоже приобретет смысл в ходе дальнейшего

развития суперфункций, когда потребуется новый вид контурного интеграла, в котором функция выворачивается наизнанку, и для его обозначения потребуется Мёбиус.

Проблема нахождения нецелой и, частности, половинной итерации передаточной функции возникает не только при феноменологическом рассмотрении идеализированного усилителя. Похожая задача возникает при анализе неустойчивости работы реактивного двигателя; в простейшем (одномерном) приближении, возникновение и исчезновение неустойчивости по сценарию Помо-Манневилля (Pomeau-Manneville scenario) [19, 43] описывается квадратичной передаточной функцией. Сходные уравнения используются при анализе устойчивости аттракторов [20]. По крайней мере для одномерных моделей, при этом можно построить абельфункцию и суперфункцию [57], и, соответственно, нецелые итерации передаточной функции.

Наблюдение сходства в построении суперфункций помогло сформулировать задачу о построении суперфункций, абельфункций и соответствующих нецелых итераций передаточной функции достаточно общим образом. Принципиальным для построения решения (то есть нахождения алгоритма для его вычисления с требуемой точностью) является выбор дополнительных условий, которые обеспечивают единственность этого решения.

6 Постановка задачи

Допустим, известна некоторая передаточная функция T , голоморфная в некоторой достаточно широкой области значений аргумента...

Какие дополнительные условия надо наложить на суперфункцию F (или на абельфункцию $G = F^{-1}$) для того, чтобы передаточное уравнение (2.7) (или уравнение Абеля (2.8)) имело единственное решение?

Как формулировать эти условия для того, чтобы это решение имело физический смысл?

Как вычислять суперфункцию и абельфункцию, удовлетворяющие сформулированным условиям?

Как проверить, то вычислена именно та функция, которая имеет

физический смысл?

Целью Книги являются ответы на такие вопросы, изложение этих ответов в максимально простой и подробной форме. По большей части, эти ответы являются упрощенным пересказом опубликованных ранее статей [44, 50, 52, 57, 54, 69, 78, 77, 74].

В следующей главе предложены примеры суперфункций и абель-функций, а в последующих главах разобраны общие алгоритмы их вычисления и применение к физическим задачам. Описание состояния физической системы с помощью одного параметра уже является сильным приближением, и хотя бы для этого случая желательно представить решение в простом и “точном” виде.

Для примеров хотелось бы использовать не сложные функции. Имеется некоторая терминологическая сложность в том, чтобы квалифицировать некоторые функции как не сложные для рассмотрения. Хотелось бы использовать привычное для физиков (и не только) прилагательное “простой”, однако в математике этот термин, применительно к функции, может означать еще, что функция измерима.¹ Таким образом, слова “не сложный” приходится писать отдельно, так как слово “простой” может иметь иной смысл. Примерно так же прилагательное “сухой”, применённое к вину или к Мартини, радикально меняет своё значение (см. рис. 2.2). Если Вы можете предложить ещё более простые (менее сложные, но всё ещё не тривиальные) примеры, дайте знать.



Рис. 2.2: Сухой Мартини

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Simple_function Простая функция в математике — это измеримая функция, заданная на некотором измеримом пространстве и принимающая конечное число значений.

Глава 3

Примеры суперфункций

Прежде чем вычислять суперфункции и абельфункции для каких попало передаточных функций, имеет смысл посмотреть, в каких случаях суперфункция и абельфункция могут быть представлены в виде несложной комбинации хорошо известных функций. Книга задумана как популярная, поэтому уместно начать с таких примеров. Они рассмотрены в этой главе. Эта глава может рассматриваться как продолжение введения: для анализа приведенных здесь примеров не требуется каких-либо специальных методов построения суперфункций.

В предыдущей главе суперфункция F для передаточной функции T определяется как решение уравнения (2.7)

$$F(z + 1) = T(F(z))$$

Чтобы не тянуть кота в долгий ящик, ниже предлагается таблица суперфункций, представленных в этой Книге; в последующих секциях и главах, свойства этих суперфункций рассмотрены более подробно.

1 Таблица суперфункций

В этой секции представлена таблица суперфункций. Есть аналогии между таблицей суперфункций и таблицей интегралов. Эта аналогия рассмотрена ниже.

Операция дифференцирования проще, чем операция интегрирования; по крайней мере в тех случаях, когда исходная функция выражена через несложную комбинацию специальных функций. Один

Таблица 3.1: Примеры суперфункций, $T(z) = f(1 + g(z))$

	$T(z)$	$f(z)$	$g(z) = f^{-1}(z)$	замечание
1	c	c	Не существует	
2	$z+1$	$b+z$	$z-b$	$b \in \mathbb{C}$
3	$b+z$	$bz+c$	$(z-c)/b$	$b \neq 0$
4	$bz+c$	$b^z + \frac{c}{1-b}$	$\log_b(z - \frac{c}{1-b})$	$b \neq 0, b \neq 1, [75]$
5	b^z	$\text{tet}_b(z)$	$\text{ate}_b(z)$	$[44, 50, 69]$
6	z^b	$\exp(b^z)$	$\log_b(\ln(z))$	$(4.20), b > 0, b \neq -1$
7	$-a^2/z$	$a \tan\left(\frac{2}{\pi}z\right)$	$\frac{2}{\pi} \arctan(z/a)$	$a > 0$
8	$\frac{z}{c+z}$	$\frac{1-c}{1-c^z}$	$\log_c\left(1 - \frac{1-c}{z}\right)$	$c \neq 0, c \neq 1$
9	$\frac{z}{1+z}$	$1/z$	$1/z$	$f=g; T^n(z) = \frac{z}{1+nz}$
10	$\ln(b+e^z)$	$\ln(bz)$	e^z/b	$b \neq 0$
11	$(a^b+z^b)^{1/b}$	$az^{1/b}$	$(z/a)^b$	$a > 0, b \neq 0$
12	$2z\sqrt{1-z^2}$	$\sin(\pi 2^z)$	$\log_2(\arcsin(z)/\pi)$	
13	$2z\sqrt{1+z^2}$	$\sinh(2^z)$	$\log_2(\ln(z + \sqrt{z^2+1})/\pi)$	
14	$2z^2-1$	$\cos(\pi 2^z)$	$\log_2(\arccos(z))$	
15	$2z^2-1$	$\cosh(\pi 2^z)$	$\log_2(\ln(z + \sqrt{z^2-1})/\pi)$	
16	$2z/(1-z^2)$	$\tan(2^z)$	$\log_2(\arctan(z))$	
17	$2z/(1+z^2)$	$\tanh(2^z)$	$\log_2\left(2 \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right)$	
18	$\text{Factorial}(z)$	$\text{SuFac}(z)$	$\text{AuFac}(z)$	$(8.9), (8.17) ; [51]$
19	$bz(1-z)$	$\text{LogisticSequence}_b(z)$	$\text{LogisticSequence}_b^{-1}(z)$	$(7.8), (7.19) ; [57]$
20	$\text{Doya}^t(z)$	$\text{Tania}(tz)$	$(z + \ln(z) - 1)/t$	$(5.12), (5.3)$
21	$\text{Keller}^t(z)$	$\text{Shoka}(tz)$	$\text{ArcShoka}(z)/t$	$(5.15), (5.19)$
22	$\sin(z)$	$\text{SuSin}(tz)$	$\text{AuSin}(z)/t$	$(13.8), [78]$
23	$z \exp(z)$	$\text{SuZex}(tz)$	$\text{AuZex}(z)/t$	$(12.1) [77]$
24	$z + \exp(z)$	$\text{SuTra}(tz)$	$\text{AuTra}(z)/t$	$(20.1) [77]$
	$P(T(Q(z)))$	$P(f(z))$	$g(Q(z))$	$P(Q(z)) = z$

из моих учителей квантовой механики, Владимир Кривченков (и, вероятно, не он первый) говорил, что дифференцировать можно научиться даже обезьяну, но с интегрированием труднее. В ту эпоху задача считалась решенной, если решение удавалось выразить в виде формулы, которую можно найти в Градштейне-Рыжике; так называлась большая толстая черная книга “Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений” [13]. Тогда еще не было настольных компьютеров, умеющих дифференцировать и интегрировать, и такая книга была одним из основных инструментов любого серьезного исследователя. Составление таблиц интегралов было важным, трудным (и, вероятно, нудным) делом.

Одним из способов составления таблицы интегралов является составление таблиц производных. Берется абы-какая несложная комбинация известных специальных функций и дифференцируется. Если результат удастся упростить настолько, что его можно уместить на одной строчке таблицы, то он декларируется как интегранд, который “удалось проинтегрировать”, а исходная “абы-какая несложная комбинация” декларируется как результат интегрирования; такой интегранд и такой “результат” заносятся в таблицу.

Аналогично можно поступать и с суперфункциями. Берётся абы-какая несложная комбинация f специальных функций и обращается. Если $g = f^{-1}$ удастся представить в виде несложной комбинации специальных функций (результат умещается в ячейке таблицы), и если при этом в ячейке таблицы умещается выражение

$$T(z) = f(1 + g(z)) \quad (3.1)$$

то функция T декларируется как *передаточная функция*, для которой удалось построить суперфункцию и абельфункцию и заносится в первый столбец таблицы; функция f декларируется как построенная для этой T суперфункция, а функция g декларируется как соответствующая абельфункция.

Таким образом получена таблица 3.1, но туда добавлены еще некоторые функции, построение которых описано в последующих главах. Если свойства функции известны, то есть известны её область голо-

морфизма и асимптотические разложения, и имеется эффективный алгоритм для её вычисления, то функция считается специальной; в этом случае, вместо громоздкого представления, в таблице суперфункций достаточно указать имя этой функции.

Таблица суперфункций – это базовый набор инструментов для вычисления нецелых итераций. Поэтому эта таблица выделена в особую главу. В последующих главах рассказывается, как вычислять суперфункции и абельфункции таблицы 3.1.

2 Построение элементарных суперфункций

В этой секции рассказано, как получены первые строчки таблицы 3.1. Для поиска “подходящих” триад (передаточная функция, суперфункция, абельфункция) использован сортвер Mathematica. В качестве примера, ниже показано, как получена и проверена 12я строка таблицы.

```
f[z_] = Sin[Pi 2^z]
g[z_] = Log[ArcSin[z]/Pi]/Log[2]
f[g[z]]
T[z_]=2 z Sqrt[1 - z^2]
Simplify[T[z] - f[1 + g[z]]]
```

В языке Mathematica, аргумент функции всегда указывается в квадратных скобках. Каких-либо иных, специфичных для Математики, трюков при этом не использовано, так что перевод такого кода на другие языки прост. Я надеюсь, что каждый может легко запрограммировать элементарные суперфункции из таблицы 3.1, и поэтому здесь не привожу их графики.

Аналогичный поиск суперфункций проводился также с софтвером “Maple”. Целью была проверка на буги софта “Математика”, а также надежда, что канадский Клен выявит какие-нибудь новые несложные пары (f, g) , пропущенные американской программой. Несколько буггов программы “Matematica” были выявлены, сообщены администраторам Вольфрама и уже исправлены в текущей версии Мате-

матики, но новых элементарных суперфункций обнаружить не удалось. Я буду признателен коллегам, которые укажут новые, уместящиеся в одной строчке таблицы триады (T, f, g) элементарных функций.

Для элементарных суперфункций из таблицы 3.1, проверка может быть проведена и без компьютера, с карандашом и бумагой; для этого достаточно знания математики в программе общеобразовательной школы. Судя по запуску в 2008 году на околоземную орбиту спутника “Юбилейный” с вечным двигателем на борту, в России даже министры не знают элементарных вещей, поэтому стараюсь ориентироваться на самый базовый уровень читателей.. Если Вы не можете воспроизвести какую-либо формулу их Книги, то Вам надо обратиться ко мне за помощью. Я буду благодарен читателям, которые найдут и укажут мне на ошибки, и, в частности, в таблице 3.1, если они там есть.

В таблице 3.1 собраны лишь самые простые из суперфункций. С помощью последней строчки таблицы, эти функции могут быть модифицированы. Любая пара взаимно-обратных функций P и Q определяет преобразование, которое может применяться к предыдущим строчкам, давая новые передаточные функции и соответствующие суперфункции и абельфункции.

Несложное масштабирование связывает квадратичную передаточную функцию в 14й и 15й строках таблицы с логистическим оператором (logistic operator) в 19 строке, если параметр $b=4$; в этом случае логистическая последовательность выражается элементарной функцией и её обобщение на случай нецелых значений аргумента тривиально. С помощью аппарата суперфункций, такое континуальное обобщение логистической последовательности возможно и при иных значениях параметра [57].

Частным случаем преобразования суперфункции является сдвиг её аргумента на константу. В некоторых случаях трудно распознать такой сдвиг: например, суперфункции в 14й и 15й строчках таблицы соответствуют одной и той же передаточной функции $T(z)=2z^2-1$; и эти суперфункции получаются одна из другой трансляцией аргу-

мента на константу $i\pi \ln(2)/2$. Сходные соотношения имеют место и для других суперфункций. Для суперфункций от экспоненты по основанию b при $1 < b < \exp(1/e)$ [50], этот случай рассмотрен в Девятой главе.

Аналогично, новые расширения таблицы суперфункций можно строить преобразованиями уже представленных в ней функций. Формулы для такого преобразования представлены в последней строке таблицы 3.1.

3 Имплементация суперфункций

В простых случаях, имплементации суперфункций и абельфункций тривиальны; их представления через элементарные функции могут быть запрограммированы “как есть”. Для более сложных случаев, особенно для комплексного аргумента, следует позаботиться о том, как пройдут линии разреза области голоморфизма. Я стараюсь, чтобы разрезы были прямыми и шли параллельно оси абсцисс в направлении убывания абсцисс, хотя не всегда это возможно.

Для эффективной имплементации суперфункций, приходится сшивать, склеивать несколько аппроксимаций. К представлению, применимому вблизи вещественной оси, приклеиваются представления, адекватные при значительных значениях мнимой части аргумента. Или к представлению, эффективному при больших отрицательных значениях вещественной части аргумента, приклеивается представление, полученное с помощью передаточного уравнения. Если клей хорош, то не только значения функции, но и значения всех её производных оказываются непрерывными, и можно говорить о том, что аппроксимирована голоморфная функция. Когда погрешность такой аппроксимации можно уменьшать до любого требуемого значения, можно говорить, что построена точная суперфункция.¹

¹ Задача математика, собирающего представления голоморфной функции, проще, чем задача хирурга, к которому привезли руки, ноги, животы и головы пассажиров и экипажа самолета, сбитого террористами, и предложили собрать их них несколько сот живых граждан. По крайней мере, кусочки функций можно начинать склеивать сразу, не дожидаясь, пока их выкупят у террористов, сбивших самолет.

Глава 4

Элементарные суперфункции

Для того, чтобы использовать суперфункции, рассмотренные в этой главе, вовсе не обязательно знать, что они являются суперфункциями. Примерно так же герой Мольера, Журден использует в разговорной речи прозу, и ему до поры нет надобности знать, что он говорит прозой [2]. Однако как только появляется поэзия, для того, как он говорит, нужен специальный термин “проза”. Аналогично, для того, чтобы объяснить свойства нетривиальных суперфункций, мне сперва приходится рассказать о свойствах тривиальных. Таким суперфункциям посвящена эта глава.

В начальной школе, изучение функций начинают с линейной функции. Это достаточно простой случай. Чтобы коллеги не говорили, что формализм суперфункций слишком сложен, мне приходится начинать именно с линейной функции. Приметы итераций линейной функции рассмотрены в следующей секции.

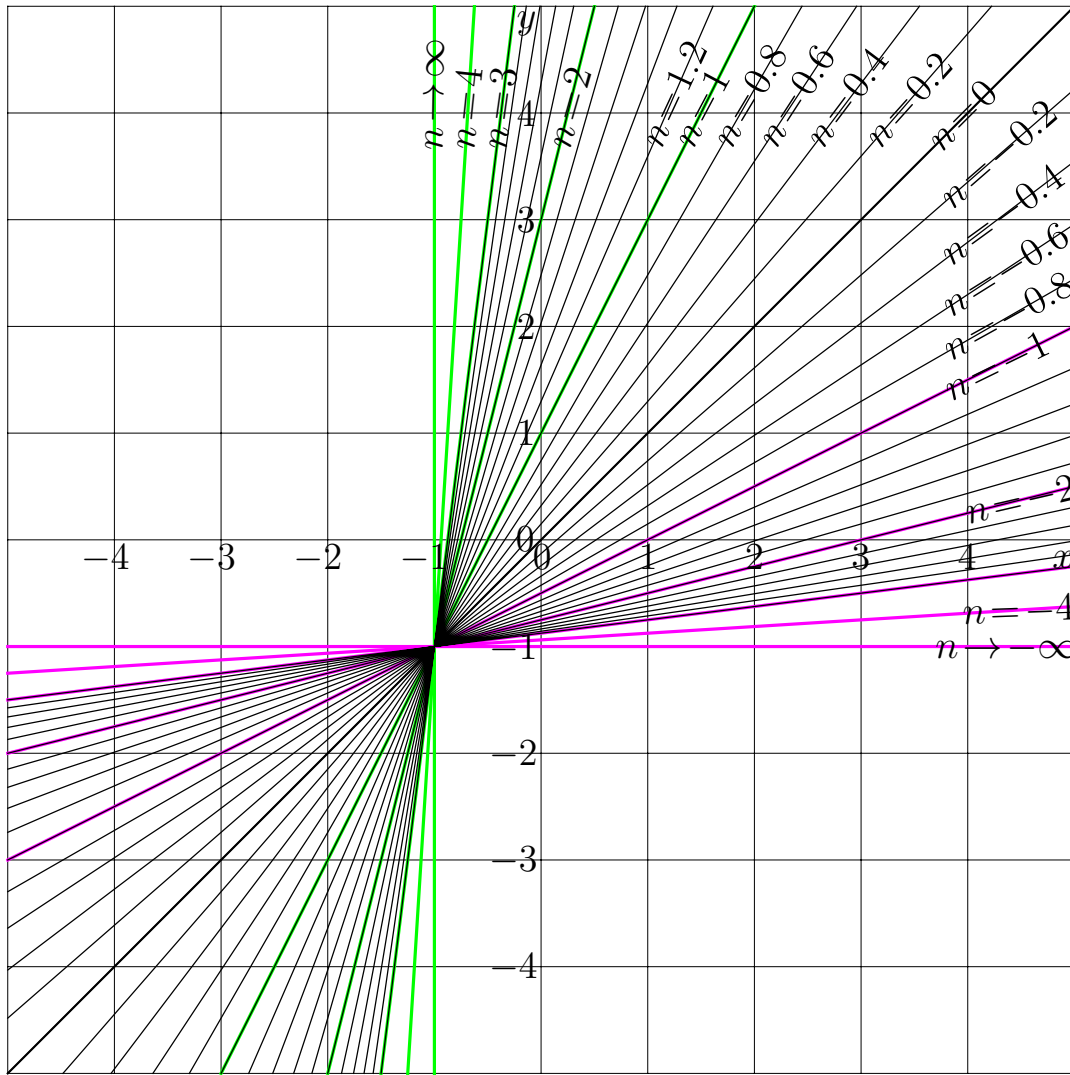
1 Итерации линейной функции

Рассмотрим передаточную функцию

$$T(z) = A + Bz \quad (4.1)$$

Пример такой функции показан на рисунке 4.1 для $A = 1$, $B = 2$. График $y = T^n(x)$ построен для различных значений n . Проведены также линии, соответствующие плюс бесконечной (вертикальная прямая) и минус бесконечной (горизонтальная прямая) итерациям. Энная итерация функции T может быть представлена в таком виде:

$$T^n(z) = A \frac{B^n - 1}{B - 1} + B^n z \quad (4.2)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Itelin125T.jpg>

Рис. 4.1: Итерации линейной функции (4.1) при $A=1$, $B=2$; проведены линии $y=T^n(x)$ для различных n

Именно это представление использовано для генерации рисунка 4.1.

Все графики на рисунке представляют собой прямые линии, пересекающиеся в точке (L, L) координатной плоскости. Стационарная точка (fixed point) L функции T , определенной формулой 4.1, задается уравнением $A + BL = L$, то есть

$$L = A/(1 - B) \quad (4.3)$$

При $B \rightarrow 1$, стационарная точка убегает на бесконечность, и графики итераций становятся параллельными прямыми. Для $A=1$, $B=2$, получается значение $L=-1$, поэтому линии на рисунке 4.1 пересекаются в точке $(-1, -1)$. Представление (4.2) можно получить также по общей формуле (2.9) с суперфункцией

$$F(z) = A \frac{1 - B^z}{1 - B} \quad (4.4)$$

и абельфункцией

$$G(z) = \log_b \left(1 + \frac{B-1}{A} z \right) \quad (4.5)$$

В частном случае $B = 1$, передаточная функция не имеет стационарных точек, и представления (4.2), (4.4), (4.5) не применимы. Для этого случая, то есть $T(z) = A + z$, суперфункция и абельфункция могут быть записаны так:

$$F(z) = Az, \quad G(z) = z/A \quad (4.6)$$

их комбинация дает

$$T^n(z) = F(1 + G(z)) = A(n + z/A) = An + z \quad (4.7)$$

Это упражнение доступно даже школьнику, и пусть его проделает тот, кто считает, что “формализм суперфункций слишком сложен”.

Для линейной передаточной функции (4.1), использование суперфункции (4.4) и абельфункции (4.5) соответствует термину “Стрелять из пушки по воробьям” (рис. 4.2). Однако этот пример показывает, как работают в паре суперфункция и абельфункция.



Рис. 4.2: Из пушки по воробьям

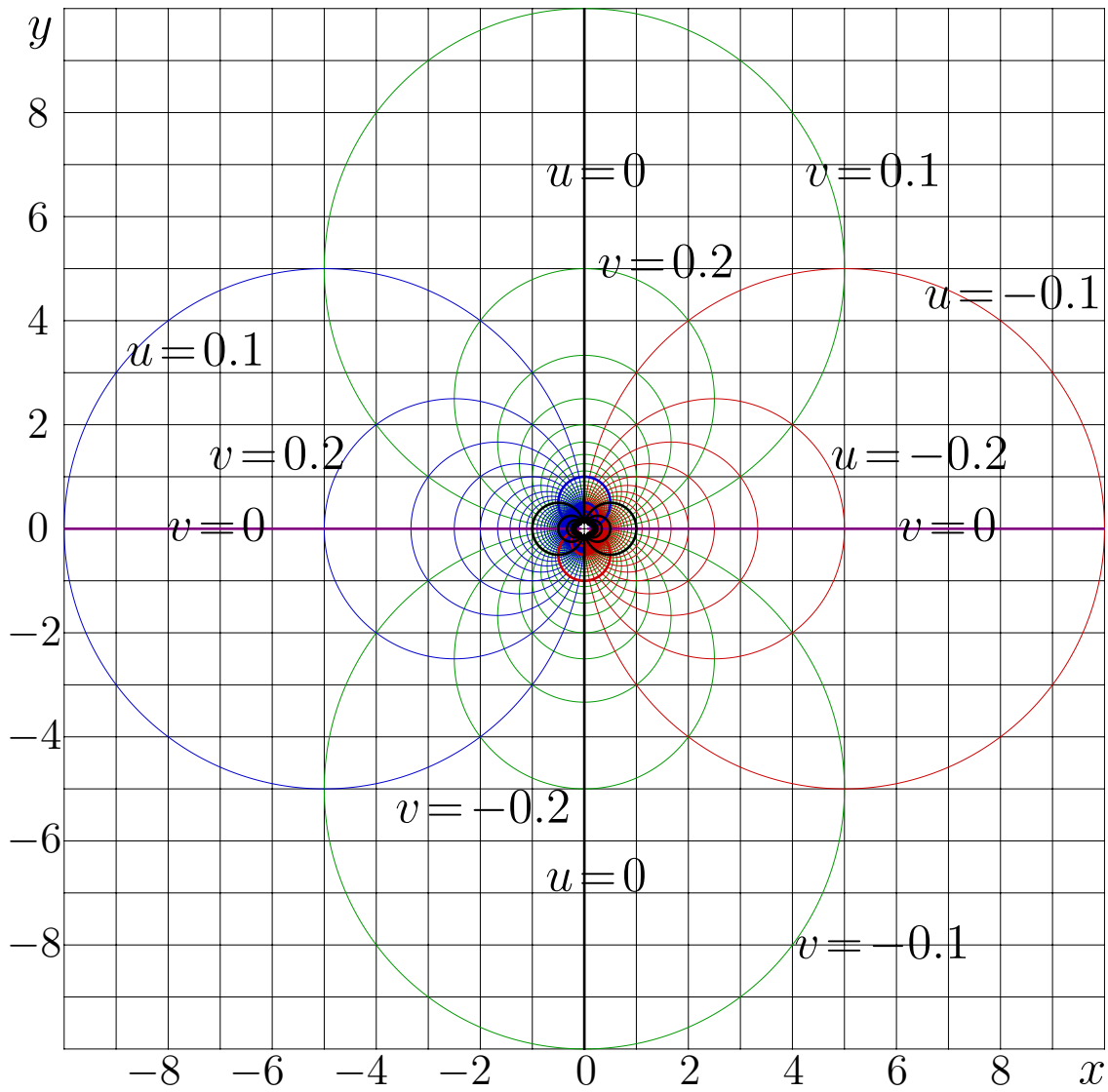
2 Рациональная функция

Обобщением линейной функции является дробно-линейная функция. Она же называется “рациональная функция”. Как пример, на рисунке 4.3 показана карта функции

$$T(z) = -1/z \quad (4.8)$$

Для такой функции, уровни постоянной вещественной части и уровни постоянной мнимой части суть окружности, и все эти окружности проходят через начало координат.

Для вещественного аргумента, итерации этой функции показаны на рисунке 4.4. Передаточная функция по формуле (4.8) интересна тем, что она самоинверсна (self-inverse), $T^{-1} = T$. Например, на рисунке



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:F1xmapT.jpg>

Рис. 4.3: $u+iv=T(x+iy) = 1/(x+iy)$

4.4 нет специальной кривой, соответствующей $n = 2$: она совпадает с прямой $y = x$. Ниже я рассказываю, как вычисляются такие итерации и как строятся эти рисунки.

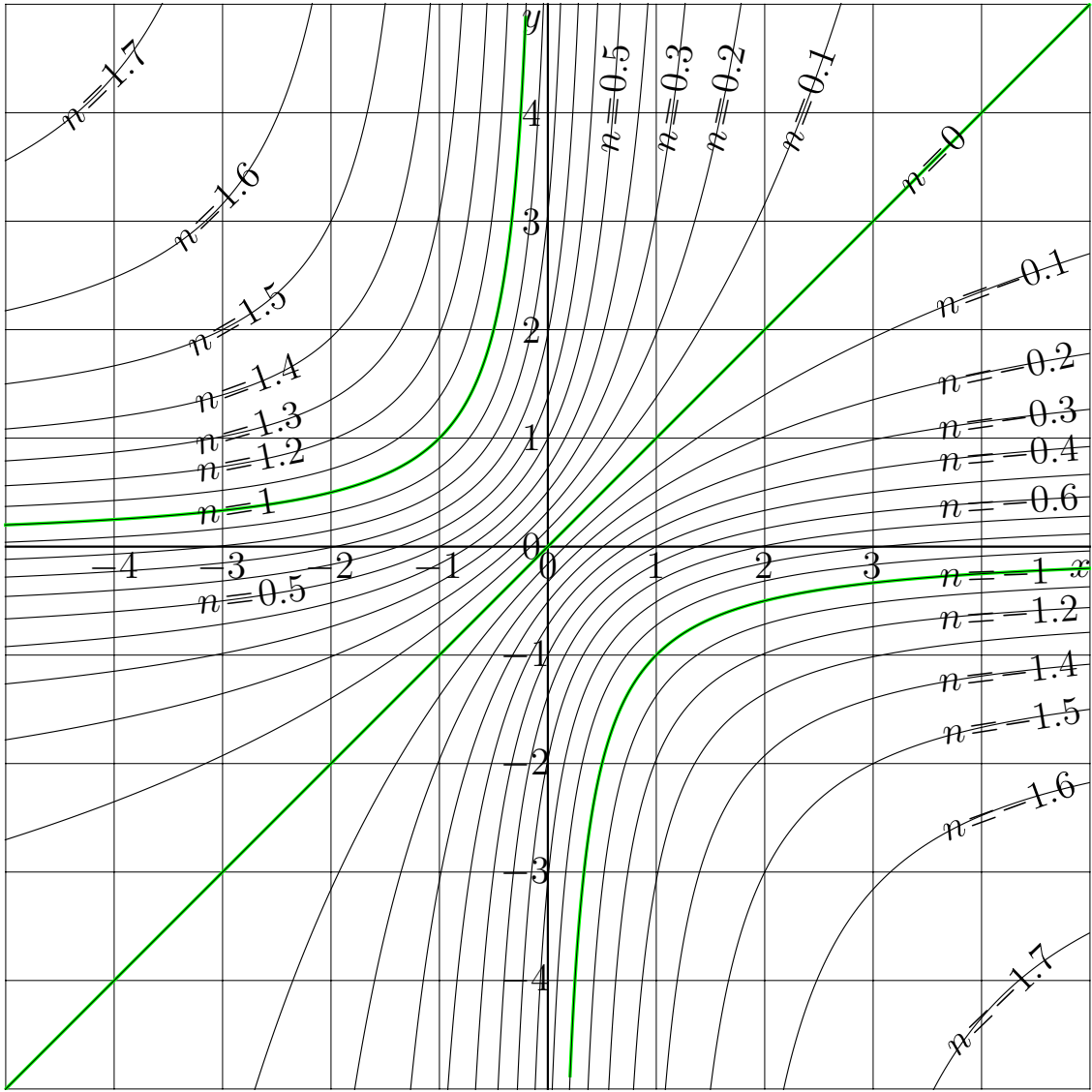
Нетрудно рассмотреть даже чуть более общий случай. Пусть

$$T(z) = -a^2/z \quad (4.9)$$

где a есть константа. Для $a = 1$, комплексная карта такой передаточной функции представлена на рисунке 4.3. Итерации этой функции показаны в правой части рисунка 4.4.

Для передаточной функции по формуле (4.9), суперфункция может быть записана в виде

$$F(z) = a \tan\left(\frac{\pi}{2}z\right) \quad (4.10)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Frac1zt.jpg>

Рис. 4.4: $y = T^n(x)$ для функции $T(z) = -1/z$ при различных n

а соответствующая Абельфункция

$$G(z) = F^{-1}(z) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{z}{a} \right) \quad (4.11)$$

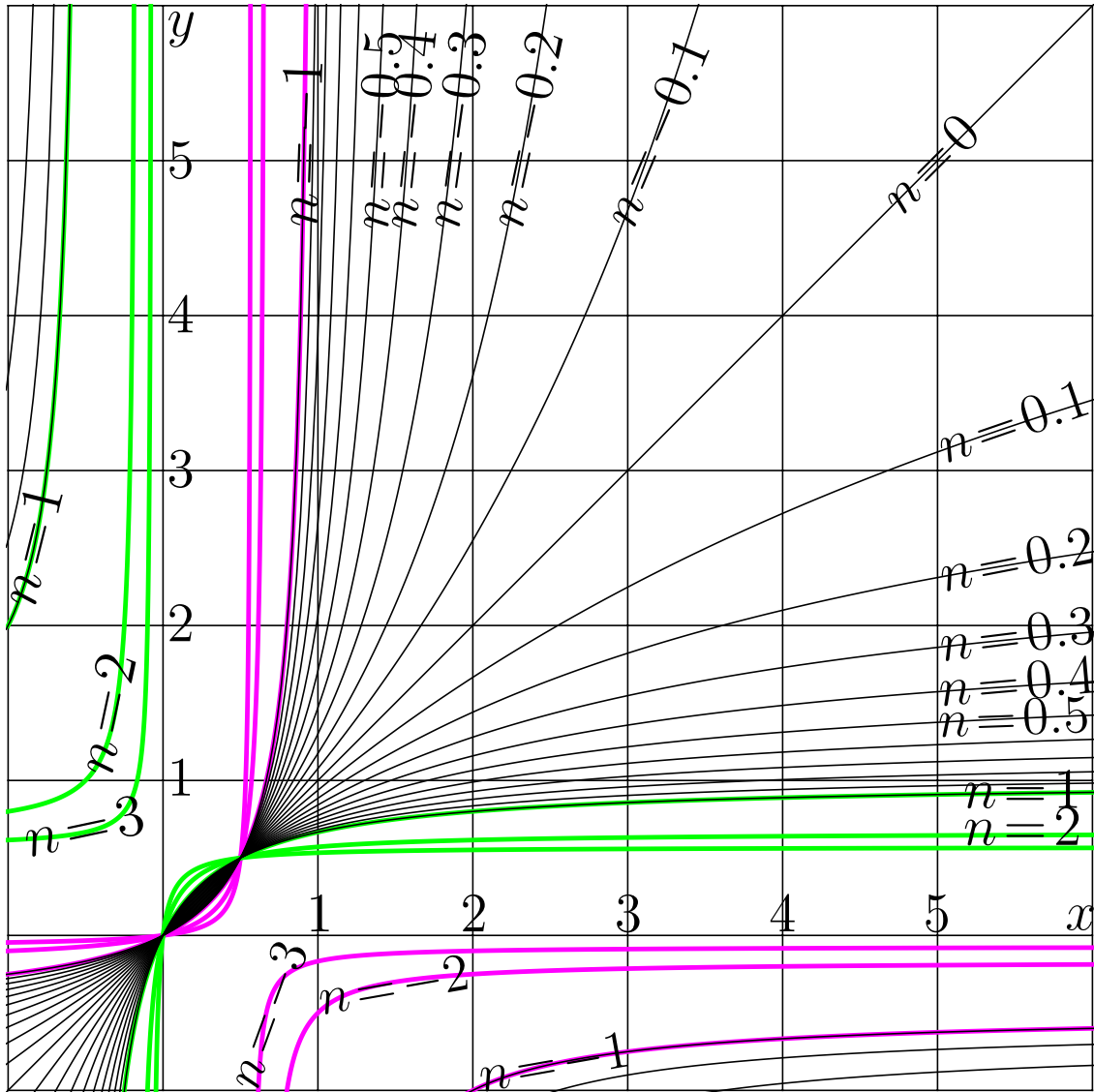
При этом n ная итерация записывается в виде

$$T^n(z) = \frac{-a^2 - a \cot \left(\frac{\pi}{2} n \right) z}{-a \cot \left(\frac{\pi}{2} n \right) + z} \quad (4.12)$$

Суперфункция и абельфункция для такой передаточной функции представлены в седьмой строчке таблицы 3.1. При $a = 1$, такое представление может использоваться для рисунка 4.4.

Дробно-линейная функция общего вида может выглядеть так:

$$T(z) = \frac{U + Vz}{W + z} \quad (4.13)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Fracit05t150.jpg>

Рис. 4.5: $y = t^n(x)$ для (4.14) при $c = 0.5$

где U , V и W суть параметры. Случай линейной функции, рассмотренный в предыдущей секции, может быть получен как предельный переход $W \rightarrow \infty$ при постоянных значениях U/W и V/W .

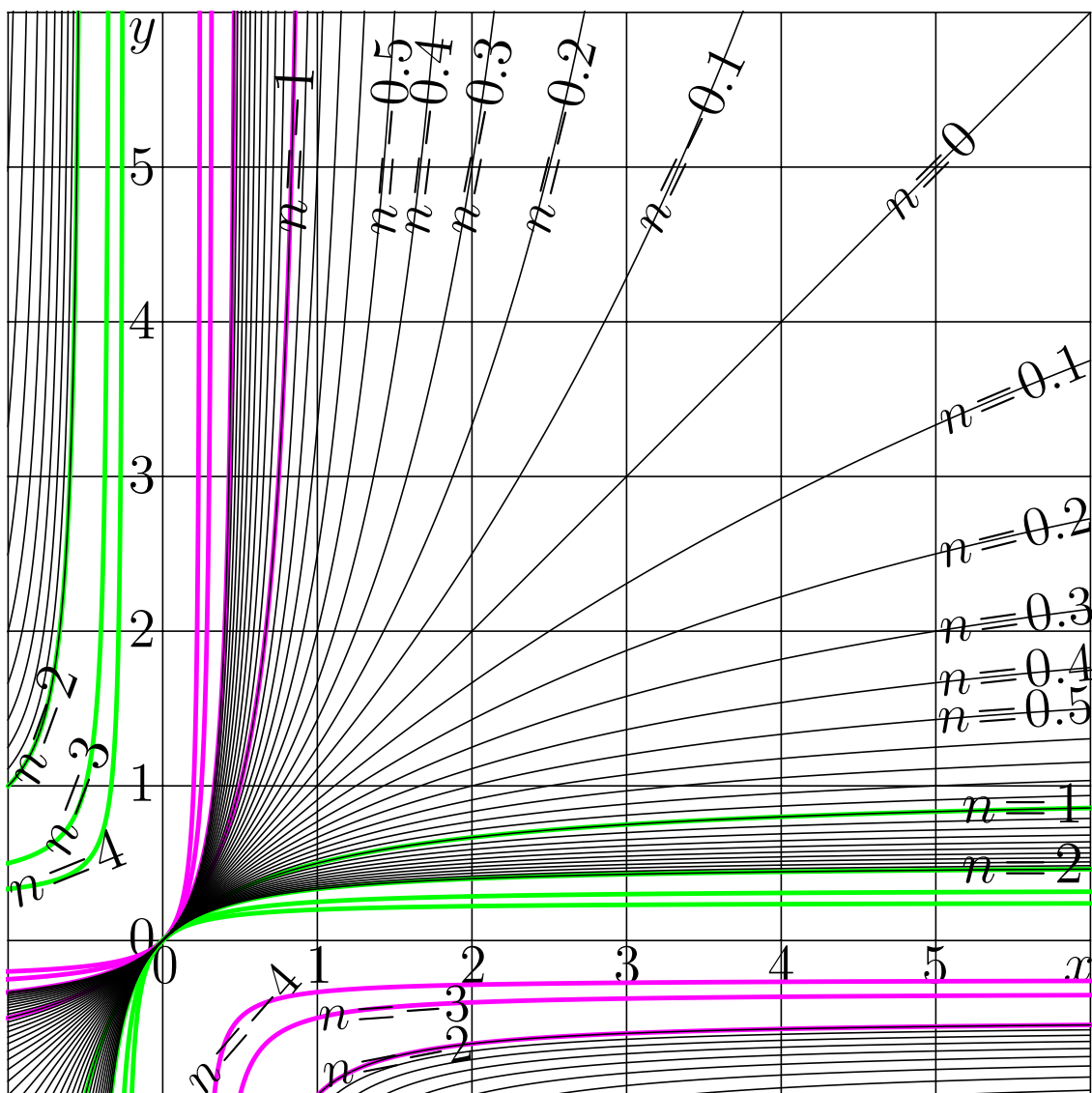
Функция по формуле (4.8) получается при $U = -1$, $V = 0$, $W = 0$.

Предложу ещё пример передаточной функции, тоже специальный случай формулы (4.13). Пусть

$$t(z) = \frac{z}{c + z} \quad (4.14)$$

тогда

$$t^n(z) = \frac{z}{c^n + \frac{1-c^n}{1-c}z} \quad (4.15)$$



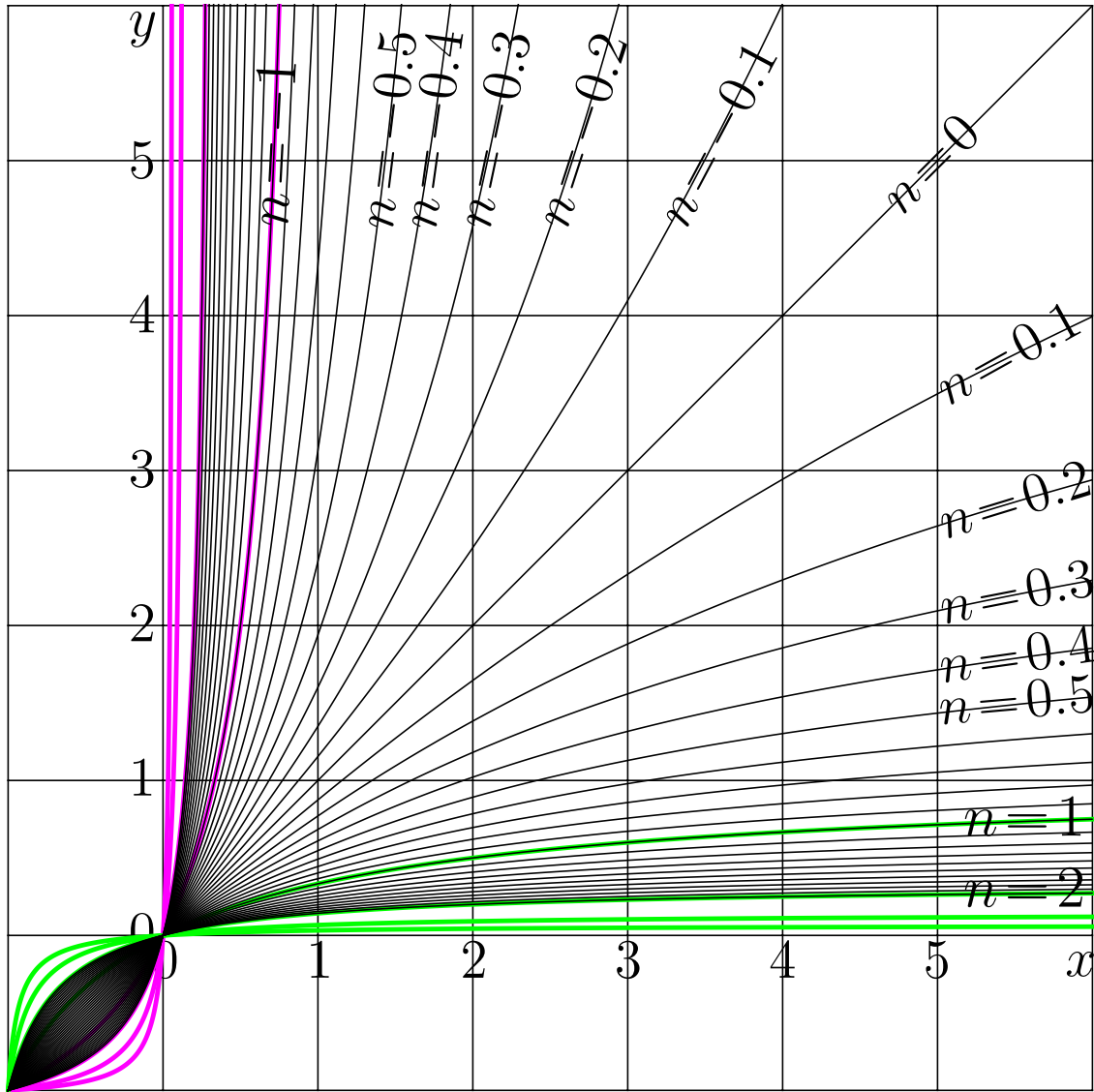
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Fracit10t150.jpg>

Рис. 4.6: $y = t^n(x)$ для (4.14) при $c = 1$

Для $c = 0.5$, итерации функции t показаны на рисунке 4.5. Аналогичным образом, итерации функции f по формуле (4.15) для $c = 1$ показаны на рисунке 4.6, а для $c = 2$ такие итерации показаны на рисунке 4.7. Я выделил целые итерации толстыми линиями; иначе, по рисунку, эта “целостность” не видна. Такое свойство типично для итераций вещественно-голоморфных возрастающих функций: их итерации выглядят столь же естественно, как и сами функции.

Для передаточной функции t в виде (4.14), суперфункция f может быть выбрана так:

$$f(z) = \frac{c - 1}{c^z - c} \quad (4.16)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Fracit20t150.jpg>

Рис. 4.7: $y = t^n(x)$ для (4.14) при $c=2$

Соответствующая абельфункция $g = f^{-1}$ записывается так:

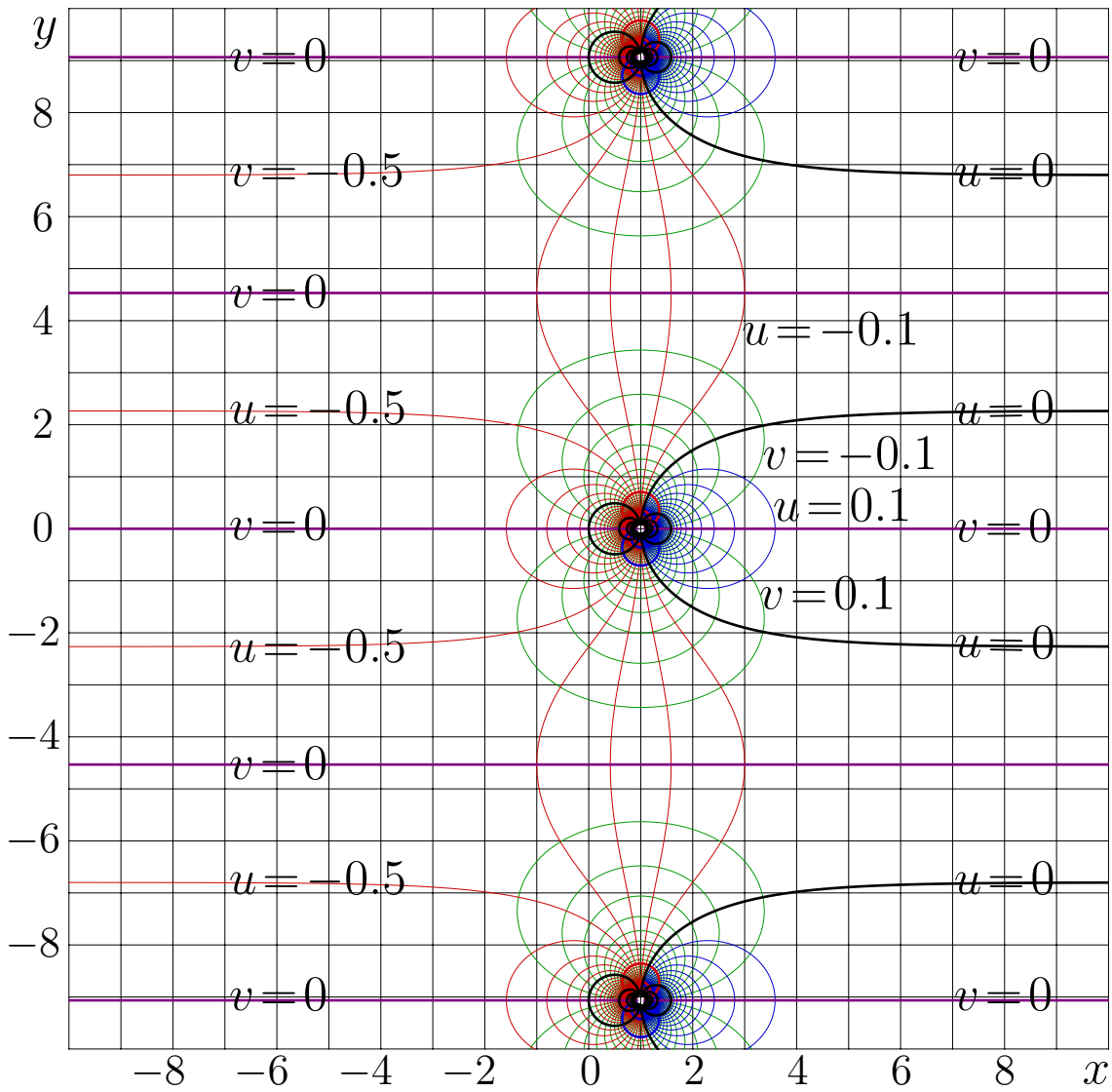
$$g(z) = \log_c \left(1 + \frac{c-1}{z} \right) \quad (4.17)$$

Для значения $c=2$, комплексная карта суперфункции f по формуле (4.16) показана на рисунке 4.8. Аналогичная карта соответствующей абельфункции g показана на рисунке 4.9.

Функция f по формуле (4.16) периодична; её период

$$P = 2\pi i / \ln(c) \quad (4.18)$$

При $c=2$, этот период $P = 2\pi i / \ln(2) \approx 9.06472 i$; на рисунке 4.8 уместилось чуть больше двух периодов. Для вещественных значений параметра c , период P чисто мнимый; структура линий на рисунке 4.8 воспроизводится при трансляциях на $|P|$ вдоль оси y .



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Fz2z1mapT.jpg>

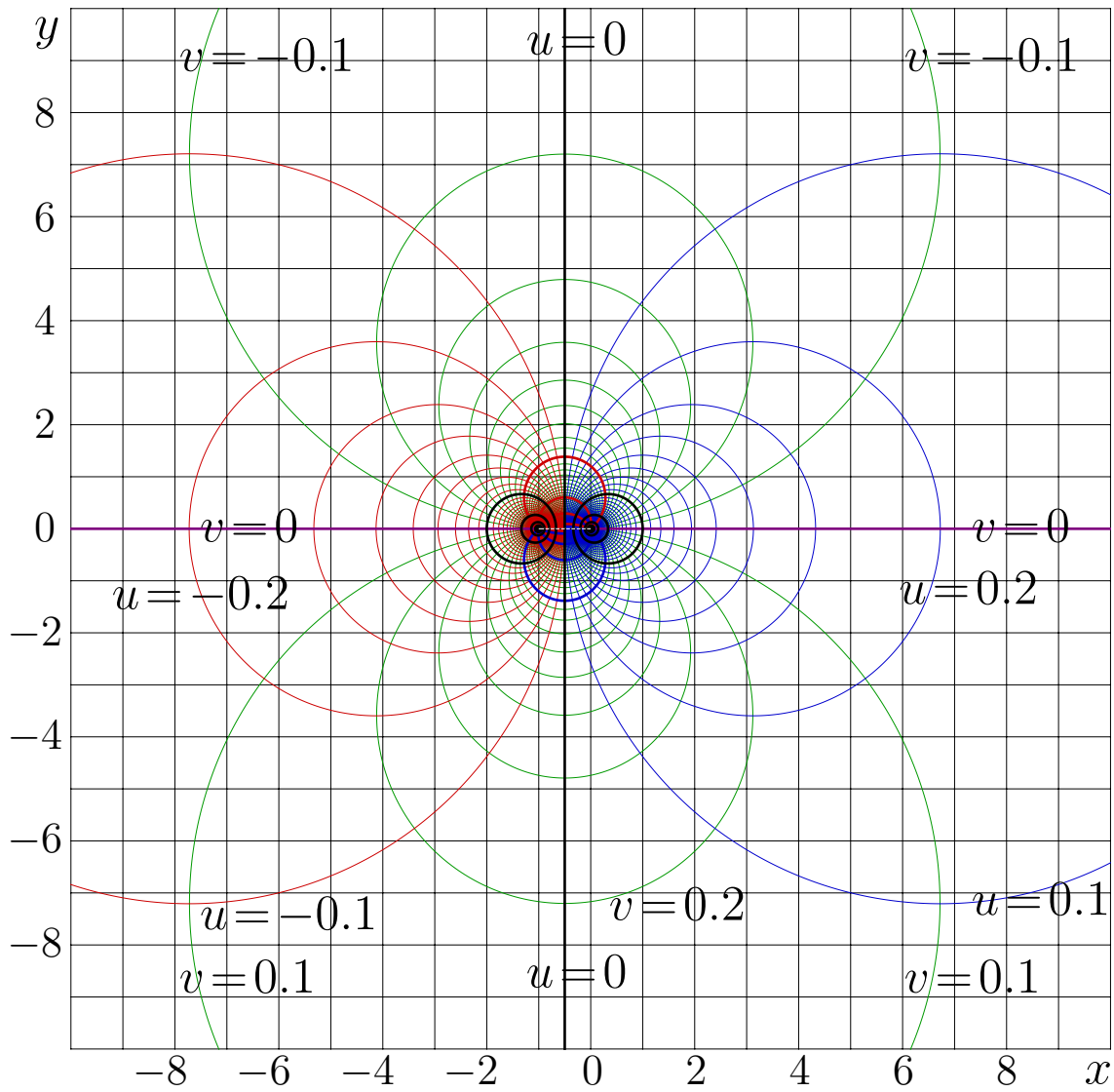
Рис. 4.8: $u+iv = f(x+iy)$ по формуле (4.16) при $c=2$

Обратная функция $g = f^{-1}$, то есть абельфункция по формуле (4.17) имеет линию разреза между точками ветвления. Эти точки суть $c-1$ и ноль. Для вещественных значений c , эта линия разреза лежит на вещественной оси. Линии на рисунке 4.9 симметричны по отношению к отражению относительно прямой $\Re(x) = (c-1)/2$.

С суперфункцией f и абельфункцией g по формулам (4.16) и (4.17), итерации передаточной функции t могут быть записаны как обычно,

$$t^n(z) = f(n + g(z)) \quad (4.19)$$

Читатели приглашаются проверить, что такое общее представление согласуется со специальным выражением (4.15). Лучше начинать делать такие проверки для формул этой главы, поскольку для функций последующих глав это чуть сложнее.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Gz2z1mapT.jpg>

Рис. 4.9: $u+iv = g(x+iy)$ по формуле (4.17) при $c=2$

Рисунки этой секции достаточно элементарны. Тем не менее, я приглашаю Читателей стащить и воспроизвести их; возможно, с несколькими иными значениями параметров.

Для читателей, которые интересуются суперфункциями, полезно проверить, что $t^{1/2} \circ t^{1/2} = t$, или что $t^{1/3} \circ t^{1/3} \circ t^{1/3} = t$ или ещё что-нибудь такое, что могло бы уличить меня, если я в чем-то ошибся. Требование опровержимости (Аксиома ТОРИ номер 3) предложено вовсе не для того, чтобы им восхищаться и любоваться, а для того, чтобы применять по мере изучения и развития наук.

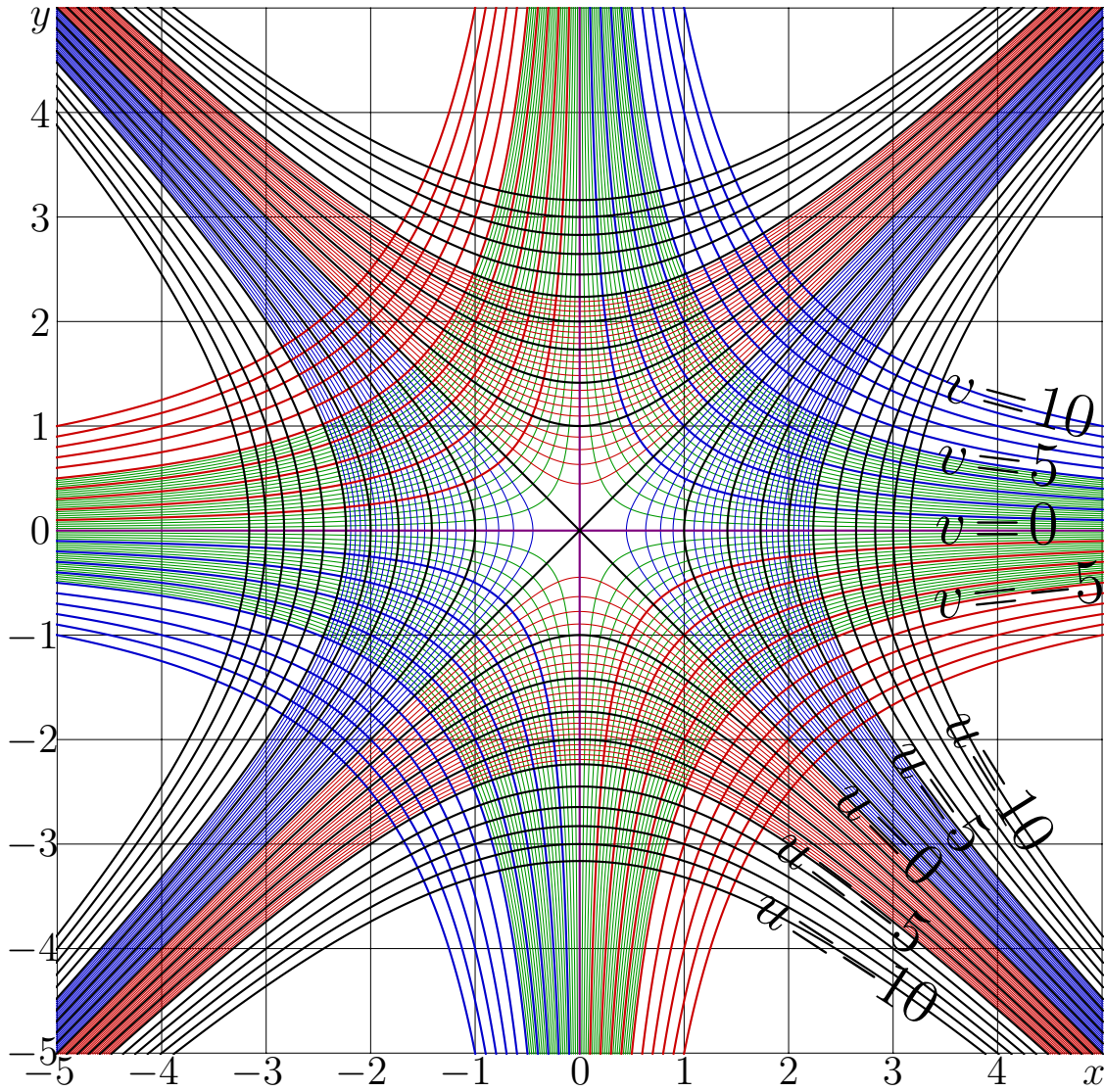


Рис. 4.10: $u+iv = T(x+iy) = (x+iy)^2$, формула (4.20) для $a=2$

3 Итерации возведения в степень

В этой секции рассмотрена функция “возведение в степень”, то есть

$$T(z) = \text{Pow}_a(z) = z^a \quad (4.20)$$

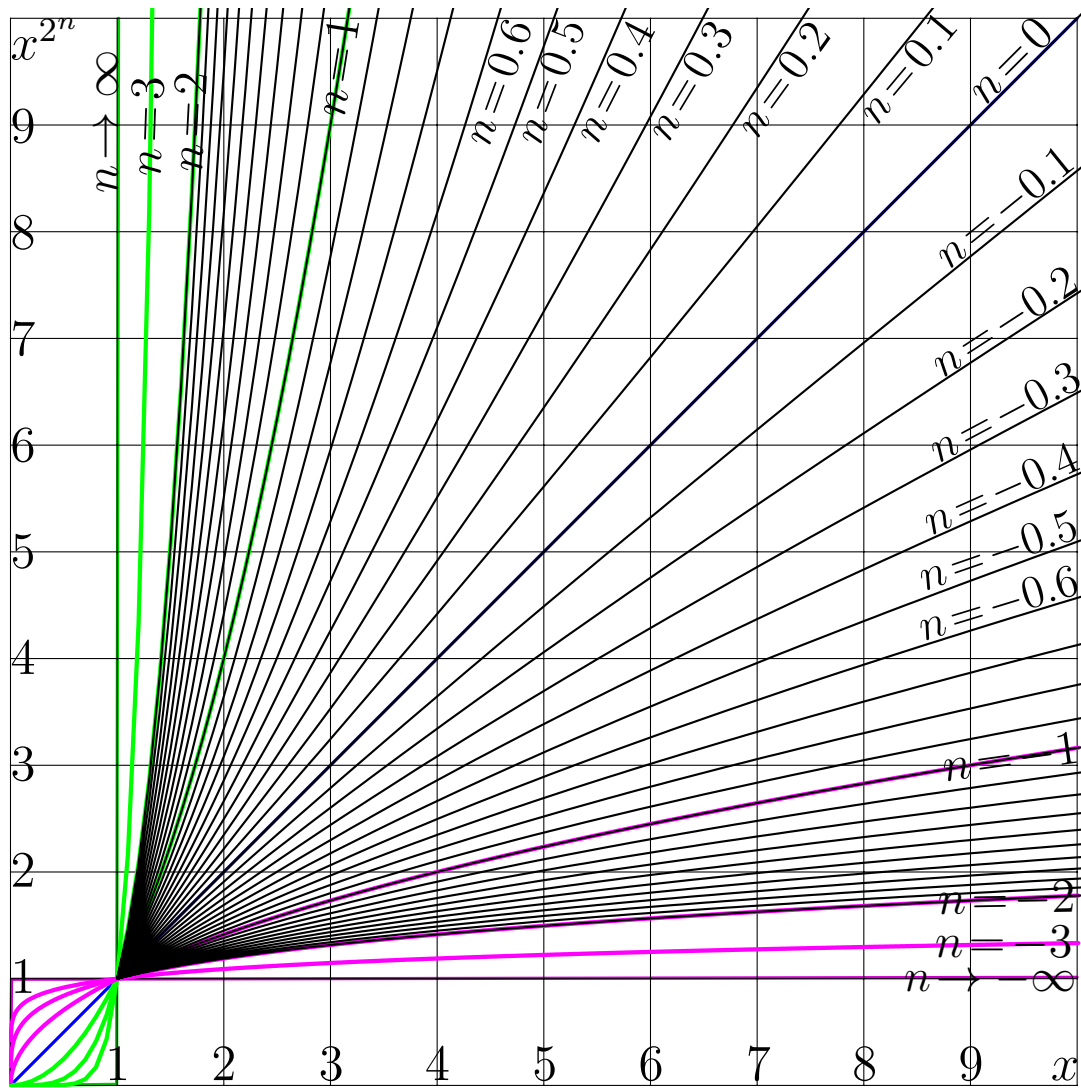
Для $a=2$, карта функции T показана на рисунке 4.10.

Итерации степенной функции T по формуле (4.20) пишу так:

$$T^n(z) = \text{Pow}_a^n(z) = z^{a^n} = \text{Pow}_a(\text{Pow}_a(\dots \text{Pow}_a(z) \dots)) \quad (4.21)$$

В правой части формулы (4.21), операция Pow_a применяется n раз. В соответствии с общей идеологией Второй главы, параметр n не имеет необходимости быть целым.

На рисунке 4.11 функция T^n по формуле (4.21) для $a=2$ показана для различных значений n .



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:IterPowPlotT.jpg>

Рис. 4.11: $y = T^n(x) = \text{Pow}_2^n(x)$ для различных n .

Итерации степенной функции вычисляются по общей формуле

$$T^n(x) = F\left(n + G(x)\right)$$

где F есть суперфункция для передаточной функции T ; её можно представить в виде

$$F(z) = \exp\left(\exp(\ln(a)z)\right) = \exp^2(\ln(a)z) \quad (4.22)$$

и G есть для неё же Абельфункция. Это абельфункция для передаточной функции T по формуле (4.20). Эту абельфункцию можно записать так:

$$G(z) = \ln\left(\ln(z)\right)/\ln(a) = \ln^2(z)/\ln(a) \quad (4.23)$$

Такое представление степенной функции соответствует шестой строке таблицы 3.1.

Для $T(z) = z^2$, имеют место соотношения

$$T^2(z) = T(z^2) = T(z)^2 \quad (4.24)$$

Имеет место распространенное заблуждение, что соотношения (4.24) или некоторые их несложные эквиваленты должны выполняться и для других передаточных функций T тоже, не только для степенной функции T по формуле (4.20). Многие конфузии связаны с таким заблуждением. Это обстоятельство обсуждается также в другой главе в связи с итерациями факториала, см. рис. 8.8.

Для передаточной функции T вида (4.20), итерация (10.16) может быть упрощена;

$$T^n(z) = \exp^2 \left(\ln(a) \left(n + \ln^2(z) / \ln(a) \right) \right) = z^{a^n} \quad (4.25)$$

Таким образом, итерации передаточной функции T по формуле (4.20) можно выразить через несложную элементарную функцию.

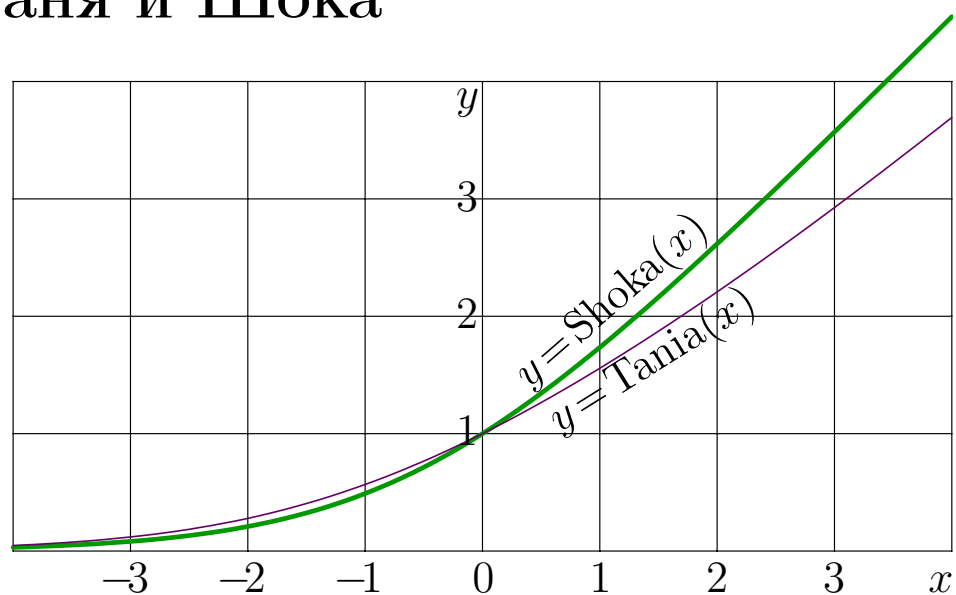
На рисунке 4.11 представлены итерации степенной функции по формуле (4.25). Толстые линии соответствуют целым итерациям. Тожественная функция $y = x$ соответствуют нулевой итерации. В области между нулем и единицей кривые сливаются, и поэтому проведены только для $n = 0$ и для $n = 1$. С помощью экспоненты и логарифма эти итерации выражаются в несложном и компактном виде по формуле (4.25).

Глядя, как легко и красиво получаются (и упрощаются) итерации передаточной функции T по формуле (4.20), можно ожидать, что таким же образом можно строить нецелые итерации и других функций. При этом, при непрерывном изменении числа итераций от единицы до минус единицы, функция плавно переходит в свою обратную функцию.

Ниже, по мере построения новых суперфункций и абельфункций, предлагаются ещё примеры нецелых итераций. При этом нецелая итерация выражается не как дробная степень, но через соответствующую комбинацию суперфункции и абельфункции. В соответствии с декларациями Введения, я и дальше стараюсь обеспечить оппонентов богатыми возможностями, инструментами, “туллами” (tools) для эффективной и конструктивной критики. То есть подробно рассказываю, как получаются красивые картинки.

Глава 5

Таня и Шока



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:ShokotaniaT.png>

Рис. 5.1: Функции Шока и Таня.

В этой главе рассмотрены некоторые почти элементарные суперфункции, которые могут иметь приложения в лазерной науке; эти функции можно выразить так:

$$\text{Shoka}(z) = z + \ln(e^{-z} + e - 1) \quad (5.1)$$

$$\text{Tania}(z) = \text{WrightOmega}(z+1) \quad (5.2)$$

по крайней мере в некоторой окрестности вещественной оси. При $|\Im(z)| \geq \pi$, функция $\text{WrightOmega}(z)$ ведет себя плохо (её разрезы не там, где мне хотелось бы); поэтому приходится использовать для функции имя Tania . Представления (5.1), (5.2) годятся, в частности, для вещественных значений аргумента и могут быть использованы для построения рисунка 5.1.

Ниже я объясняю, почему эти функции важны для лазерной науки и интересны как примеры суперфункций. Практически, это пересказ статей [73, 74]. Эта глава (за исключением первой секции) может быть полезна узким специалистам, работающим в лазерной науке.

1 Об узких специалистах

Предупреждение. Узким специалистам лучше пропустить эту секцию: она содержит критическое мнение об узких специалистах и может оскорбить их религиозные чувства.

Узкие специалисты подобны инопланетянину зайцу Бо, которому кажется, что все только и думают, как бы сказать чего-нибудь нехорошее про зайцев¹. Известный классик Русской литературы Козьма Прутков обнаружил и указал, что узкий специалист подобен флюсу: его полнота односторонняя. Узкий специалист может легко понять и даже проделать вычисления, если он видит за ними реалистичную жизненную ситуацию. Например, человек может встретить трудности, складывая два числа, 250 и 250. Однако, если ему сказать, что речь идет о граммах водки, он мгновенно проведет необходимые расчеты и сразу скажет ответ: *“Да это же Поллитра!”*; последнее слово будет произнесено с уважением и придыханием. Это придыхание укажет присутствующим, что он любитель выбить, и вероятно, даже не просто любитель, а профессионал и, возможно, даже узкий специалист (рис. 5.2). Аналогично, узкому специалисту-лазерщику трудно понять, что такое “передаточная функция”, до тех пор, пока ему не скажут, что некоторый параметр (мощность, интенсивность, флюенция или энергия светового импульса) на выходе лазерного усилителя рассматривается как функция аналогичного параметра на входе в усилитель.

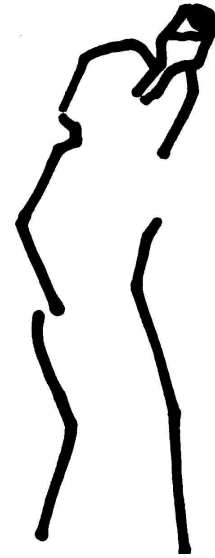
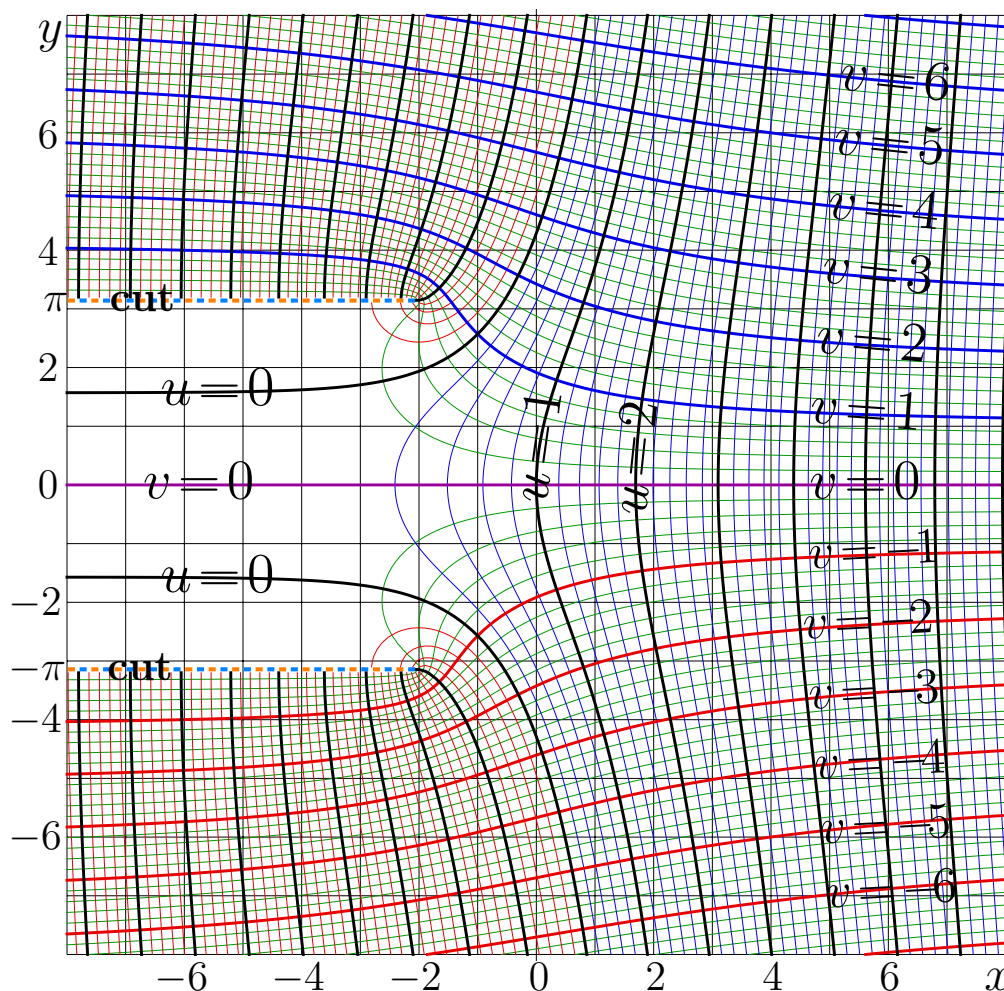


Рис. 5.2: Узкий специалист

Функции Доя и Келлер, определяемые в этой главе ниже, могут быть интерпретированы как передаточные функции идеализированного лазерного усилителя. Читатели, равнодушные к лазерной науке, могут рассматривать эти функции как абстрактные математические объекты; или даже вовсе пропустить эту главу, за исключением, может быть, секции 5 (“О единственности решения”): секция 5 может помочь тем, кто собирается раскритиковать эту Книгу или даже просто сказать что-нибудь нехорошее про лазерщиков.

¹ <http://www.youtube.com/watch?v=0CndqQqH1Qo> Магазинчик Бо. Эпизод 23. Сень Бо-Гэ. Mar 1, 2013. *А ещё он говорил что-то нехорошее про зайцев!..*



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:TaniaContourPlot100.png>

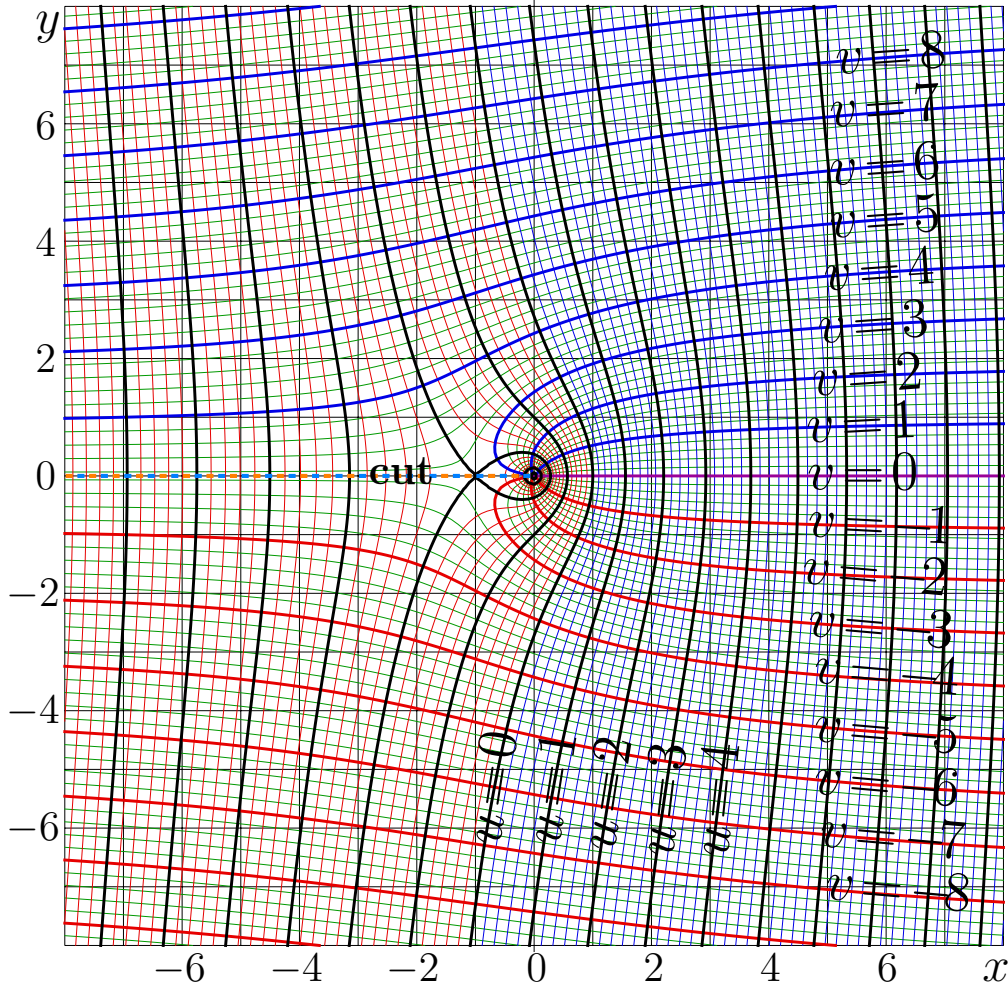
Рис. 5.3: $u+iv = \text{Tania}(x+iy)$

2 Таня и Арктаня

Пусть функция Tania будет решением f дифференциального уравнения

$$f'(z) = \frac{f(z)}{1 + f(z)} \quad (5.3)$$

с граничным условием $f(0) = 1$, где контур интегрирования уравнения (5.3) идет сперва от нуля до мнимой части z вдоль мнимой оси, а затем вдоль прямой, параллельной вещественной оси, идет в точку z . Рисунок 5.1 показывает свойства функции Tania для вещественного аргумента. Эта функция положительна и монотонно возрастает. В сторону отрицательных значений аргумента, функция экспоненциально затухает. При больших значениях аргумента, Таня растет почти линейно. В нуле эта функция равна единице и растет с производной $1/2$. Комплексная карта этого решения показана на рисунке 5.3.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:ArcTaniaMap.png>

Рис. 5.4: $u + iv = \text{ArcTania}(x + iy)$

Изменение контура интегрирования уравнения (5.3) не влияет на значение функции до тех пор, пока этот контур не пересекает линии разреза $\Re(z) < -1$, $\Im(z) = \pm\pi$. В частности, при вещественных значениях x , для $f(x)$, интегрирование может осуществляться от 0 до x вдоль вещественной оси.

Уравнение (5.3) легко “решается” в том смысле, что обратную функцию $g = f^{-1}$ от решения удастся выразить через элементарные функции. Чтобы не путать её с другими функциями, обозначаемыми тоже буквой g , в этой Книге (хотя и не только здесь) я обозначаю её именем ArcTania; то есть $\text{ArcTania} = \text{Tania}^{-1}$, и эта АркТаня является элементарной функцией:

$$\text{ArcTania}(z) = z + \ln(z) - 1 \quad (5.4)$$

Комплексная карта функции ArcTania представлена на рисунке 5.4. В представлениях функций Tania и ArcTania нет комплексных кон-

стант. Эти функции вещественно голоморфны:

$$\text{Tania}(z^*) = \text{Tania}(z)^* , \quad \text{ArcTania}(z^*) = \text{ArcTania}(z)^* \quad (5.5)$$

Функции Tania и ArcTania похожи на линейную функцию при больших значениях аргумента, но Tania имеет два разреза при мнимой части аргумента $\pm\pi$, а ArcTania имеет только один разрез вдоль отрицательной части вещественной оси. Асимптотическое (почти линейное) поведение функции $\text{Tania}(z)$ при больших значениях $|z| \gg 1$ универсально почти для всей комплексной плоскости, за исключением полосы $\Re(z) < 0$, $|\Im(z)| \leq \pi$. В полосе $|\Im(z)| < \pi$, при $\Re(z) \rightarrow -\infty$, функция $\text{Tania}(z)$ экспоненциально убывает, что соответствует графику поведения этой функции при вещественных значениях аргумента.

Для умеренных значений мнимой части аргумента, функция Tania может быть выражена через известную [12, 98] специальную функцию WrightOmega :

$$\text{Tania}(z) = \text{WrightOmega}(z+1) \quad (5.6)$$

Есть несколько оправданий для введения новой функции, которая легко выражается через известную функцию:

1. Для удобства оценок, желательно, чтобы суперфункция в нуле принимала целое значение, Функция Tania будет такой суперфункцией для примера, рассматриваемого ниже.
2. Имя Tania короче, чем WrightOmega , и допускает простую русскоязычную транслитерацию “Таня”. При этом появляется возможность склонять имя этой функции по падежам в соответствии с традициями грамматики русского языка.
3. В комплексной плоскости Таня как решение уравнения (5.3) ведет себя проще, чем функция WrightOmega , представленная в алгоритмических языках программирования.

Использование нового имени позволит избежать путаницы, если одновременно потребуются обе функции, функция WrightOmega со счетным множеством разрезов и функция Таня с её двумя разрезами, видными на левой карте рисунка 5.3. Читатели приглашаются построить карты обеих функций, Тани и ВрайтОмеги [12, 98], и проверить, что только в полосе вдоль вещественной оси эти функции получают одна из другой трансляцией аргумента на единицу.

Вдоль вещественной оси (и даже в её окрестности) нет надобности как-то различать $\text{Tania}(z)$ и $\text{WrightOmega}(z+1)$. Однако, для суперфункций, выход в комплексную область важен для единственности решения, а иногда и для вычисления. Поэтому здесь суперфункции сразу рассматриваются для комплексного переменного. При этом функция Таня имеет меньше разрезом, чем функция WrightOmega , и этим проще.

Для эффективного вычисления функции Tania могут использоваться её асимптотические разложения. Объединение областей применимости этих разложений покрывает всю комплексную плоскость.

При больших значениях аргумента, Таню можно разложить так:

$$\text{Tania}(z) = z + 1 - \ln(z) + \frac{\ln(z) - 1}{z} + \frac{\ln(z)^2 - 4 \ln(z) + 3}{2z^2} + \dots \quad (5.7)$$

При отрицательных значениях $\Re(z)$, такое разложение годится, пока $|\Im(z)| > \pi$. Для представления Тани между линиями разреза (см. рис. 5.3) удобно ввести параметр $\varepsilon = \exp(1+z)$; тогда Таню можно разложить так:

$$\text{Tania}(z) = \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^3 - \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \frac{125}{24}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^6) \quad (5.8)$$

Вблизи точки ветвления, годится разложение

$$\text{Tania}(z) = -1 + 3t - 3t^2 + \frac{3}{4}t^3 + \frac{3}{10}t^4 + \frac{9}{160}t^5 + \dots \quad (5.9)$$

где $t = i\sqrt{\frac{2}{9}(z+2-\pi i)}$.

Кроме того, можно пользоваться разложением Тэйлора в нуле

$$\text{Tania}(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{16} - \frac{z^3}{192} - \frac{z^4}{3072} + \frac{13z^5}{61440} - \frac{47z^6}{1474560} + \dots \quad (5.10)$$

Комбинируя разложения выше, можно получить для Тани “нулевое” приближение, пусть оно называется s_0 , с несколькими значащими цифрами для всей комплексной плоскости. Затем, для достижения предельной точности переменных “complex double”, требуется всего три или четыре итерации по методу Ньютона

$$s_{n+1} = s_n + \frac{z - \text{ArcTania}(s_n)}{\text{ArcTania}'(s_n)} \quad (5.11)$$

где $\text{ArcTania}'(z) = 1 + 1/z$ есть производная АркТани. При этом Танию можно вычислять почти столь же быстро, как и элементарные функции. Так устроена C++ имплементация Тани, загруженная по урлу <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Tania.cin>

Элементарные функции, упомянутые в таблице 3.1, и, в частности, Таня и АркТаня, имеют широкую область голоморфизма. Интуитивно понятно, что если суперфункция выражена несложной элементарной функцией, то, вероятно, именно она имеет физический смысл, а суперфункция, получаемая преобразованием (2.12), есть что-то дополнительное, искусственное и менее физичное. Также, можно ожидать, что преобразованная функция будет иметь более узкую область голоморфизма; это даёт критерий “физичности” решения передаточного уравнения (2.7). Критерий простоты указан в последней, Шестой аксиоме ТОРИ, упомянутой Главе 2. Согласно этой аксиоме, от специальных суперфункций приходится ожидать наиболее простого поведения в комплексной плоскости.

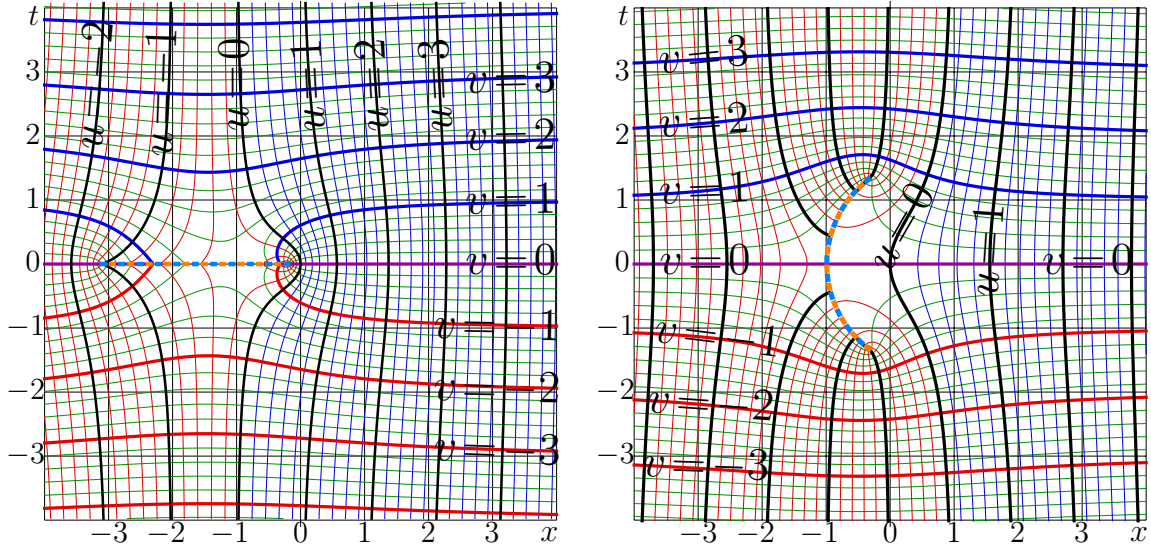
Функция Таня проще, чем специальная функция WrightOmega. Поэтому Таня может рассматриваться как первичная функция, и использоваться для имплементации ВрайтОмеги, как, впрочем, и для аппроксимации каких-либо зависимостей в Лазерной Физике и прочих науках.

Функция Tania имеет простой физический смысл. Это зависимость интенсивности света от координаты в однородном усилителе с простой моделью активной среды [73, 74]. При этом координата измеряется в единицах, обратных ненасыщенному усилению, а интенсивность измеряется в единицах интенсивности насыщения.

В этой Книге, функция Таня встречается много раз. В этой главе, Таня появляется как суперфункция от передаточной функции, рассмотренной в следующей секции. При этом использован трюк, упомянутый в описании таблицы 3.1: сперва выбирается суперфункция, а потом для неё строится передаточная функция. Такая передаточная функция названа именем Doya. Я благодарен Валерии Доуя (рис. 5.5), которая любезно разрешила использовать её фамилию для обозначения функции, нужной в Лазерной Науке и в этой Книге.



Рис. 5.5: V. Doya [99]



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Doya10map4bT60.png>

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Doyam10map4bT100.png>

Рис. 5.6: $u+iv = \text{Doya}(x+iy)$, слева, и $u+iv = \text{Doya}^{-1}(x+iy)$, справа

3 Передаточная функция Doya

С рассмотренными выше функциями Tania и ArcTania, легко построить “решаемую” передаточную функцию, пусть она называется Doya, в таком виде:

$$T(z) = \text{Doya}(z) = \text{Tania}(1 + \text{ArcTania}(z)) \quad (5.12)$$

Комплексная карта функции Doya, а также карта обратной функции $\text{ArcDoya} = \text{Doya}^{-1}$ показаны на рисунке 5.6. На бесконечности, эти функции похожи на тождественную функцию, но имеют особенности (точки ветвления и разрезы) вблизи начала координат.

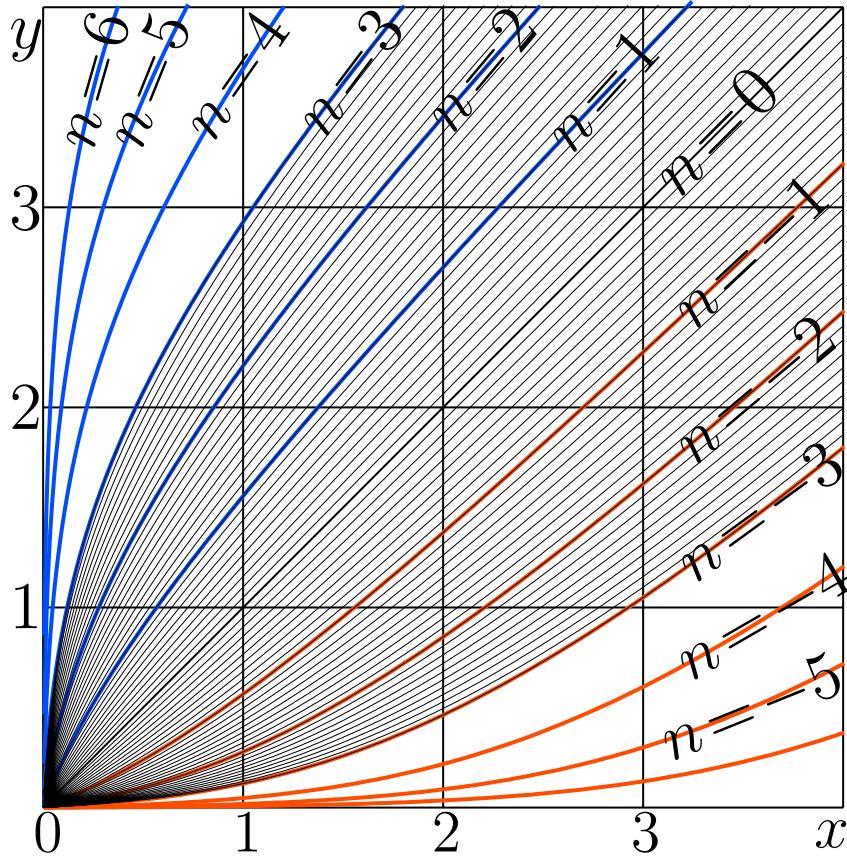
Свойства функции Doya описаны в ТОРИ [90]; представлен также эффективный алгоритм для её вычисления. В окрестности вещественной оси, Дойя может быть выражена через известную функцию LambertW [94]:

$$\text{Doya}(z) = \text{LambertW}(z e^{z+1}) \quad (5.13)$$

В соответствии с определением (5.12), Таня является суперфункцией Дойи, а АркТаня - её абельфункцией. Соответственно, n -ная итерация Дойи выражается так:

$$\text{Doya}^n(z) = \text{Tania}\left(n + \text{ArcTania}(z)\right) \quad (5.14)$$

Это представление использовано для построения рисунка 5.7; графики показывают $y = \text{Doya}^n(x)$ для различных значений n .



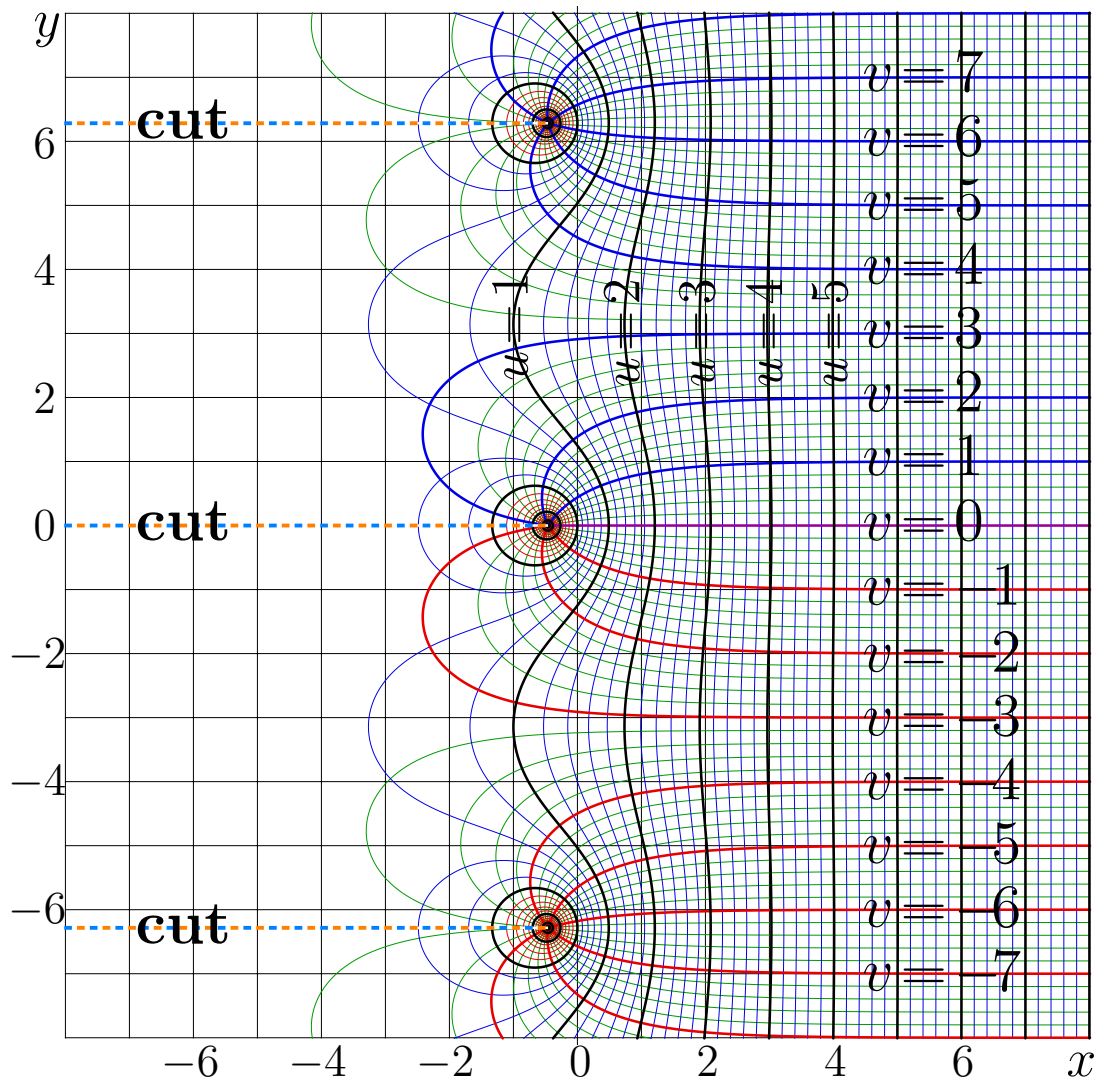
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:DoyaPlotT100.png>

Рис. 5.7: $y = \text{Doya}^n(x)$ по формуле (5.14)

Свойства функции Таня проще, чем свойства функции LambertW, и поведение Тани в комплексной плоскости проще, чем поведение функции WrightOmega. Поэтому здесь в качестве “основной” функции выбрана Таня.

Функции Дойя и Таня имеют ясный физический смысл. Они соответствуют простой модели однородного лазерного усилителя, работающего в непрерывном режиме. Функция Дойя есть передаточная функция такого усилителя; она выражает зависимость интенсивности сигнала на выходе от интенсивности сигнала на входе; интенсивность накачки выбрана так, что в линейном режиме (для слабого сигнала) сигнал усиливается ровно в e раз. (Здесь интенсивность измеряется в единицах насыщения.) Функция Таня выражает зависимость сигнала от координаты вдоль направления распространения усиливаемого сигнала [73, 74].

Функции, аналогичные функциям Дойя и Таня, могут быть построены также и для импульсного режима усиления сигнала. Такие функции рассмотрены в следующей секции.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:KellerMapT.png>

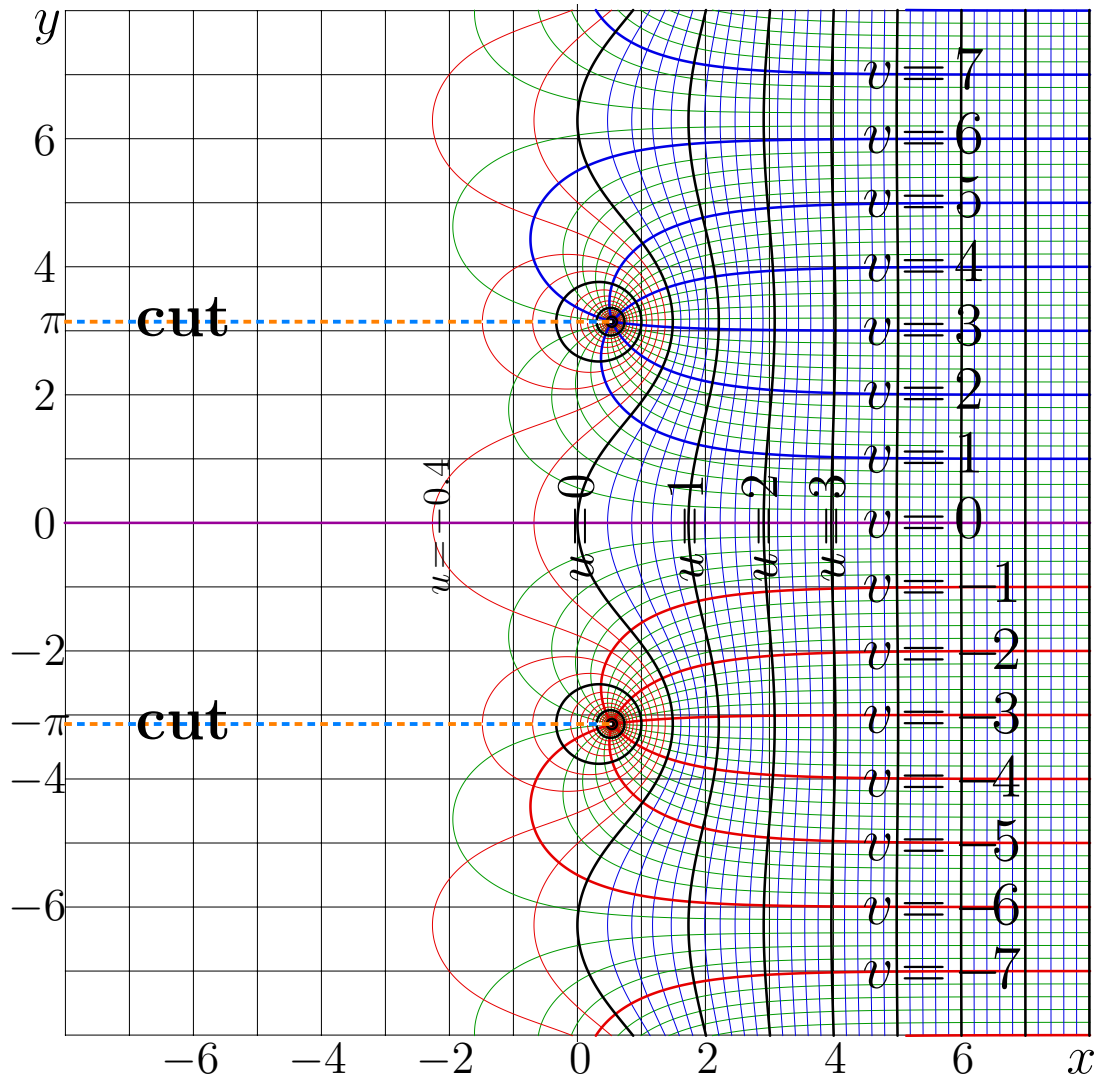
Рис. 5.8: $u+v = \text{Keller}(x+iy)$.

4 Келлер, Шока и АркШока

Волновой пакет света в однородном усилителе характеризуется его энергией или флюенцией, если его можно считать однородным по поперечному сечению. Грубо говоря, флюенция - это энергия на площадь. При этом передаточной функцией однородного усилителя является зависимость флюенции на выходе от флюенции на входе. В простой модели, эта зависимость выражается функцией Келлера, и она рассмотрена в этой секции. Функцию Келлера я определяю так:

$$\text{Keller}(z) = z + \ln\left(e - e^{-z}(e - 1)\right) \quad (5.15)$$

Комплексная карта этой функции показана на рисунке 5.8.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:KellerMapT.png>

Рис. 5.9: $u+v = \text{ArcKeller}(x+iy)$.

Обратная функция $\text{ArcKeller} = \text{Keller}^{-1}$ записывается так

$$\text{ArcKeller}(z) = z + \ln\left(\frac{1}{e} + \frac{e-1}{e} e^{-z}\right) \quad (5.16)$$

Комплексная карта функции ArcKeller показана на рисунке 5.9.

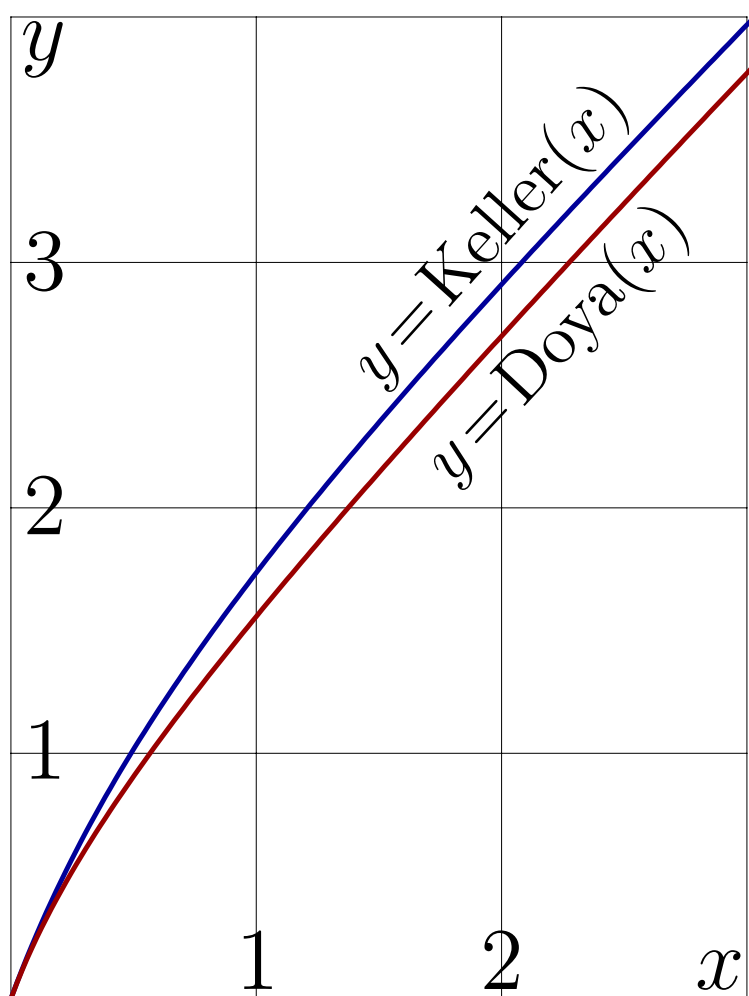
Карты функций Keller и ArcKeller выглядят похоже; имеет место соотношение

$$\text{ArcKeller}(z) = \text{Keller}(z - i\pi - 1) - 1 + i\pi \quad (5.17)$$

В работах Келлера [29, 34] используется иное представление,

$$\text{Keller}(z) = \ln\left(1 + e(e^z - 1)\right) \quad (5.18)$$

Такое представление эквивалентно выражению (5.15), пока $|\Im(z)| < \pi$, и, в частности, для вещественных значений аргумента.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:KellerDoyaT.png>

Рис. 5.10: Сравнение функций Keller и Doya, см.(5.15) и (5.12)

График функции Келлера вещественного аргумента показан на рисунке 5.10 в сравнении с графиком функции Доя, рассмотренной в предыдущей секции. Обе функции растут от нуля в нуле тангенсом e ; потом рост становится почти линейным, и на бесконечности каждая из этих функций растет с тангенсом единица. При этом Келлер принимает значения на несколько десятых больше, чем Доя.

По аналогии с передаточной функцией Доя, функцию Келлера тоже можно интерпретировать как передаточную функцию. Эта функция описывает усиление коротких световых импульсов в лазерной среде; при этом, аргумент передаточной функции имеет смысл флюенции (энергии на площадь) светового импульса на входе в усилитель, измеренной в единицах флюенции насыщения. Такой же смысл имеют значения этой функции, эти значения соответствуют флюенции на выходе.

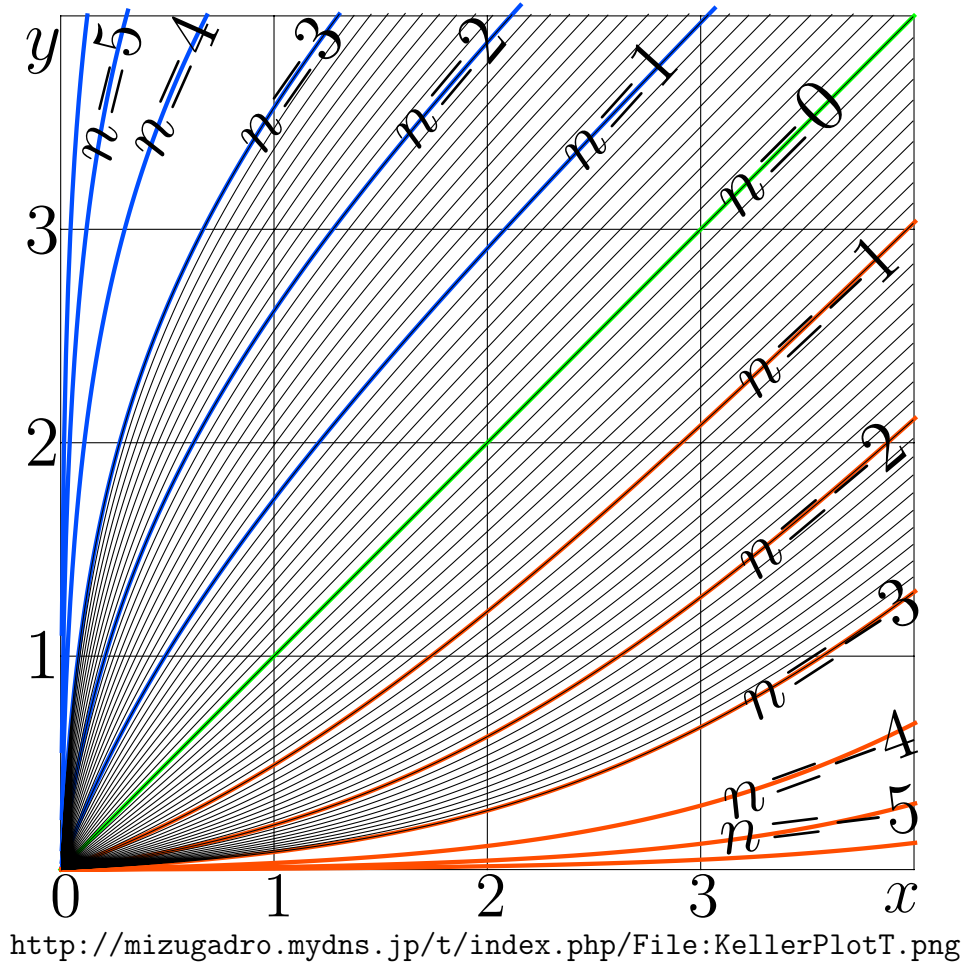


Рис. 5.11: $y = \text{Keller}^n(x)$.

Описание световых импульсов обычно сложнее, чем рассмотрение стационарного режима (имеется дополнительный параметр, время). Однако для простой модели импульсного усилителя, передаточная функция, её суперфункция и абельфункция выражаются через элементарные функции; итерации функции Келлера тоже оказываются элементарными функциями. В этом смысле передаточная функция Келлера проще, чем передаточная функция Доуа.

Итерации функции Keller, показанные на рисунке 5.11, также схожи с итерациями функции Доуа, показанными на рисунке 5.7. В соответствии с общей формулой, итерации функции Келлера строятся через её суперфункцию и абельфункцию. Для функции Келлера, суперфункцией и абельфункцией являются функции Shoka и ArcShoka, задаваемые формулами

$$\text{Shoka}(z) = z + \ln(e^{-z} + e - 1) \quad (5.19)$$

$$\text{ArcShoka}(z) = z + \ln\left(\frac{1 - e^{-z}}{e - 1}\right) \quad (5.20)$$

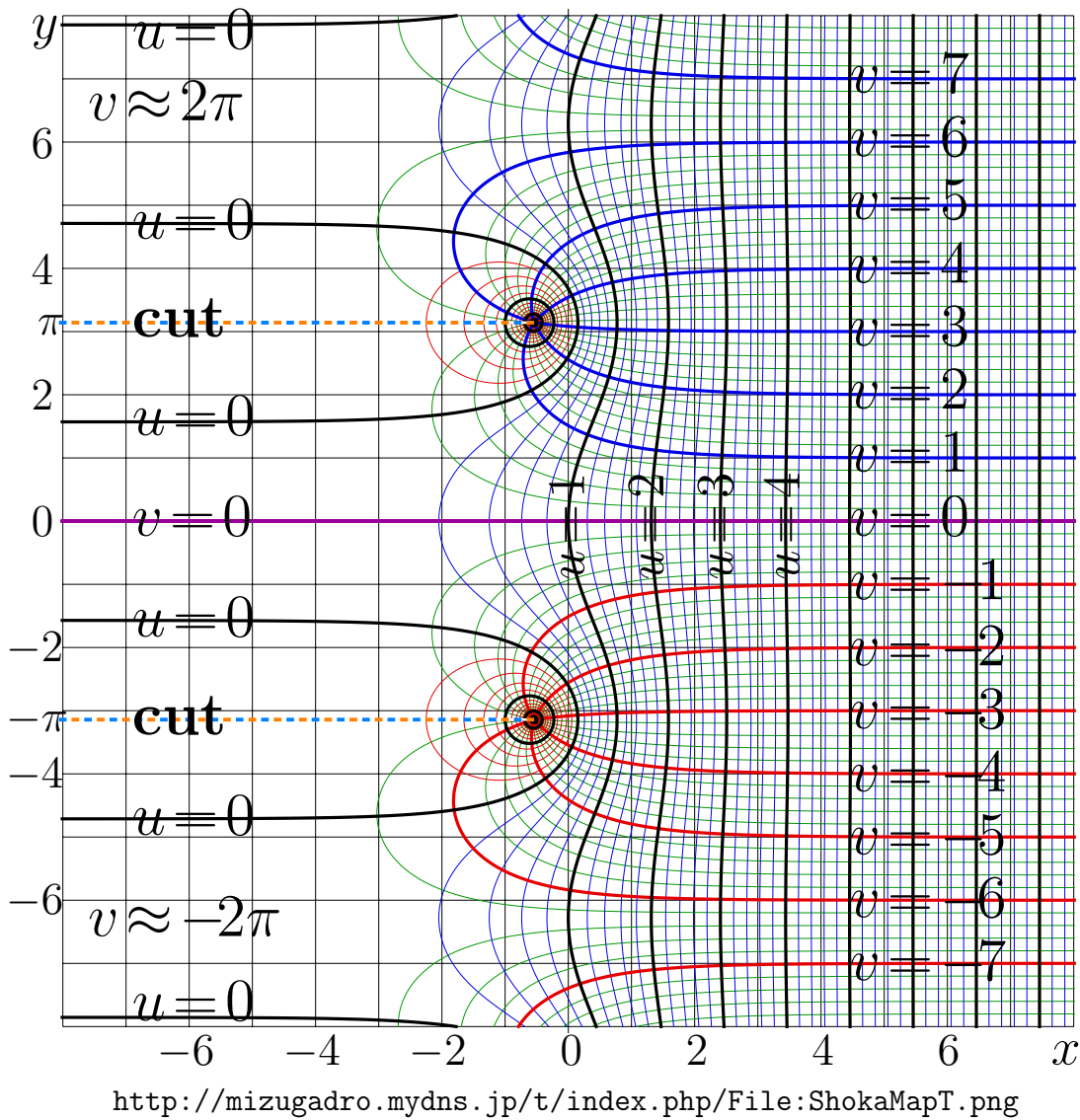
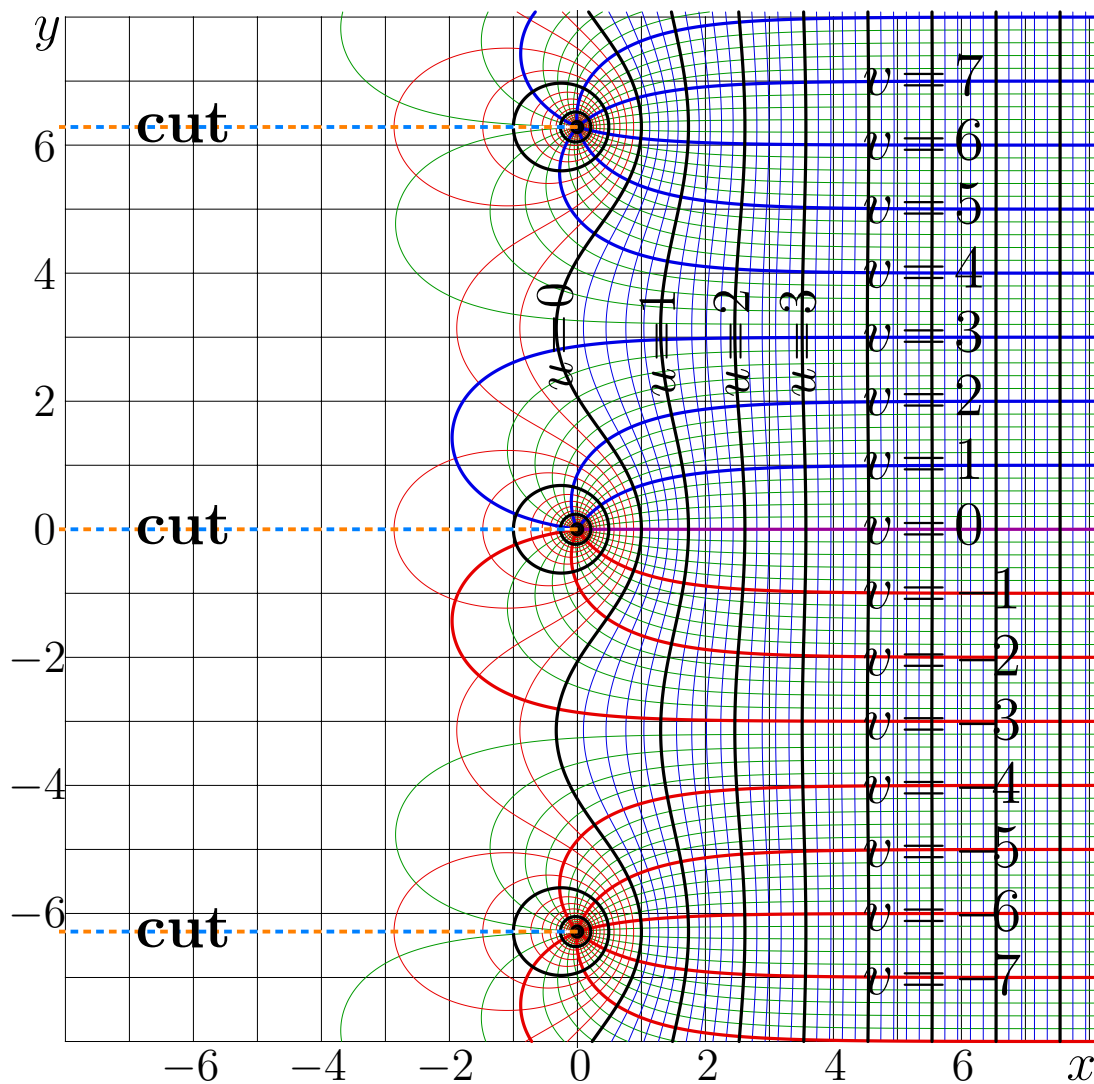


Рис. 5.12: $u+iv=\text{Shoka}(x+iy)$

Комплексные карты функций Шока и АркШока показаны на рисунках 5.12 и 5.13. Эти функции аналогичны функциям Таня и АркТаня, и тоже описывающим усиление света в активной лазерной среде с простой кинетикой, но не для непрерывного режима, а для коротких импульсов.

Функции Tania и Shoka сравниваются для вещественных значений аргумента на рисунке 5.1. Обе эти функции в левой части графика имеют экспоненциальный рост с единичным инкрементом; обе проходят через точку $(0,1)$, и обе растут почти линейно в правой части графика.

Комплексные карты функций Шока и АркШока на рисунках 5.12 и 5.13 похожи. Одна из них получается из другой смещением на константу аргумента и добавлением другой константы к значению.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:ArcShokaMapT.png>

Рис. 5.13: $u + iv = \text{ArcShoka}(x + iy)$.

Это можно выразить соотношением

$$\text{ArcShoka}(z) = \text{Shoka}(z - i\pi - \ln(e-1)) - \ln(e-1) + i\pi \quad (5.21)$$

В окрестности положительной части вещественной оси, карты на рисунке 5.12, похожи на карты рисунка 5.3 для функции Таня, хотя простым преобразованием получить Таню из Арктани или из Шоки не удастся. Мне не известно аналога формулы 5.21 для Тани и АркТани. Есть и качественные различия: функция Таня имеет всего две линии разреза (и две точки ветвления), а функция Шока имеет их счетное множество. Обратные функции, АркТаня и АркШока, имеют сходные структуры разрезом.

Все четыре функции (Таня, АркТаня, Шока и АркШока) похожи на линейную функцию при больших значениях вещественной ча-

сти аргумента; в правой части комплексных карт, структура линий уровня вещественной и мнимой части становится похожа на обычную прямоугольную сетку из прямых линий. Это же можно сказать о функциях Дойя и Келлер.

Сходства и различия в поведении четырех функций (Дойя, Келлер, Шока и Таня) проявляется ярче всего в комплексной плоскости. В качестве ещё одной особенности, типичной для функции Дойя, на рисунке 5.14 показан зумин из левой части рисунка 5.6. Изображена комплексная карта функции Doya , $u+iv = \text{Doya}(x+iy)$. Карта повернута на 90 градусов против часовой стрелки. Толстыми линиями показаны уровни $u = -0.4$, $v = \pm 1.2$, $v = \pm 1.4$. При этом

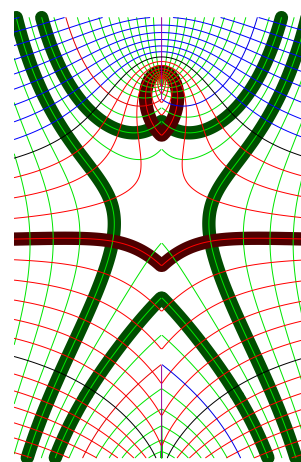


Рис. 5.14: Эврика!

карта похожа на человека, который увидел в раскрытой книге нечто удивительное. Генератор этого рисунка загружен по урлу

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Doya500.png>

Читатели приглашаются проверить, что три параметра, указанные с двумя значащими цифрами, воспроизводят структуру, показанную на рисунке 5.14.

Схожесть передаточных функций Дойя и Келлер, и, соответственно, схожесть их суперфункций Таня и Шока, указывают, что для анализа нелинейных сред по их передаточным функциям, эти функции должны измеряться с несколькими значащими цифрами. Это представляется возможным, так как для измерения передаточных функций не требуется регистрации малых изменений интенсивности или флюенции. В эпоху, когда частота измеряется с 18ю значащими цифрами, можно померить передаточную функцию хотя бы с шестью знаками. В принципе, для этого достаточно зарегистрировать порядка 10^{12} фотонов на каждое значение; то есть, используя всего 10^{15} фотонов, можно затабулировать передаточную функцию на тысяче значений. Тогда данные о передаточных функциях и, соответственно, их суперфункции (то есть распределение интенсивности или флюенции, в зависимости от случая, вдоль усилителя) можно использовать для выбора модели активной среды. При этом количество параметров модели уменьшается на единицу, один из параметров, а именно - длина усилителя, может быть исключен из модели.

5 О единственности решения

Предыдущая секция подразумевает, что суперфункция для данной передаточной функции успешно восстанавливается. В связи с этим, имеет смысл вспомнить указание Введения о том, что для данной передаточной функции, суперфункция не единственна.

Во Второй главе, в таблице 3.1 предложены примеры передаточных функций и их суперфункции. Среди них есть два примера реалистичных функций, которые могут быть реализованы в лазерной науке, в эксперименте, на оптической скамье. Это функции $T = \text{Doya}$ и $T = \text{Keller}$, рассмотренные в этой главе. Для этих функций суперфункциями являются функции $F = \text{Tania}$ и, соответственно, $F = \text{Shoka}$. Эти же функции можно получить как решения дифференциальных уравнений для несложных физических моделей нелинейной среды. Поэтому физичность таких решений не вызывает сомнений. Однако, легкость и красота, с которой получаются суперфункции и абельфункции для передаточных функций $T = \text{Doya}$ и $T = \text{Keller}$, не должны вызывать иллюзий относительно единственности решения передаточного уравнения (2.7); ввиду важности этого уравнения, оно повторено здесь:

$$F(z+1) = T(F(z))$$

Чтобы уменьшить многообразие решений, можно потребовать, что вдоль вещественной оси суперфункция монотонна, что она асимптотически стремится к стационарной точке передаточной функции (в случае $T = \text{Doya}$ и $T = \text{Keller}$, стационарной точкой является ноль), и что значение суперфункции в некоторой точке зафиксировано (для Тани и Шоки “руками” задано, что $F(0) = 1$). Однако таких условий для единственности решения недостаточно.

Как уже указано во Введении, для данной передаточной функции, суперфункция не единственна. Здесь предложен критерий, как среди различных суперфункций распознать “настоящую”, то есть ту, которая, как ожидается, соответствует физической ситуации.

Пусть θ - вещественно-голоморфная периодичная функция с периодом единица, и пусть $\theta(0) = 0$. Пусть

$$\mathcal{F}(z) = F(z + \theta(z)) \quad (5.22)$$

В частности, можно положить

$$\theta(z) = \mu \sin(2\pi z) \quad (5.23)$$

где μ - вещественный малый параметр. Полученная функция \mathcal{F} удовлетворяет тому же передаточному уравнению (2.7), что и F , и принимает то же значение в нуле. При монотонной суперфункции F , для умеренных значений μ , полученная суперфункция \mathcal{F} тоже монотонна, и, работая со значениями функций при вещественных значениях аргумента, трудно понять, какую из функций F , \mathcal{F} считать “настоящей”, и которая из них получена периодичной модификацией аргумента.

Выбор “настоящей” функции упрощается, если рассмотреть комплексные значения аргумента. По этой причине в этой Книге рассматриваются комплексные значения аргумента и строятся комплексные карты передаточных функций, а также их обратных функций, суперфункций и абельфункций.

Если θ в комплексной плоскости имеет сингулярности, то можно ожидать, что в тех же точках модифицированная функция \mathcal{F} тоже сингулярна. Если θ - целая функция, то есть не имеет сингулярностей, то можно ожидать, что в полосе, например, $0 \leq \Re(z) < 1$, выражение $z + \theta(z)$ принимает почти все значения, в том числе и такие, при которых либо T , либо её обратная функция T^{-1} сингулярны². Тогда в полосе $-1 \leq \Re(z) < 2$ функция $\mathcal{F}(z)$ имеет особенности.

Критерий “истинности”, физичности суперфункции может быть построен на основе её поведения в комплексной плоскости: “настоящая” суперфункция та, которая имеет меньше сингулярностей (либо не имеет их вовсе). Голоморфная периодичная добавка к аргументу суперфункции изменяет её асимптотические свойства в направлении мнимой оси. Поэтому спецификация регулярного поведения суперфункции в комплексной плоскости существенно уменьшает многообразие решений или даже обеспечивает единственность решения.

²Это типичный случай, когда по крайней мере одна из функций T и T^{-1} имеет особенности. Исключением является лишь линейная функция

6 Конжекция о почти идентичной функции

Я и мои коллеги предпринимали попытки доказать (или опровергнуть) рассуждение, использованное выше, о том, что функция $\mathcal{F}(z)$ вида (5.22) в полосе $0 \leq \Re(z) \leq 1$ принимает все значения, за исключением, быть может, одного; но пока у нас нет строгого доказательства. Такое рассуждение можно сформулировать в виде конжекции:

Для голоморфной периодичной функции θ с вещественным периодом τ , функция $z \mapsto z + \theta(z)$ в области $\{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq \tau/2\}$ принимает все значения из \mathbb{C} , за исключением, быть может, одного.

Я надеюсь, что эта гипотеза, эта концепция не потребует стольких усилий, сколько потребовала знаменитая Теорема Ферма, хотя до сих пор мне не удалось найти ни одного математика, который бы взялся строго доказать её или предложил бы пример функции, которая эту гипотезу опровергает. После доказательства, такое утверждение могло бы называться **Теорема о почти идентичной функции**. Смысл такого названия в том, что даже небольшое периодичное искажение идентичной функции дают функцию, которая принимает все значения даже на одном периоде. Пока эта теорема не доказана, её уместно называть гипотезой.

Гипотеза о почти идентичной функции важна для единственности решения передаточного уравнения. Если передаточная функция, или её обратная функция, имеет хотя бы одну сингулярность, то преобразование голоморфной суперфункции по формуле (2.12) сужает область голоморфизма. В этом смысле требование голоморфизма является ключевым для единственности суперфункций.

Рассуждения предыдущей секции, главы, да и всей Книги, не являются строгими доказательствами. Они лишь указывают, почему для голоморфной передаточной функции обычно удастся построить единственную суперфункцию. Неограниченный рост “почти идентичной” функции объясняет, как, почему и в каких случаях можно ожидать единственности суперфункции.

В следующих главах рассмотрены и другие передаточные функции. Для них тоже строятся суперфункции, даже если они не выражаются простым образом через функции, известные в 20м веке.

Глава 6

Регулярная итерация

Регулярная итерация есть способ построения нецелых итераций передаточной функции, которые регулярны в окрестности её стационарной точки. Обычно имеется в виду, что стационарная точка вещественна.

В принципе, регулярная итерация может использоваться и для случаев, когда стационарная точка передаточной функции не вещественна. При этом суперфункция может строиться по тем же формулам, но получаемая суперфункция тоже не вещественна и её применение в физике проблематично. Поэтому в этой главе я в первую очередь имею в виду случай вещественно-голоморфной передаточной функции, её вещественной стационарной точки и её вещественно-голоморфной суперфункции.

Речь идет о решениях F передаточного уравнения (2.7)

$$F(z+1) = T(F(z))$$

Я считаю, что передаточная функция T реально-голоморфна и стационарная точка L вещественна; $T(L) = L$. Для определенности предположим, что $T'(L) > 0$.¹ Ниже, рассмотрена общая формула, а потом предлагаются несколько её реализаций для специфических передаточных функций.

¹Предположение $T'(L) > 0$ естественно. Случай $T'(L) < 0$ трудно интерпретировать в терминах вещественных значений нецелой итерации, так как $T^{n'}(L)$ должна стремиться к единице при $n \rightarrow 0$. Читатели могут рассмотреть также случай, когда $T'(L) = 0$.

1 Общая формула

Для передаточного уравнения (2.7), решение F , экспоненциально стремящееся к L , можно аппроксимировать так:

$$\tilde{F}(z) = L + \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + .. \quad (6.1)$$

где

$$\varepsilon = \exp(kz) \quad (6.2)$$

Здесь k есть константа, имеющая смысл инкремента, и a суть тоже константы, не зависящие от z . Имея в виду приложения к физике (и, в частности, к лазерной науке), здесь рассматривается случай, когда передаточная функция T и её суперфункция F вещественно-голоморфны, то есть $T(z^*) = T(z)^*$ и $F(z^*) = F(z)^*$.

В принципе, рассмотрение можно обобщить, добавляя в правую часть уравнения (6.1) слагаемые, не полиномиальные по ε . Следуя декларациям Введения, здесь я рассматриваю простой (хотя и нетривиальный) случай.

При подстановке $F \rightarrow \tilde{F}$ в передаточное уравнение (2.7)

$$F(z+1) = T(F(z))$$

в левой части уравнения оказывается выражение

$$\tilde{F}(z+1) = L + e^k \varepsilon + a_2 e^{2k} \varepsilon^2 + a_3 e^{3k} \varepsilon^3 + .. \quad (6.3)$$

а в правой -

$$\begin{aligned} T(\tilde{F}(z)) = & L + T' \cdot \varepsilon + T' \cdot a_2 \varepsilon^2 + T' \cdot a_3 \varepsilon^3 + .. \\ & + \frac{T''}{2} (\varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + ..)^2 + \frac{T'''}{6} (\varepsilon + ..)^3 + .. \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $T' = T'(L)$, $T'' = T''(L)$, $T''' = T'''(L)$, ..

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε в выражениях (6.3) и (6.4) дает уравнение для параметра k и коэффициентов a :

$$e^k = T' \quad (6.5)$$

$$e^{2k} a_2 = T' a_2 + T''/2 \quad (6.6)$$

$$e^{3k} a_3 = T' a_3 + T'' a_2 + T'''/6 \quad (6.7)$$

..

Цепочка таких уравнений легко решается и определяет

$$k = \ln(T') \quad (6.8)$$

$$a_2 = \frac{T''/2}{(T' - 1)T'} \quad (6.9)$$

$$a_3 = \frac{T''a_2 + T'''/6}{((T')^2 - 1)T'} \quad (6.10)$$

..

Для несложных передаточных функций, встроенные операции асимптотического анализа в таких пакетах как Математика и Клен позволяют в реальном времени вычислять десятки коэффициентов a . Оборванный ряд в представлении (6.1) дает хорошую аппроксимацию для F при $\varepsilon \ll 1$. Для положительных значений k , это соответствует большим отрицательным значениям $\Re(z)$. Для иных значений, для аппроксимации суперфункции используется итерация

$$F(z) \approx T^n(\tilde{F}(z - n)) \quad (6.11)$$

при достаточно больших положительных значениях n для положительного k и при достаточно больших отрицательных значениях n для отрицательного k . (Случай $k=0$ квалифицируется как экзотический и рассматривается ниже в специальной главе про экзотические итерации.) Такое представление во многих случаях позволяет оценивать суперфункцию с требуемой точностью. В частности, так оценивается суперэкспонента по основанию $b < \exp(1/e)$ [50], суперфакториал [51] и голоморфные расширения логистической последовательности [57] и подпоследовательности Коллатца [93].

Этот случай называется регулярной итерацией, так как итерация по формуле (2.9), то есть $T^n(z) = F(n + F^{-1}(z))$ оказывается голоморфной (“регулярной”) функцией в окрестности стационарной точки $z = L$. В случае вещественных значений L , можно ожидать, что именно регулярная итерация соответствует физически-осмысленному решению F передаточного уравнения (2.7). Следуя аксиомам ТОРИ, я пытаюсь подтвердить или опровергнуть эту конъекцию. Подтверждения получились, а насчет опровержения - после нескольких лет поисков, мне не удалось найти ни одного случая, когда физически-осмысленное решение передаточного уравнения (2.7) для $T(L) = L$, $T'(L) > 0$, $L = L^*$ не выражалось бы через регулярную итерацию. В этом смысле можно считать научным фактом, что именно регулярная итерация дает физически-осмысленное решение.

2 Метод проб и ошибок против дедукции

Этот раздел пишется для тех математиков, которые считают дедукцию царицей доказательств, а все проверки с частными случаями считают упражнениями ниже своего достоинства. Ниже предлагается философское (и несколько лирическое) отступление от генеральной линии изложения. Речь идет об интерпретации термина “научный факт”, использованного в предыдущей секции.

Мне приходилось иметь дело с математиками, которые в качестве подтверждения концепции признают только её строгий математический вывод. Я был склонен принять такую точку зрения, но меня отвратило одно неумолимое эмпирическое наблюдение: Результаты, полученные в результате “чистой”, строгой дедукции, чаще оказываются ошибочными, чем “догадки” (конжекции), сделанные на основе анализа частных случаев и подтвержденные попытками опровергнуть результат.

Об одном случае, иллюстрирующем упомянутую выше закономерность, рассказал Юрий Широков. Он работал с одной Аспиранткой, и предложил ей рассчитать некоторую физическую зависимость. Аспирантка долго мучилась с выводом, но провела расчет и принесла формулу. Юрий посмотрел и сказал: “У вас ошибка”. Аспирантка повторила свои выкладки, и стала настаивать на своем результате. Она требовала, чтобы Юрий проверил её расчеты. Юрий проверять расчеты не хотел. Аспирантка почти насильно заставила Юрия проследить её дедукцию. Они вместе проверяли строчку за строчкой, Юрий читал и говорил “Угу”, но в последней строчке, когда потребовалось применить формулу из справочника, Юрий сказал: “Здесь ошибка”. Аспирантка открыла Градштейна-Рыжика и показала формулу. Юрий посмотрел на формулу и повторил, что формула неверна. В той формуле было достаточно положить параметр равным нулю, чтобы увидеть, что равенство нарушено. Аспирантка обиделась: в списке опечаток, который добавлялся к каждому новому переизданию, про пресловутую формулу ничего не было. Юрий сказал: “Значит, будет”. Но он не смог убедить Аспирантку, что если она пользуется неверной формулой, и не считает нужным сделать проверку, хотя бы для частных случаев, то это её вина.

Я тоже не без греха. В расчет усиления при выжигании пространственных дыр закралась ошибка [36, 37]. Общая формула не использовалась для оценок, и ошибка не была выявлена сразу. С тех пор я не надеюсь, что соавторы выловят ошибки, и стараюсь не предлагать расчеты, которые не используются для построения рисунков и формулировки основного “мессаджа” (абстракта и заключения) статьи. Это соответствует аксиоме 6: надо рассматривать самые простые построения, которые всё ещё приводят к нетривиальной концепции.

Иногда мне не удавалось убедить коллег, указывая на противоречия их концепций; приходилось продираться сквозь выкладки и публиковать соответствующий ерратум. Некоторые такие примеры упомянуты в УФН [55] и J.Mod.Phys.[72]. На основе этих наблюдений, я считаю, что применение аксиом ТОРИ более эффективно и надежно, чем громоздкая дедукция, претендующая на математическую строгость. В идеале, конечно, желательно сочетать и математическую строгость, и всяческие проверки частных случаев, асимптотик и численных расчетов.

Всего один раз я столкнулся со случаем, когда четырнадцать значащих цифр оказалось недостаточно для численного опровержения гипотезы о том, что две голоморфные функции тождественно совпадают [50]. Я был почти уверен в том, что эта разница вылезет при достаточно аккуратных расчетах, так как две голоморфных функции не могут совпадать на вещественной оси, если они отличаются хоть где-то в связной области их голоморфизма. Для вещественного аргумента, разница между значениями функций проявляется в 25-м десятичном знаке. Этот случай упомянут ниже в главе 16.

В физической математике, строгая дедукция не является царицей доказательств; примерно так же, как в правовом обществе признание обвиняемого не является царицей доказательств его вины. Если утверждение удастся доказать строго, то есть вывести на основе четкой математической выкладки - хорошо, но это не избавляет исследователя от необходимости проверять частные случаи и пытаться построить хотя бы один опровергающий пример. В следующей секции я пытаюсь построить такой опровергающий пример.

3 Пример с известным ответом: опять Доуа.

В этой секции я показываю, как работает регулярная итерация. Для этого используется пример с известным ответом, а именно - функция Доуа из предыдущей главы, формула (5.12). График этой функции повторен на рисунке 6.1 толстой кривой.

Для функции Доуа, суперфункцией является $F = \text{Tan}ia$; свойства этих функций и способы их вычисления описаны [74, 89, 90]. Однако допустим, что мы (Читатель и я) не знаем простого аналитического представления суперфункции F не знаем её асимптотического поведения, разложения в ряд и т.п.; однако из физических соображений подозреваем, что на минус бесконечности F экспоненциально стремится к стационарной точке $L=0$ функции Доуа, и пытаемся вычислять суперфункцию F с помощью регулярной итерации.

Пусть вдоль вещественной оси и её окрестностей, передаточная функция выражается по формуле (5.13), я повторю её ещё раз:

$$T(z) = \text{Doya}(z) = \text{LambertW}(1 + z e^z) \quad (6.12)$$

Свойства функции LambertW [94, 95, 96, 97] известны; в принципе, эта функция может рассматриваться без ссылок на функцию Tania, эмулируя ситуацию, когда суперфункция F неизвестна.

Передаточная функция $T = \text{Doya}$ может описывать некоторый идеализированный усилитель с насыщением, в пренебрежении спонтанной эмиссией излучения; при этом стационарная точка $L = 0$, поскольку $T(0) = 0$. При малой интенсивности на входе, коэффициент усиления равен e , но при интенсивностях порядка единицы, усиление насыщается; тогда приращение интенсивности при прохождении усилителя слабо зависит от интенсивности на входе.

При малых значениях аргумента, функция T может быть аппрок-

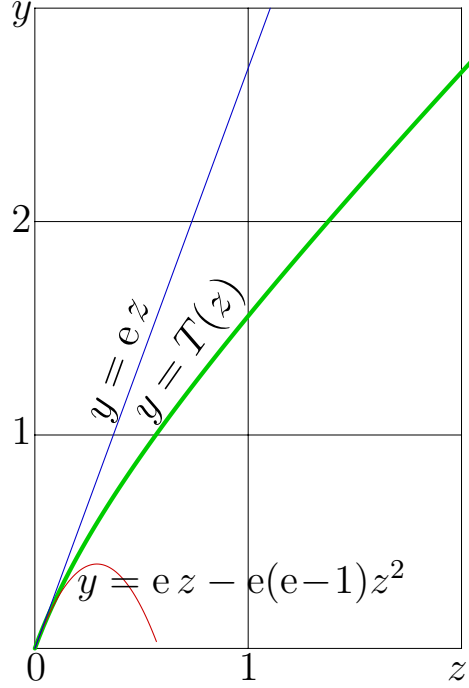


Рис. 6.1: $T = \text{Doya}$ и её линейная и квадратичная аппроксимации

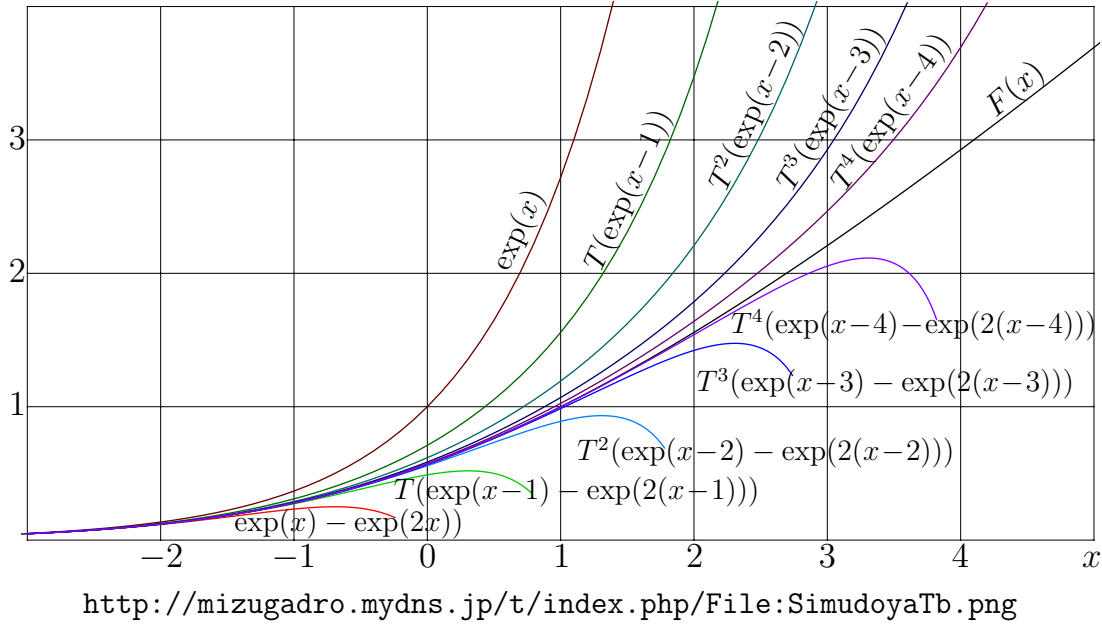


Рис. 6.2: суперфункция F и её аппроксимации \tilde{F} по формуле (6.11) для $n=0..4$

симирована полиномом;

$$\text{Doya}(z) = ez - e(e-1)z^2 + O(z^2) \quad (6.13)$$

при этом $T'(0) = e$ и $T''(0) = -2e(e-1)$. Линейная и квадратичная аппроксимации функции T тоже показаны на рисунке 6.1.

Для регулярной итерации, по формулам (6.8) и (6.9) находим, что для такой передаточной функции $k=1$, и $a_2 = -1$. Таким образом, первичное приближение с одним слагаемым для суперфункции - это просто экспонента,

$$\tilde{F}(z) = \exp(z) \quad (6.14)$$

а учет двух слагаемых дает

$$\tilde{F}(z) = \exp(z) - \exp(2z) \quad (6.15)$$

Эти первичные аппроксимации показаны на рисунке 6.2 верхней и нижней кривыми. На этом же графике построены четыре итерации этих первичных аппроксимаций по формуле (6.11) для $n=0..4$. Эти аппроксимации приближаются к точному решению

$$F(z) = \text{Tania}(z-1) = \text{WrightOmega}(z) \quad (6.16)$$

показанному на рисунке 6.2 чуть более толстой кривой.

Пример с передаточной функцией Doya показывает эффективность регулярной итерации. В последующих главах Книги рассмотрены ещё передаточные функции, для которых регулярная итерация даёт красивые суперфункции.

4 Уравнение Шрёдера

Именно для регулярной итерации, наряду с формализмом суперфункций (представленным в этой Книге), может использоваться формализм функций Шрёдера [11, 27] (не представленный в этой Книге). По английски функция Шрёдера называется Schroeder Function, а по-германски - Schröderfunction. Можно предложить также русский аналог, составное слово шрёдерфункция.

Вероятно, даже самые страстные секретутки знают, в чем заключается функция шрёдера, а именно, в том, чтобы резать бумагу. Однако в математике (и даже физической математике), для передаточной функции T , функцией Шрёдера называется не уничтожение документов, а решение g уравнения Шрёдера

$$g(T(z)) = s g(z) \quad (6.17)$$

где s есть некоторая константа. Обычно предполагают, что $T(0)=0$, то есть ноль является стационарной точкой передаточной функции. Решение уравнения (6.17) можно искать в виде асимптотического разложения

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p z^p \quad (6.18)$$

где коэффициенты a не зависят от z . Даже если серия в правой части выражения (6.18) расходится, такое представление можно использовать для аппроксимации g при малых значениях модуля аргумента. При этом сколь угодно точное (с любой требуемой точностью) решение g может быть получено применением уравнения (6.17) или его обратного

$$g(z) = s g\left(T^{-1}(z)\right) \quad (6.19)$$

в зависимости от того, что меньше, $|T(z)|$ или $|T^{-1}(z)|$.

Чтобы не повторять здесь формализм функций Шрёдера, отмечу, что имеет место аналогия между функцией Шрёдера и функцией Абеля. Пусть

$$G(z) = \log_s(g(z)) \quad (6.20)$$

логарифмируя обе части уравнения (6.17), я получаю уравнение

$$G(T(z)) = 1 + G(z) \quad (6.21)$$

что есть ничто иное как уравнение Абеля для той же самой передаточной функции T . Похожим образом выражается аналог суперфункции. Читателю предлагается построить регулярные итерации каких-либо передаточных функций, рассмотренных в этой Книге, используя функцию Шрёдера и её обратную функцию вместо стандартного (по крайней мере для этой Книги) использования абель-функции и суперфункции. Регулярные итерации, построенные для стационарной точки ноль с помощью функции Шрёдера и её обратной функции, совпадают с итерациями, построенными через функцию Абеля и суперфункцию.

Таким образом, использование формализма Шрёдера, там, где он применим, не дает ничего нового по сравнению с использованием формализма суперфункций. Поэтому в этой Книге я решил воздержаться от рассмотрения этого формализма. Впрочем, если кто-либо предложит пример, который решается с помощью функций Шрёдера, но не решается через функции Абеля, я готов пересмотреть моё отношение к функции Шрёдера и уравнению Шрёдера.

На этом я заканчиваю спекуляции на тему Шрёдера и возвращаюсь к суперфункциям, абельфункциям и итерациям. В следующей главе рассмотрены регулярные итерации относительно простой квадратичной функции, а именно - логистического оператора, или логистического отображения.

Название “логистическое отображение” выглядит абсурдно длинным, примерно как “дигидрогена монооксид” (рис. 6.3), но именно термин “логистическое отображение” используется коллегами. Когда устоится более короткое название, я готов использовать более удобные обозначения.

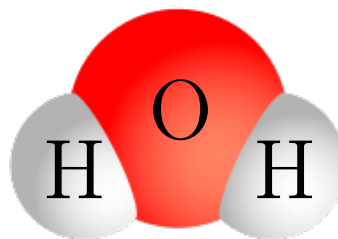


Рис. 6.3: Дигидрогена монооксид

Глава 7

Логистическое отображение

Термином “логистический оператор” или “логистическое отображение” (http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map) обозначается квадратичная функция

$$T(z) = s z (1 - z) \quad (7.1)$$

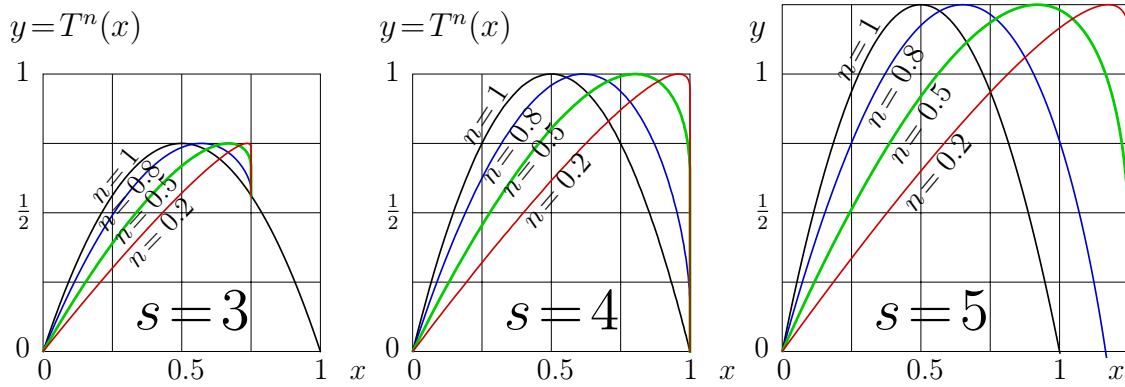
Параметр s обычно считается положительным числом. Логистическая последовательность F определяется логистическим уравнением

$$F(z+1) = T(F(z)) \quad (7.2)$$

которое дословно совпадает с передаточным уравнением (2.7), и, по существу, таковым и является; ещё требуется задать начальное условие $F(0)$. Обычно подразумевается, что $0 < F(0) < 1$.

В публикациях про уравнение (7.2) с передаточной функцией (7.1), аргумент функции F считается целым числом [25, 28, 30, 46]. Уравнение (7.2) “ухватывает” некоторые свойства перехода физических систем к хаосу [45, 22, 21]. Итерации передаточной функции (7.1) можно рассматривать как грубое приближение для описания стохастических физических систем и задач гидро- и аэро- динамики, а также переходного поведения стохастических лазеров, в частности, вблизи одномодового режима генерации.

Мой учитель квантовой механики Елютин Павел Вячеславович, узнав о моих амбициях в связи с суперфункциями, попросил [48] меня построить половинную итерацию логистического отображения и континуальное обобщение логистической последовательности (7.1), что я и сделал [57]. Основные результаты упомянутой статьи представлены в этой главе.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi1a345T300.png>

Рис. 7.1: Итерации логистического отображения (7.1): $y = T^n(x)$ для $s = 3$, слева; для $s = 4$, по центру; для $s = 5$, справа

1 Логистическая последовательность

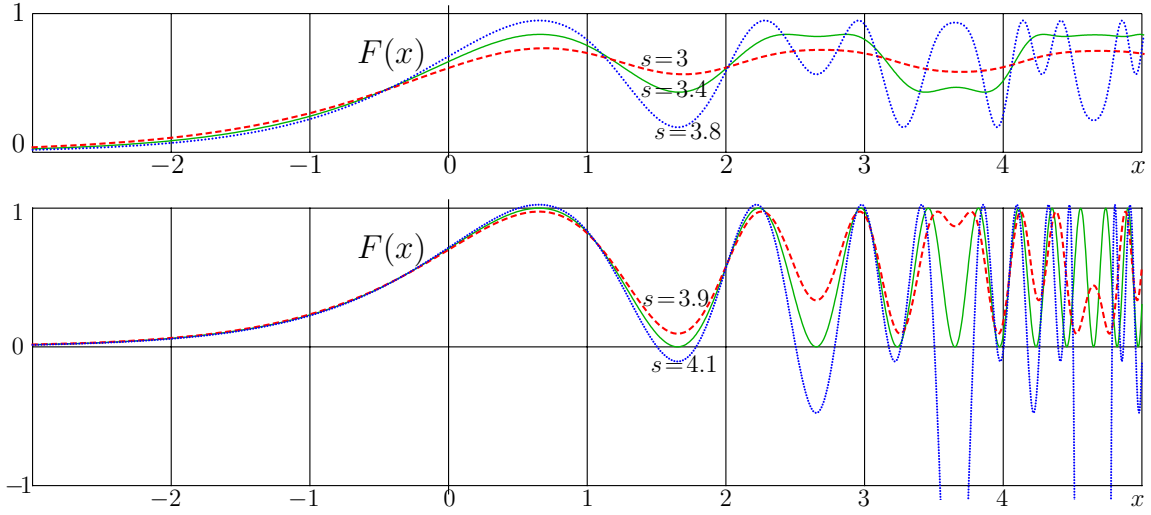
Графики итераций логистического отображения T , определенного формулой (7.1), как функций вещественного аргумента, представлены на рисунке 7.1 для $s = 3$ (левая картинка) $s = 4$ (центральная картинка) и $s = 5$ (правая картинка); показаны итерации $y = T^n(x)$ для $n = 0.2$, $n = 0.5$, $n = 0.8$ и $n = 1$.

Все графики рисунке 7.1 построены по одной и той же формуле,

$$T^n(z) = F(n + G(z)) \quad (7.3)$$

где F есть суперфункция, решение уравнения (7.2), а $G = F^{-1}$ есть её обратная функция (то есть абельфункция логистического отображения). Суперфункция F , собственно, и есть “голоморфное расширение логистической последовательности”. Суперфункция F построена с помощью регулярной итерации, описанной в предыдущей главе.

При построении суперфункции, ключевым является вопрос о стационарных точках передаточной функции. Для квадратичной передаточной функции T по формуле (7.1), уравнение $T(z) = z$ имеет два решения, $z = 0$ и $z = 1 - 1/s$. Первое из этих решений не зависит от s . Это решение используется для вычисления “голоморфного расширения логистической последовательности”, то есть суперфункции F , и абельфункции $G = F^{-1}$ и, соответственно, для построения рисунка 7.1 по формуле (7.3). Это вычисление описано ниже.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:LogisticSecK2.jpg>

Рис. 7.2: $F(x) = \text{LogisticSequence}_s(x)$ по формулам (7.4), (6.11), (7.8) для $s=3$, $s=3.4$, $s=3.8$, вверху и для $s=3.9$, $s=4$, $s=4.1$, внизу

2 Стационарная точка $L=0$

Для логистической передаточной функции T по формуле (7.1), в разложении (6.1) можно положить $k = \log s$; тогда $\varepsilon = s^z$; это дает разложение для начальной аппроксимации суперфункции в виде

$$\tilde{F}(z) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n s^{nz} + \mathcal{O}(s^{Nz}) \quad (7.4)$$

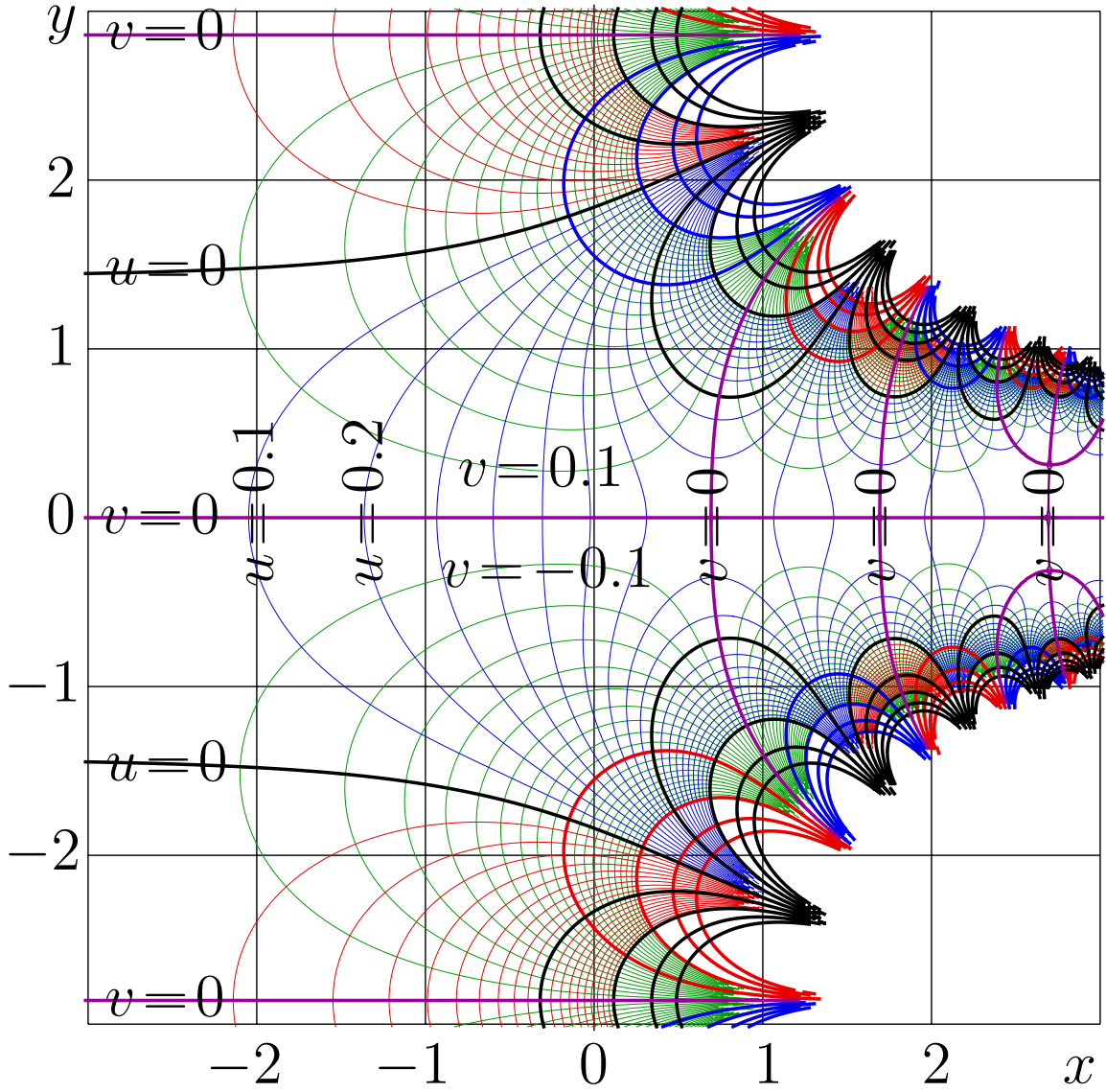
Для соответствия с представлением (6.1), удобно положить $a_1 = 1$. Выбор этого коэффициента влияет лишь на трансляцию аргумента полученной суперфункции. Формулы (6.9) определяют коэффициенты a . В частности,

$$a_2 = \frac{1}{1-s} \quad (7.5)$$

$$a_3 = \frac{2}{(1-s)(1-s^2)} \quad (7.6)$$

$$a_4 = \frac{5+s}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)} \quad (7.7)$$

Первичное приближение $\tilde{F}(z)$ по формуле (7.4) пригодно для аккуратного (прецизионного) вычисления суперфункции $F(z)$ для больших отрицательных значений $\Re(z)$. Логистическая последователь-



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2c3T1000.png>

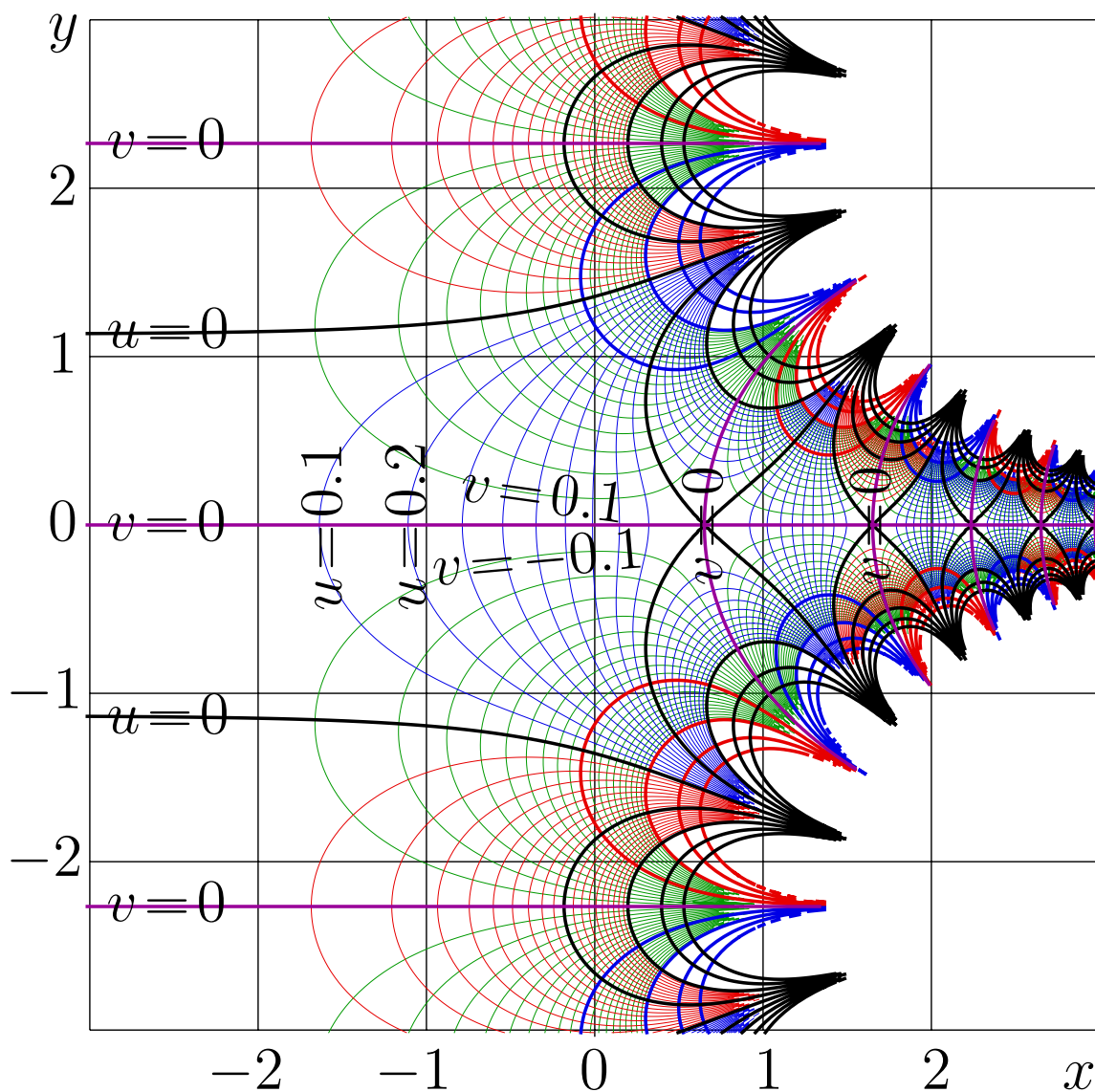
Рис. 7.3: $u+iv = \text{LogisticSequence}_3(x+iy)$.

ность F , показанная на рисунке 7.2, получается как предел

$$\begin{aligned} F(z) &= \text{LogisticSequence}_s(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{LogisticOperator}_s^n \left(\tilde{F}(z-n) \right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Для вещественных значений аргумента, графики суперфункции $F = \text{LogisticSequence}_s$ построены на рисунке 7.2 при $s = 3$, $s = 3.4$, $s = 3.8$ на верхней картинке и при $s = 3.9$, $s = 4$, $s = 4.1$ на нижней картинке. Для $s = 3$, $s = 4$ и $s = 5$, комплексные карты функции $F = \text{LogisticSequence}_s$ показаны на рисунках 7.3, 7.4, 7.5.

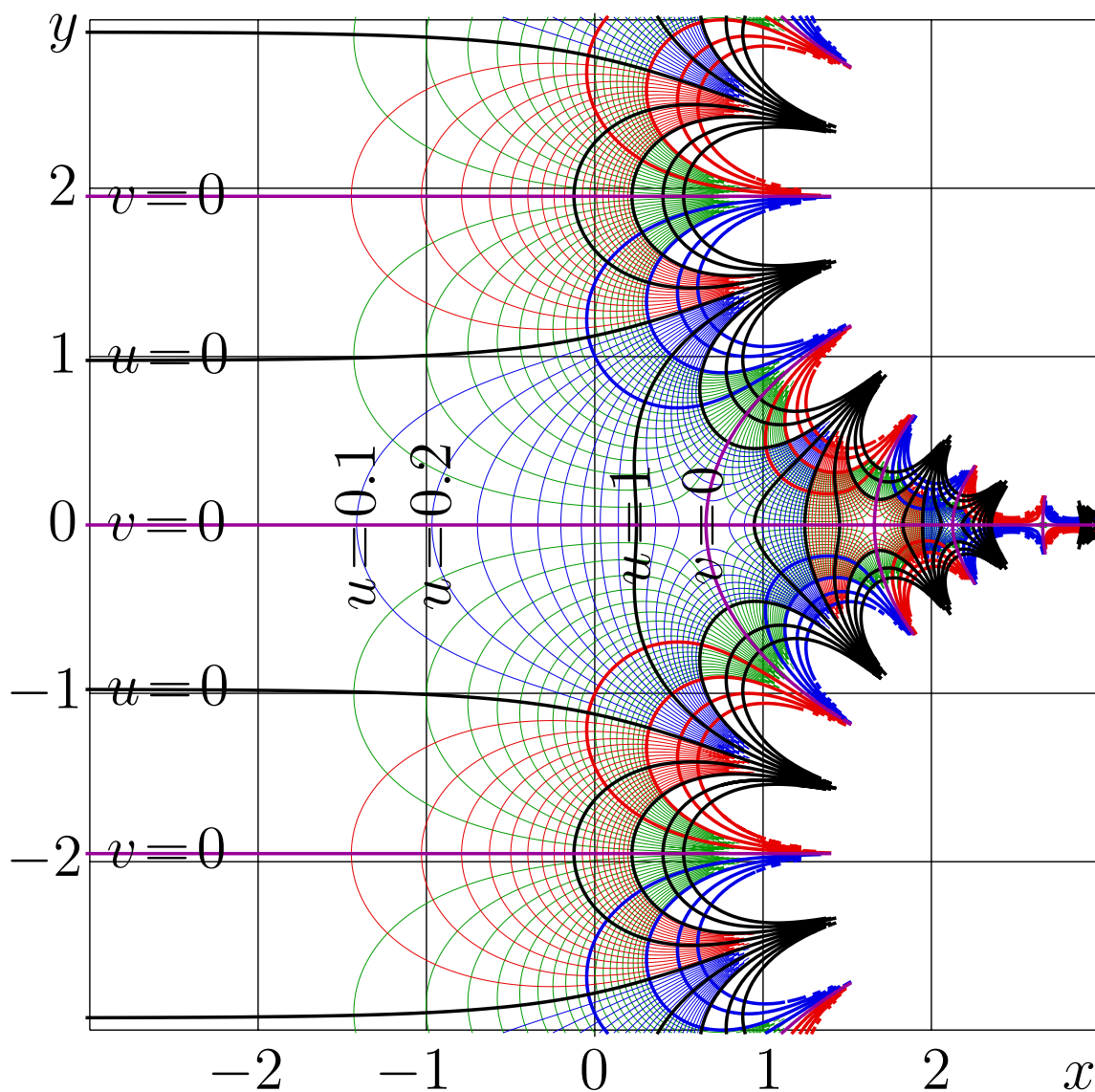
Пока $s < 3.5$ (то есть не превышает “констант Помо-Манневилля” [57, 19, 43]), голоморфное расширение F логистической последова-



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2c4T1000.png>

Рис. 7.4: $u+iv = \text{LogisticSequane}_4(x+iy)$

тельности, как и сама последовательность, демонстрирует достаточно однообразные осцилляции. При больших значениях этого параметра, осцилляции, по мере увеличения аргумента, становятся более сложными и более тесными; наблюдения поведения функции F лишь при целочисленных значениях аргумента создает впечатление квазислучайной последовательности. Пока $s \leq 4$, при вещественном x , функция $F(x)$ колеблется, не выходя из сегмента $[0,1]$, и лишь при $s = 4$ касается краев этого сегмента при каждом колебании. При $s > 4$, функция имеет “провалы”, которые становятся все более глубокими при увеличении значений аргумента и/или параметра s . При $s = 4$, голоморфное расширение логистической последователь-



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2c5T1000.jpg>

Рис. 7.5: $u+iv = \text{LogisticSequane}_5(x+iy)$

ности можно представить в виде элементарной функции,

$$F(z) = (1 - \cos(2^z))/2 \quad (7.9)$$

Для $s = 4$, соответствующую кривую в нижней части рисунка 7.2 можно было бы провести и без метода регулярной итерации. Совпадение значений для случая, когда ответ известен, является тестом, независимым подтверждением адекватности регулярной итерации как метода построения физически-осмысленных суперфункций.

При рассмотрении голоморфного расширения F в комплексной плоскости, её поведение полностью регулярно. Разумеется, колебания этой функции становятся все более частыми по мере увеличения

вещественной части аргумента.

Функция F , построенная на основе регулярной итерации, периодична; её период

$$P = 2\pi i / \ln(s) \quad (7.10)$$

Эта периодичность видна на комплексных картах рисунков 7.5, 7.5, 7.5: изолинии воспроизводятся при соответствующих трансляциях вдоль оси ординат. На этих картах помещается чуть больше одного периода.

Голоморфное расширение логистической последовательности устраняет мистику стохастичности. Последовательности при различных начальных условиях (причем не обязательно вещественных) уместятся на одной комплексной карте.

На основе голоморфного расширения логистической последовательности, можно строить, в частности, половинную итерацию передаточной функции, упомянутую в преамбуле этой главы; но для этого нужна ещё обратная функция, $G = \text{ArcLogisticSequence}_s = \text{LogisticSequence}_s^{-1}$, то есть функция Абеля (или абельфункция) логистического оператора (7.1). Карты этой абельфункции показаны на рисунках 7.6, 7.7, 7.8 для $s = 3$, $s = 4$ и $s = 3$. Эта абельфункция рассмотрена в следующей секции.

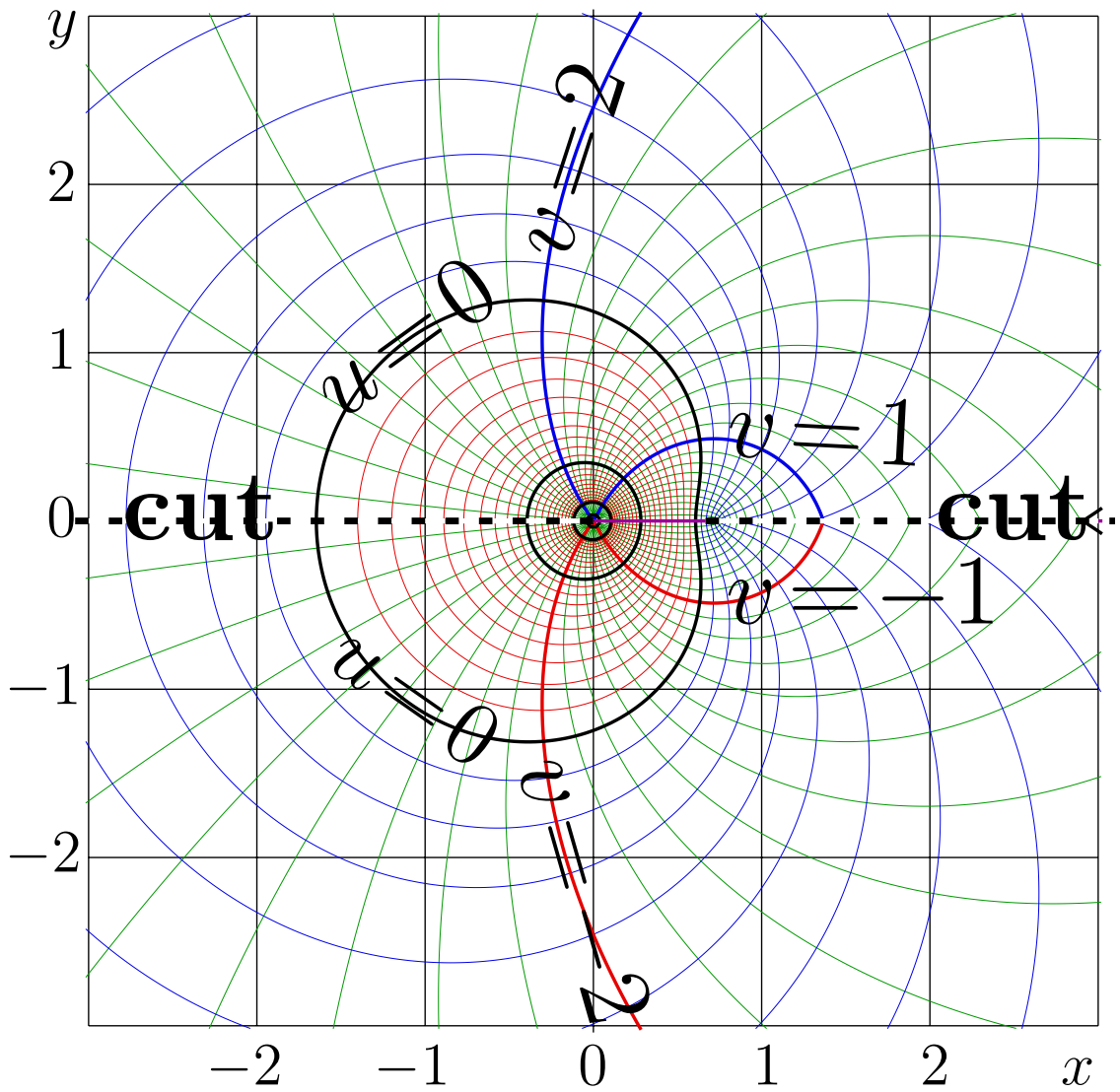
3 Абельфункция для логистического оператора

Функция, обратная к суперфункции F , или абельфункция $G = F^{-1}$, удовлетворяет уравнению Абеля

$$G(T(z)) = G(z) + 1 \quad (7.11)$$

Комплексные карты функции G представлены на рисунках 7.6, 7.7, 7.8. Асимптотическое разложение \tilde{G} для абельфункции G может быть получено обращением разложения (7.4) для суперфункции F ;

$$\tilde{G}(z) = \log_s \left(\sum_{n=1}^{N-1} C_n z^n + O(z^N) \right) \quad (7.12)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2d3t1500.jpg>

Рис. 7.6: $u+iv = \text{ArcLogistic}_3(x+iy)$

На языке Mathematica для этого есть процедура InverseSeries.

Коэффициенты C можно получить также подстановкой разложения (7.12) в уравнение Абеля (7.11) при $T(z) = sz(1-z)$ и приравниванием коэффициентов при равных степенях z . В частности,

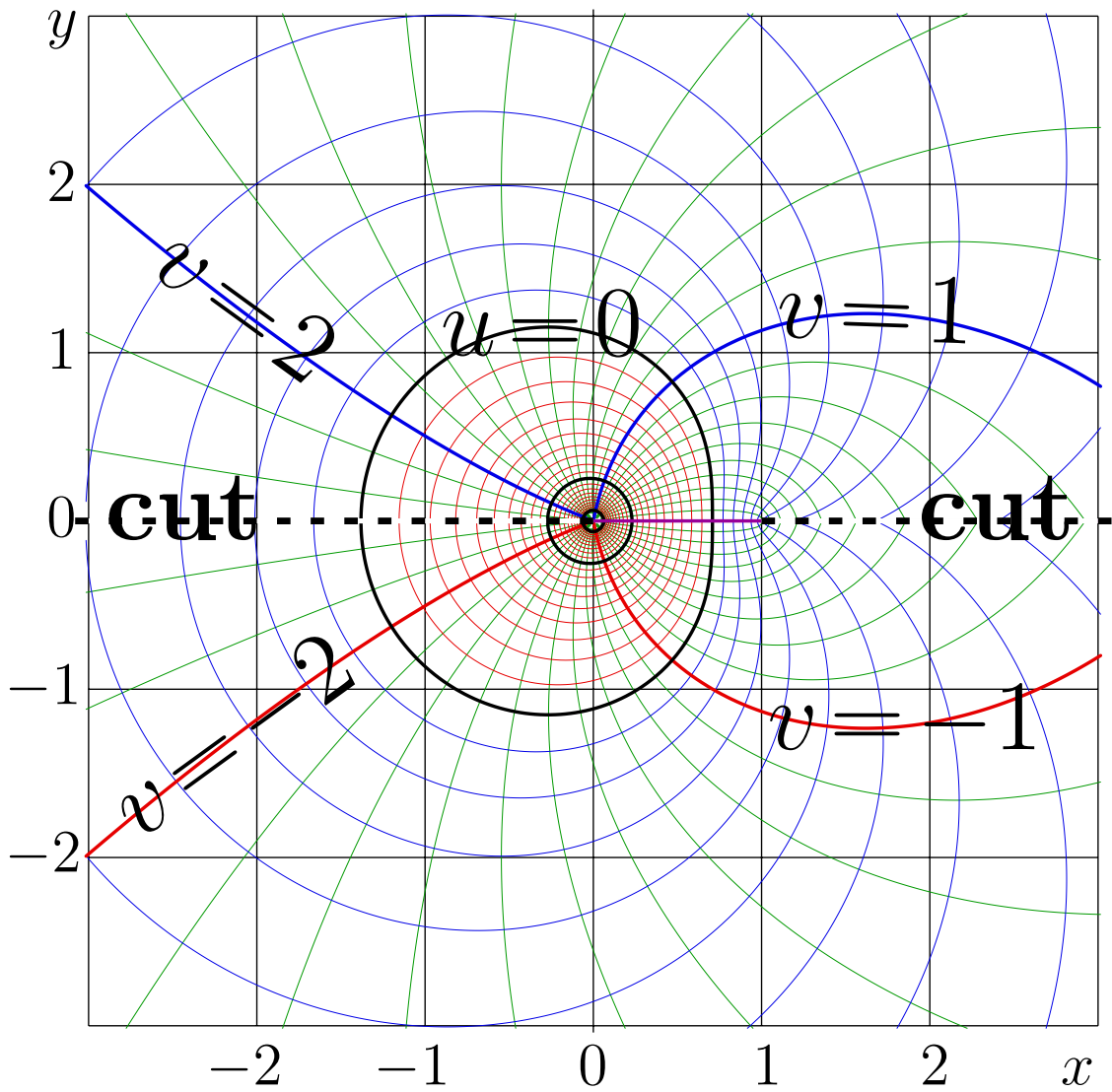
$$C_1 = 1 \quad (7.13)$$

$$C_2 = \frac{1}{s-1} \quad (7.14)$$

$$C_3 = \frac{3s}{(s-1)(s^2-1)} \quad (7.15)$$

$$C_3 = \frac{(s^2-5)s}{(s-1)(s^2-1)(s^3-1)} \quad (7.16)$$

Оборванная серия разложения (7.12) дает способ вычисления абель-



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2d4t1500.jpg>

Рис. 7.7: $u+iv = \text{ArcLogistic}_4(x+iy)$.

функции G при малых значениях аргумента. При больших значениях аргумента используется представление

$$G(z) \approx \tilde{G}(T^{-n}(z)) + n \quad (7.17)$$

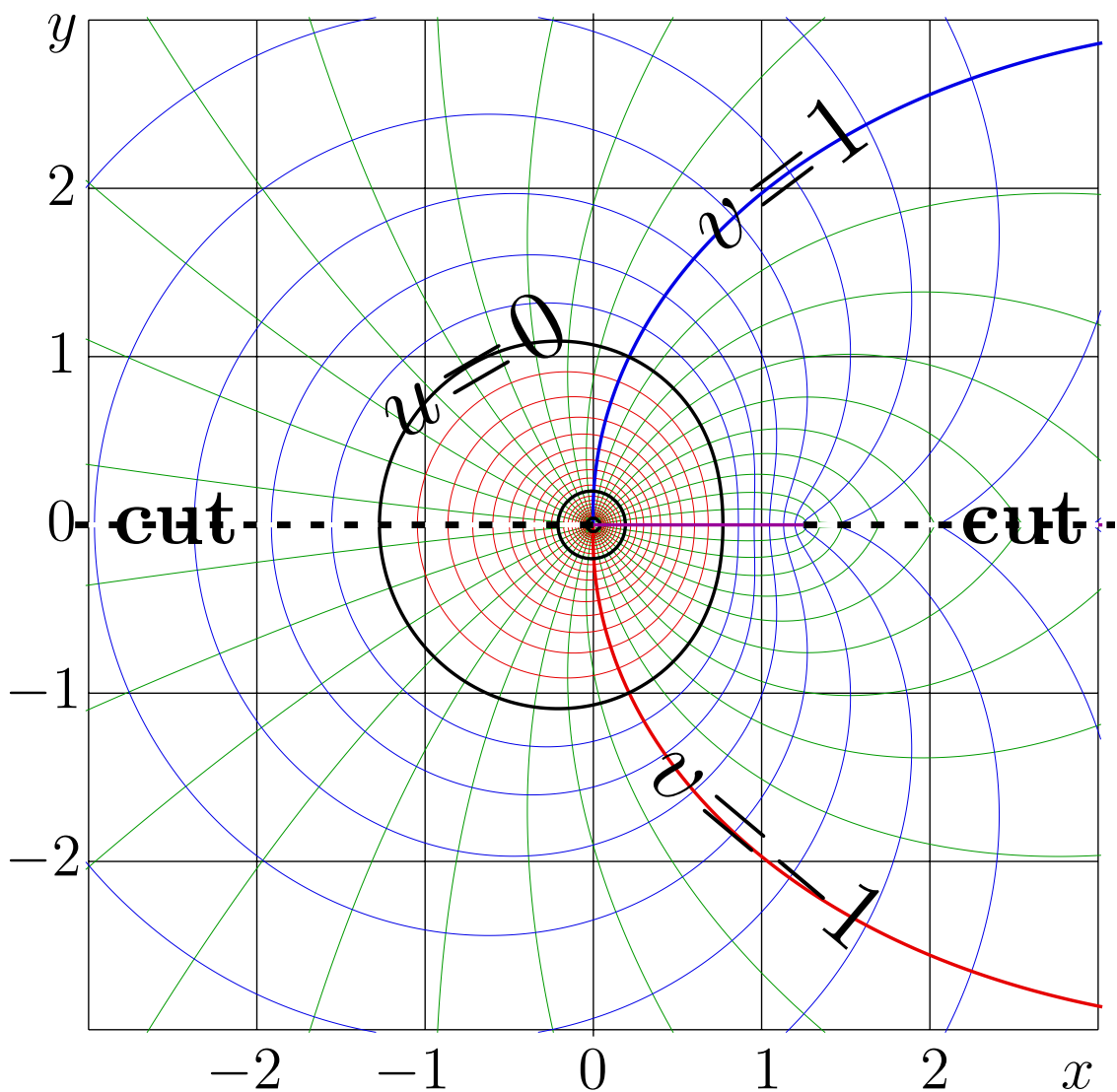
для целого n . Целые отрицательные итерации передаточной функции вычисляются с использованием обратной функции

$$T^{-1}(z) = \text{ArcLogisticOperator}_s(z) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{z}{s}} \quad (7.18)$$

Абельфункция логистического оператора получается как предел

$$\text{ArcLogisticSequence}_s(z) = G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{G}(T^{-n}(z)) + n \right) \quad (7.19)$$

где символ \tilde{G} обозначает оборванную серию в разложении (7.12). Такое представление используется для построения рисунков 7.6, 7.7,



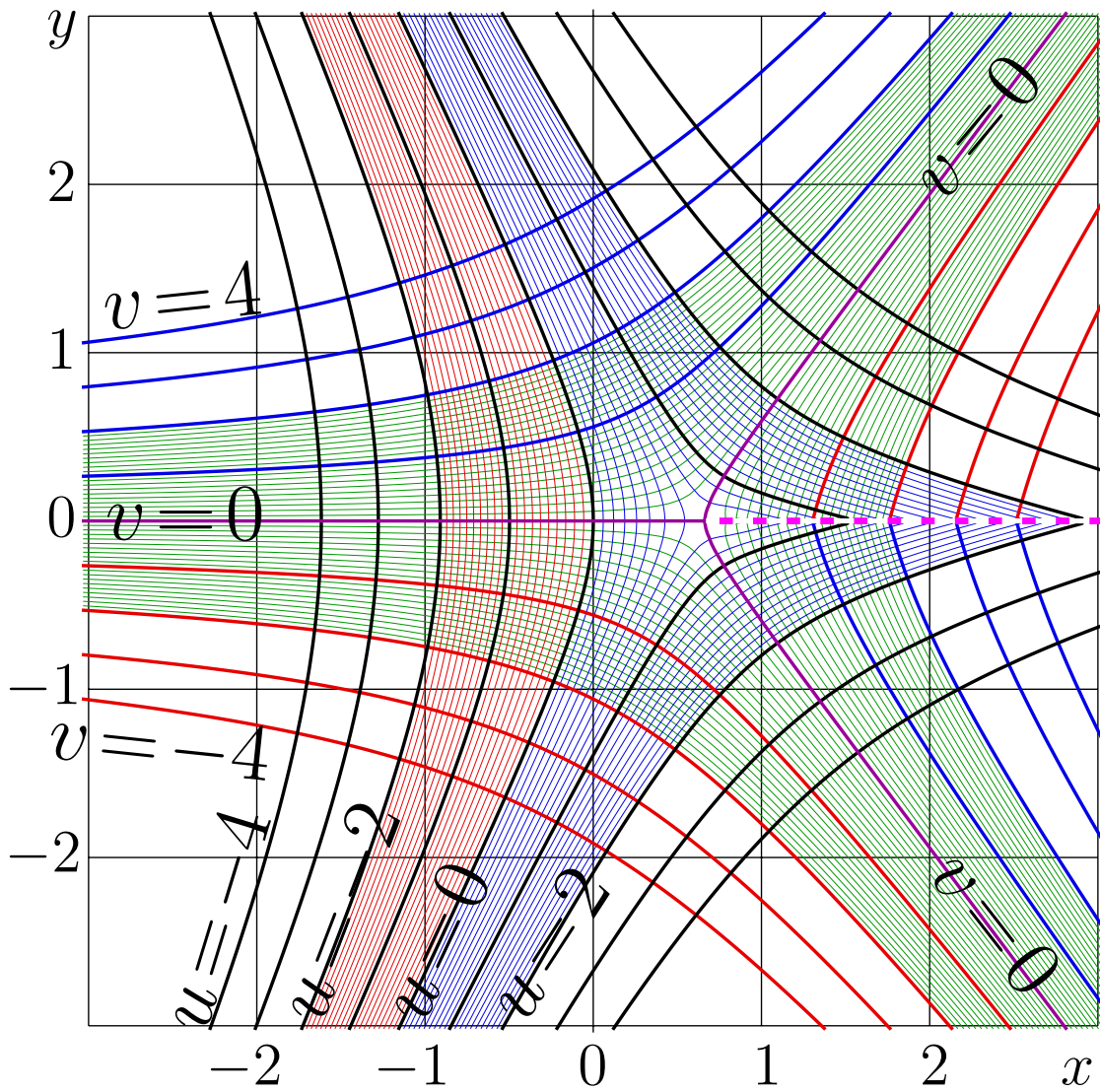
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2d5t1500.jpg>

Рис. 7.8: $u+iv = \text{ArcLogistic}_5(x+iy)$.

7.8 . Это же представление использовано для итераций, показанных на рисунке 7.1. при $s=3$, $s=4$ и $s=5$.

Функция $\text{ArcLogisticOperator}_s(z)$ по формуле (7.18) имеет точку ветвления $z=s/4$. Это ветвление обуславливает ветвление логистической последовательности ArcLogistic_s и разрезы в правых частях карт, показанных на рисунках 7.6, 7.7, 7.8 . Соответствующее ветвление имеют и нецелые итерации, показанные на рисунке 7.1.

Частным случаем нецелой итерации является половинная итерация, упомянутая в преамбуле этой главы. Карты половинной итерации показаны на рисунках 7.9, 7.10, 7.11. Следующая секция посвящена этой половинной итерации.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2b3t1000.jpg>

Рис. 7.9: $u+iv = \text{LogisticOperator}_3^{1/2}(x+iy)$.

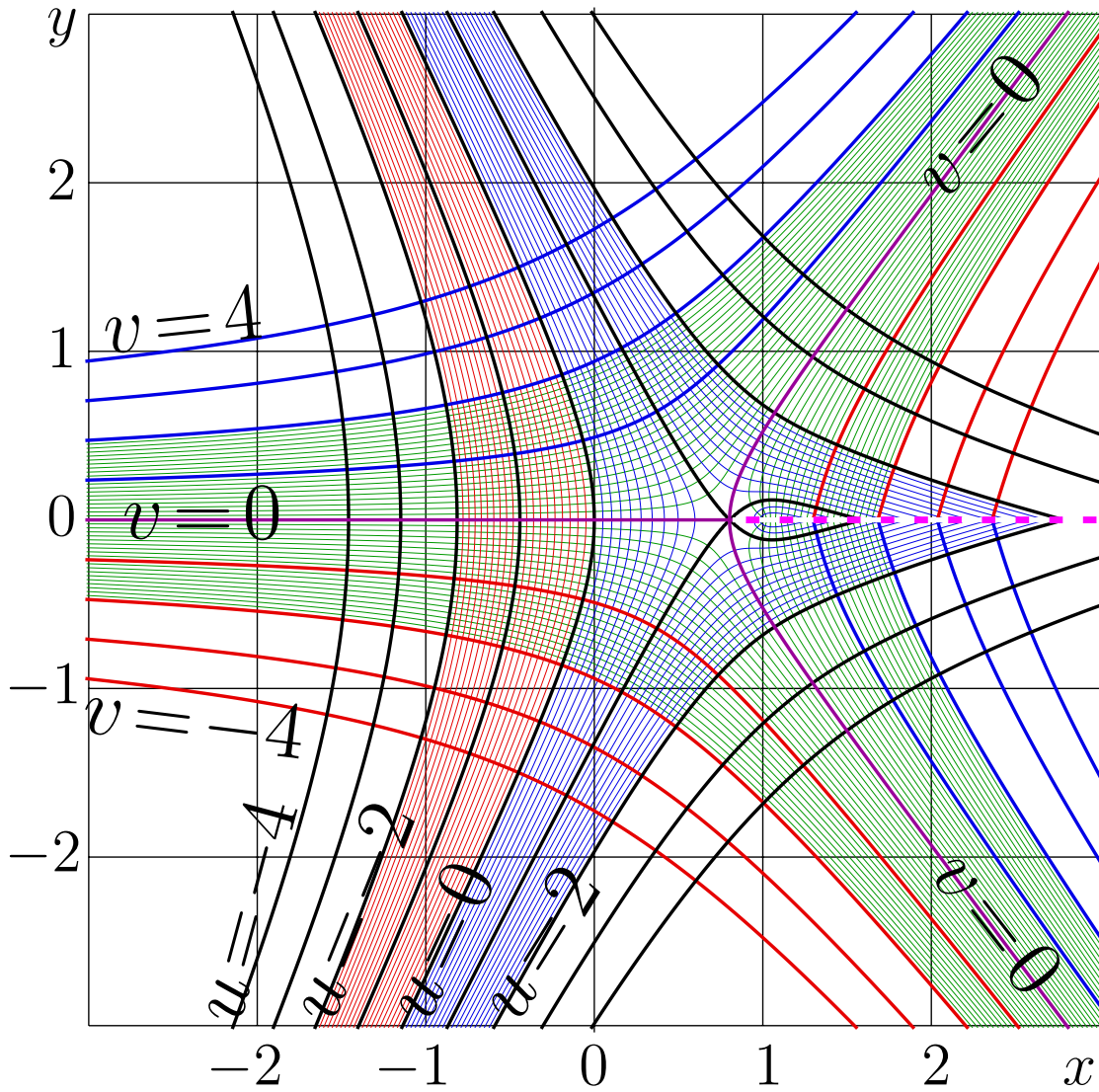
4 Половинная итерация

С функциями F и $G = F^{-1}$, итерации передаточной функции T выражаются по формуле (7.3). Именно так построены графики на рисунке 7.1. В частности, $T^{0.5}$ по формуле (7.3) является решением задачи, поставленной Елютиным: построена функция

$$h = \text{LogisticOperator}_s^{0.5} \quad (7.20)$$

такая, что её вторая итерация дает логистический оператор (7.1); то есть для некоторого множества значений z , имеет место соотношение

$$h^2(z) = h(h(z)) = T(z) = \text{LogisticOperator}_s(z) = s z (1-z) \quad (7.21)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2s4t.jpg>

Рис. 7.10: $u+iv = \text{LogisticOperator}_4^{0.5}(x+iy)$

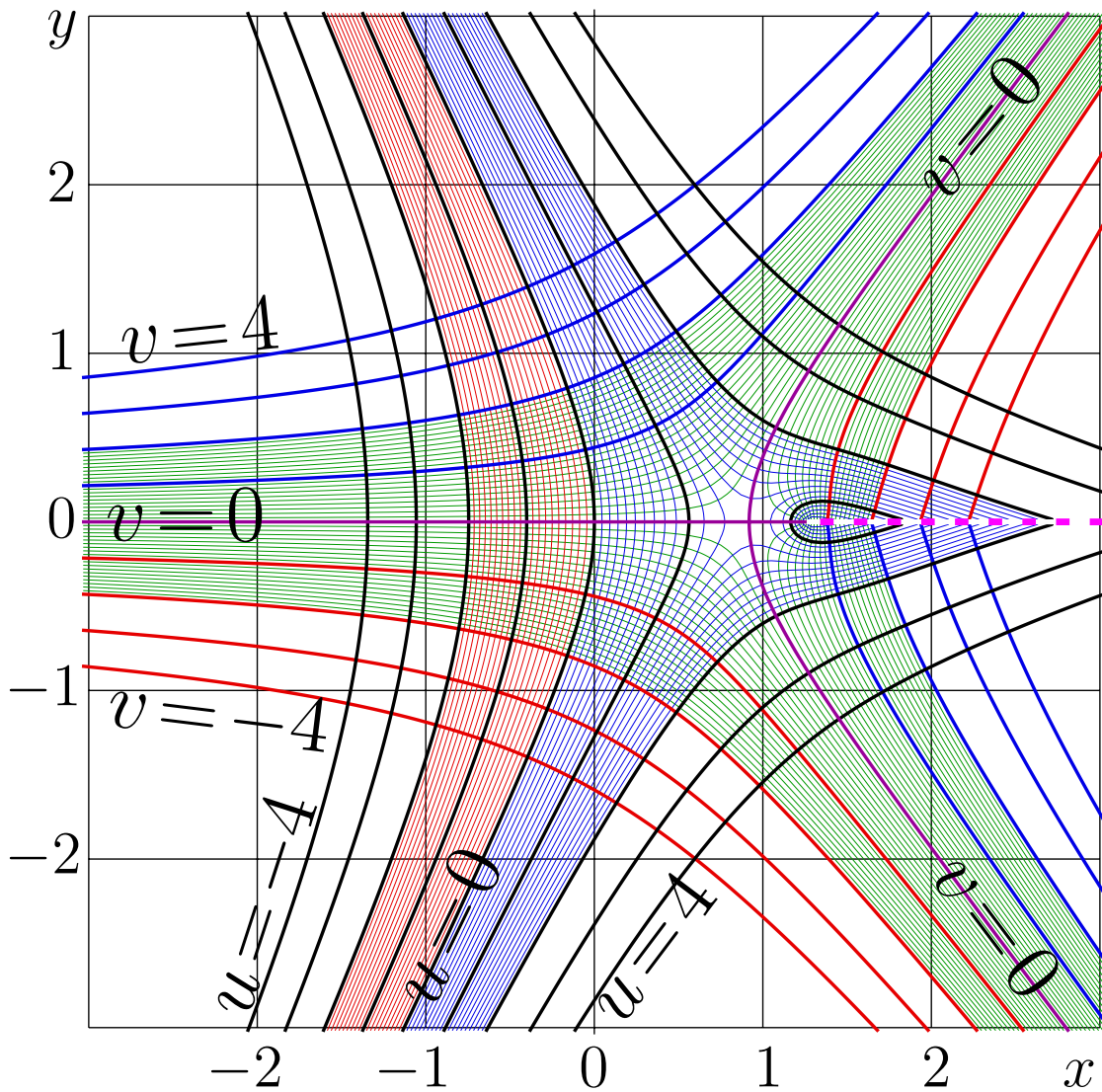
Комплексные карты функции h представлены на рисунках 7.9, 7.10 и 7.11 для различных s .

$$\text{LogisticOperator}_s(z) \approx \tau(z) = -s(-z)^2 \quad (7.22)$$

Итерации функции τ могут вычисляться по аналогии с итерациями передаточной функции по формуле (4.20). Читатели приглашаются построить для такой тау суперфункцию и абельфункцию. Половинная итерация может быть записана так

$$\tau^{1/2}(z) = -\alpha(-z)^{\sqrt{2}} \quad (7.23)$$

где $\alpha = s^{1/(1+\sqrt{2})}$ есть константа, и эта константа медленно зависит от параметра s . На рисунке 7.12 показана карта функции $\tau^{1/2}$ по формуле 7.23 при $\alpha = 1.8$; она похожа на все три карты на рисунках 7.9, 7.10 и 7.11, соответствующих различным значениям s . В



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logi2s5t.jpg>

Рис. 7.11: $u+iv = \text{LogisticOperator}_5^{0.5}(x+iy)$

этих рисунках не удастся направить линию разреза влево, и линии разреза, отмеченные пунктиром, пришлось направить вправо.

При больших значениях x^2+y^2 , карта рисунка 7.12 похожа на карты рисунков 7.9, 7.10 и 7.11 ; лучше даже сказать, что все эти четыре карты похожи между собой. Различие заметно лишь при значениях аргумента порядка единицы. Карты пришлось сделать во всю ширину страницы для того, чтобы это различие было видно без лупы.

После того, как нецелая итерация какой-либо функции построена, полезно проверить, что дают итерации такой итерации. В частности, вторая итерация половинной итерации какой-либо передаточной функции должна давать эту передаточную функцию. Для передаточной функции $\text{LogisticOperator}_s$ и её половинной итерации

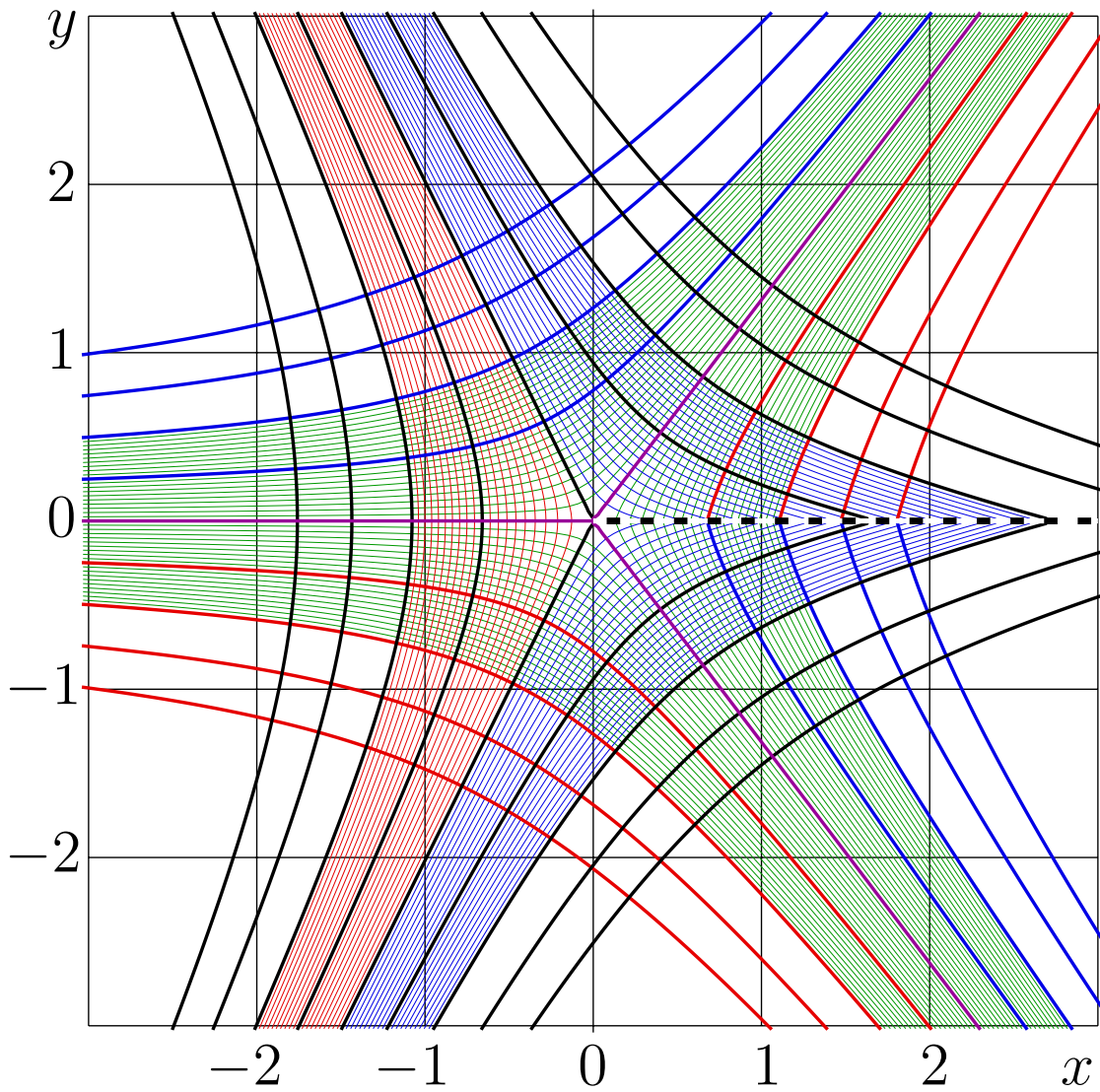
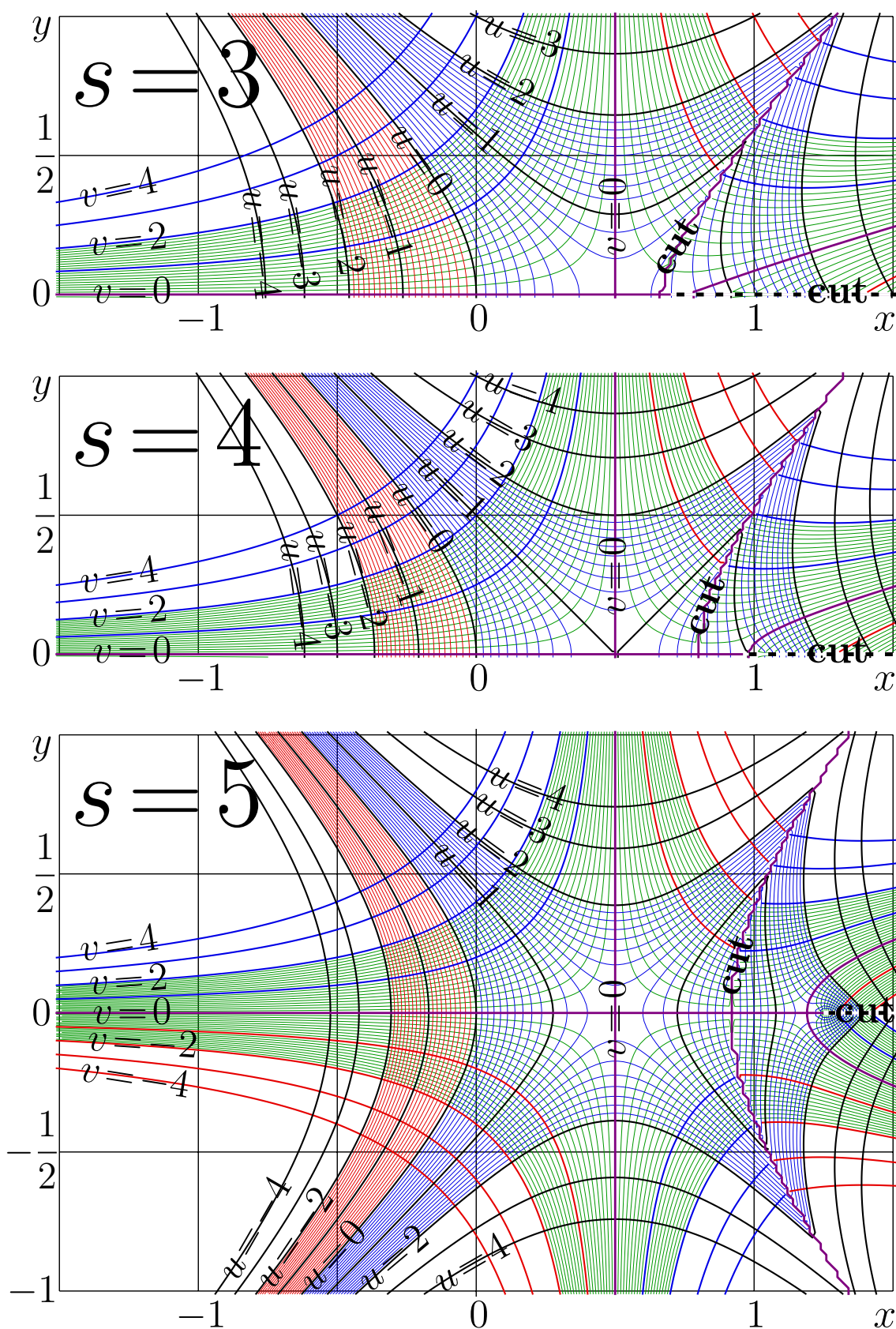


Рис. 7.12: $u+iv = -1.8(-(x+iy))^{\sqrt{2}}$

$h = \text{LogisticOperator}_s^{0.5}$, такая проверка представлена на рисунке 7.13. Показана карта функции h^2 для $s=3$, $s=4$ и $s=5$, то есть для тех же значений параметра, для которых явные графики половинной (и не только половинной) итерации логистического оператора построены на рисунке 7.1. В левой части карт рисунка 7.13, вторая итерация функции h совпадает с логистическим отображением. Дранные линии указывают границы области применимости соотношения (7.21).

Формула $h(h(z)) = T(z)$ годится по крайней мере при $\Re(z) < 1/2$. Об этом можно догадаться также из рисунка. Таким образом, голоморфное расширение логистической последовательности и соответствующие нецелые итерации логистического отображения соответствуют интуитивным ожиданиям насчет таких функций.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Logiha300.jpg>

Рис. 7.13: $u+iv=h(h(x+iy))$ по формуле (7.20) для $s=3$, $s=4$ и $s=5$

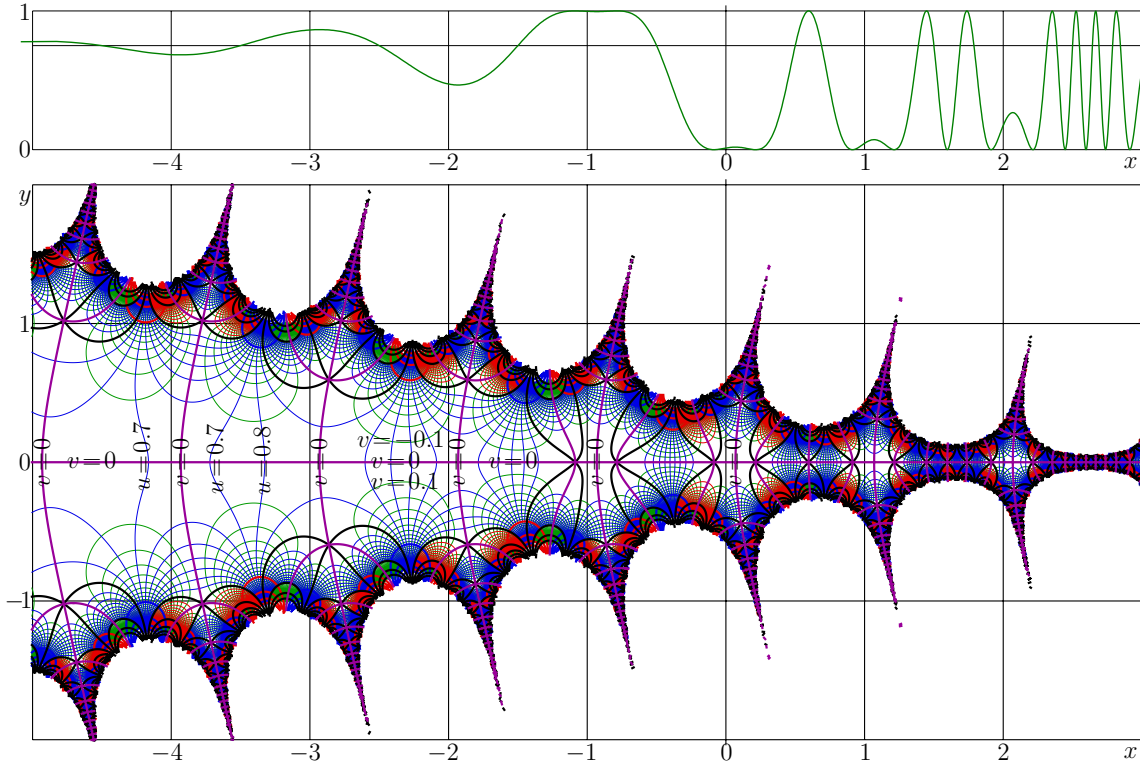


Рис. 7.14: График голоморфного расширения $F(x)$ логистической последовательности, построенного вблизи стационарной точки $L = 1 - 1/s$ по формулам (7.25), (6.11) и комплексная карта этого расширения для $s=4$; $u+iv = F(x+iy)$

5 Иная стационарная точка, $L = 1 - 1/s$

Голоморфное расширение F логистической последовательности по формулам (7.4), (6.11) регулярно и периодически, причем период (7.10) чисто мнимый и слабо (логарифмически) зависит от параметра s . Однако такое расширение далеко не единственно. По аналогии с регулярной итерацией на основе стационарной точки $L = 0$, можно построить решение, которое на минус бесконечности стремится к другой стационарной точке передаточной функции, а именно, $L = 1 - 1/s$. Такое решение показано на рисунке 7.14.

По аналогии с регулярной итерацией, описанной в начале этой главы, асимптотическое решение передаточного уравнения (2.7) для логистической передаточной функции (7.1) около стационарной точки $L = 1 - 1/s$ может строиться в виде

$$\tilde{F}(z) = \frac{s-1}{s} + \sum_{n=1}^{N-1} d_n \left((s-2)^z \cos(\pi z + \varphi) \right)^n \quad (7.24)$$

$$F(z) = \tilde{F}(z) + O\left((s-2)^z \cos(\pi z + \varphi) \right)^N \quad (7.25)$$

где d суть вещественные коэффициенты и φ есть вещественный па-

раметр. Подстановка такого разложения в передаточное уравнение 2.7 и приравнивание коэффициентов при z в одинаковых степенях дает цепочку уравнений для коэффициентов d . Как и ранее, удобно положить $d_1 = 1$; тогда

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{-s}{(s-1)(s-2)} \\ d_3 &= \frac{-s^2}{(s-1)(s-2)(s-3)} \\ d_4 &= \frac{-(s-7)^3 s^3}{(s-2)(s-3)(s^3 - 8s^2 + 22s - 21)} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Такой ряд дает аккуратную аппроксимацию суперфункции $F(z)$, пока эффективный параметр разложения, то есть $(s-2)^z \cos(\pi z + \varphi)$, мал. Оборванная серия (7.25) обеспечивает порядка десятка значащих цифр при

$$\pi|\Im(z)| + \ln(s-2)\Re(z) < 4 \quad (7.27)$$

Расширения области адекватности с помощью итераций (6.11) дает определение алгоритм вычисления такой суперфункции F :

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\tilde{F}(z-n)) \quad (7.28)$$

Суперфункция по формуле (7.28) асимптотически периодична; асимптотический период

$$P = \frac{2\pi}{\ln(s-2)i + \pi} \quad (7.29)$$

в верхней полуплоскости и P^* в нижней полуплоскости.

В отличие от суперфункции, построенной регулярной итерацией около нуля, выбор обратной функции (то есть абельфункции) для функции с разложением (7.25) достаточно сложен; трудно решить, которая из осцилляций “настоящая”; но в принципе функция, показанная на рисунке тоже может считаться голоморфным обобщением логистического оператора. В соответствии с Шестой аксиомой ТОРИ, наиболее простое из решений я считаю основным, а более сложное - дополнительным.

Как и во многих случаях, обычная регулярная итерация (в данном случае около нуля) дает наиболее простое (и в этом смысле “физичное”) решение. Ещё один такой случай рассмотрен в следующей главе.

Глава 8

Корень из факториала

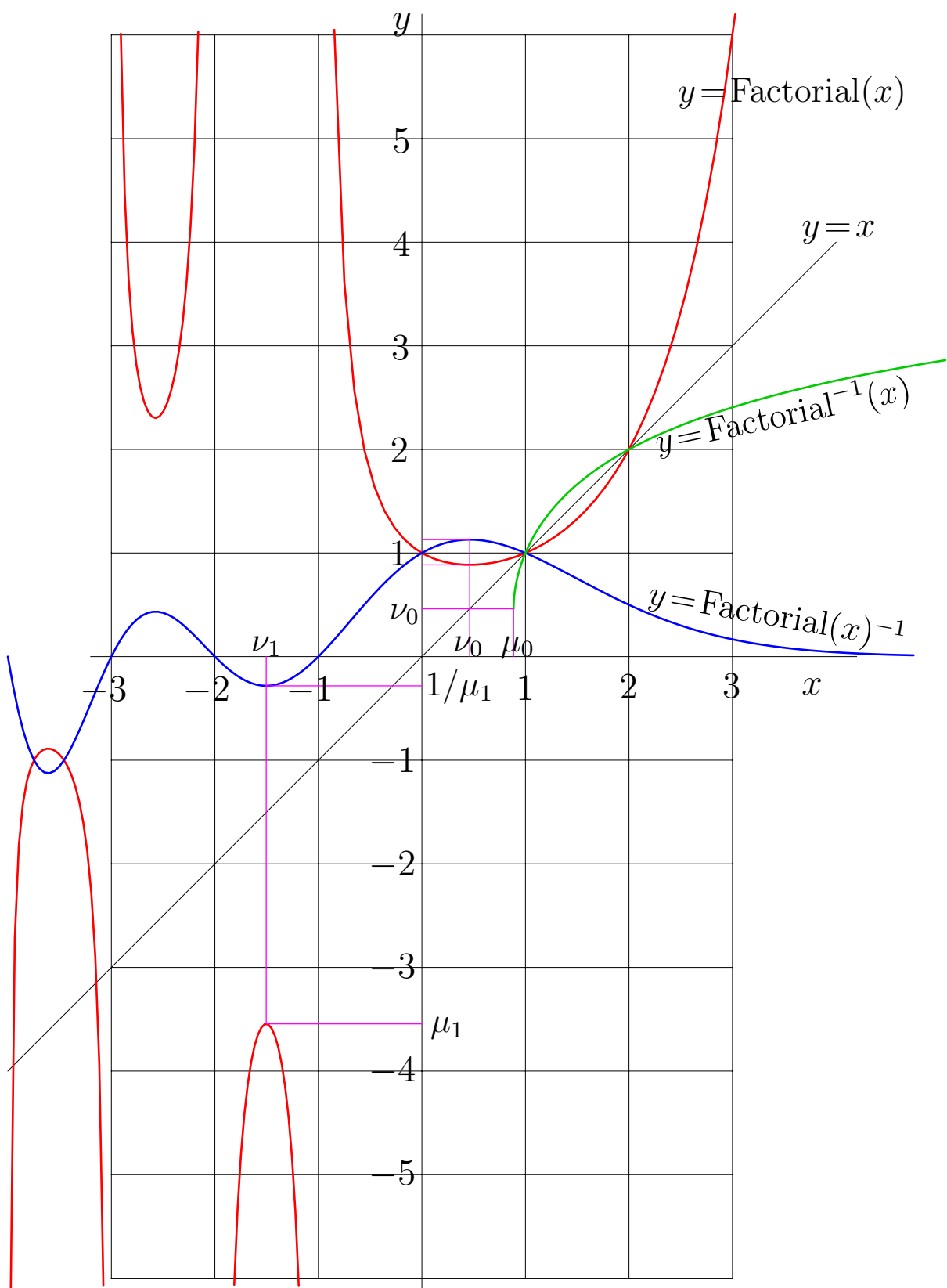
Ещё во время СССР, мой учитель квантовой механики, П.В.Елютин, в порядке издевательств над несчастными студентами, предложил дать физический смысл оператору “корень из факториала”, уже тогда известному как символ Физфака МГУ (рис. 2.1). Я предложил, что корень из факториала - это такая функция, вторая итерация которой есть факториал. То есть решение h уравнения

$$h(h(z)) = z! \quad (8.1)$$

Однако тогда я не смог указать способа вычисления этой функции; я не знал, что формализм для вычисления таких функций будет создан лишь в 21м веке.

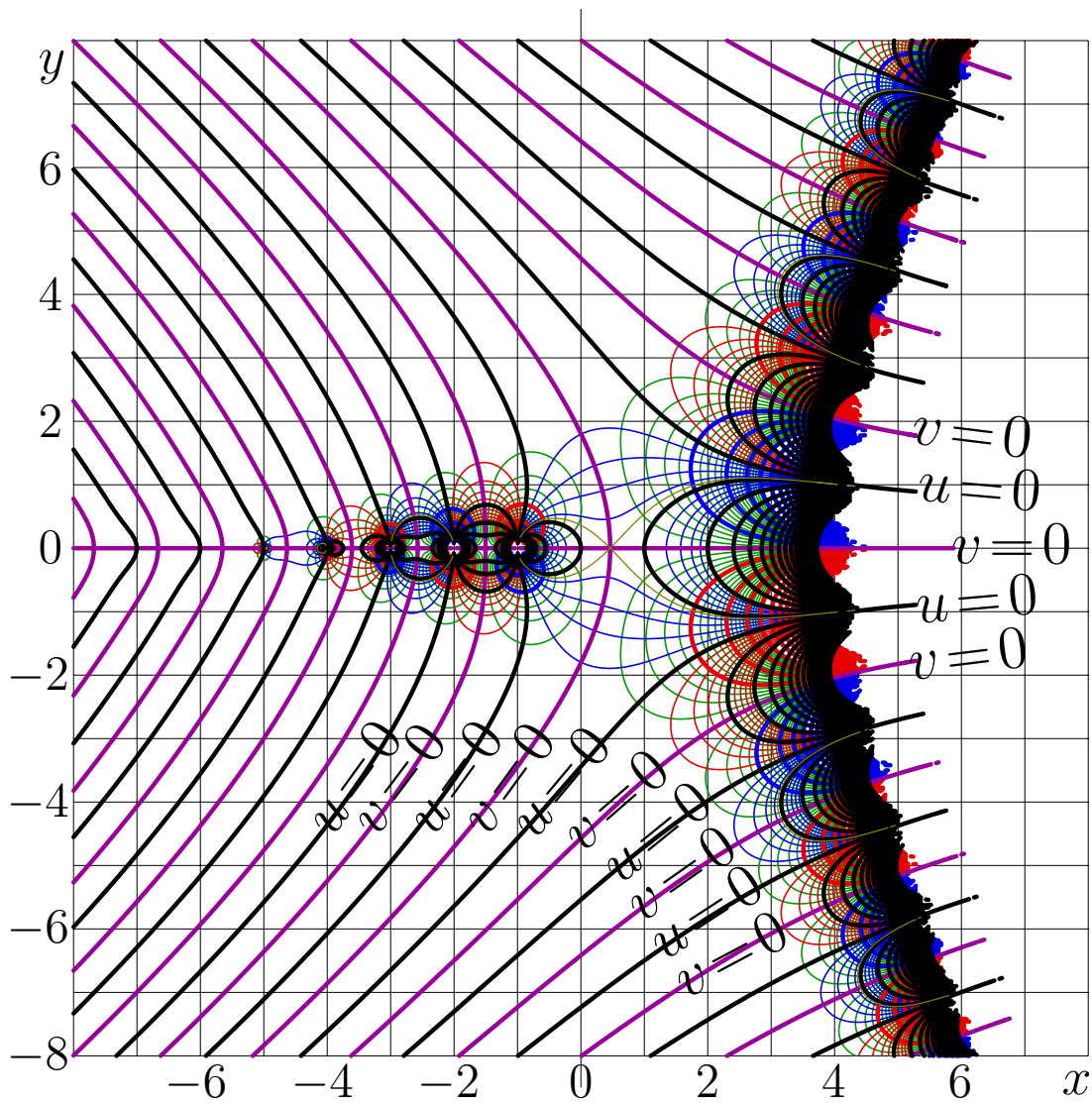
После успешного вычисления тетрации по основанию $\sqrt{2}$, опубликованного в журнале “Mathematics of Computation” [50], задача Елютина оказалась вполне решаемой; решение опубликовано в Вестнике МГУ (Moscow University Physics Bulletin) за 2009 год [54]. Уже после публикации про факториал, выяснилось, что Елютина больше интересуется не половинная итерация факториала, а половинная итерация логистического отображения и, соответственно, континуальное обобщение логистической последовательности [57]. Такое обобщение оказалось даже проще факториала, и поэтому в этой Книге изложено раньше, в предыдущей главе. А в этой главе я пересказываю основные идеи публикации [54] про корень из факториала.

Прежде, чем итерировать факториал, полезно посмотреть на график факториала (рисунок 8.1) и вспомнить его свойства. Эти свойства перечислены в следующей секции.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:FactoReal.jpg>

Рис. 8.1: Факториал и похожие функции



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Factorialz.jpg>

Рис. 8.2: $u+iv = \text{Factorial}(x+iy)$

1 Факториал и его стационарные точки

Для построения суперфункции какой бы то ни было передаточной функции, вопрос о её стационарных точках очень важен. Вещественные стационарные точки факториала суть решения L уравнения

$$\text{Factorial}(L) = L \quad (8.2)$$

Для вещественных значений аргумента, график факториала построен на рисунке 8.1 толстой кривой, $y = \text{Factorial}(x)$. Стационарные точки соответствуют пересечениям этой кривой с прямой $y = x$.

Для сравнения, на рисунке показаны также графики функций Factorial^{-1} и $z \mapsto \text{Factorial}(z)^{-1}$.

Комплексные карты факториала и аркфакториала показаны на рисунках 8.2 и 8.3.

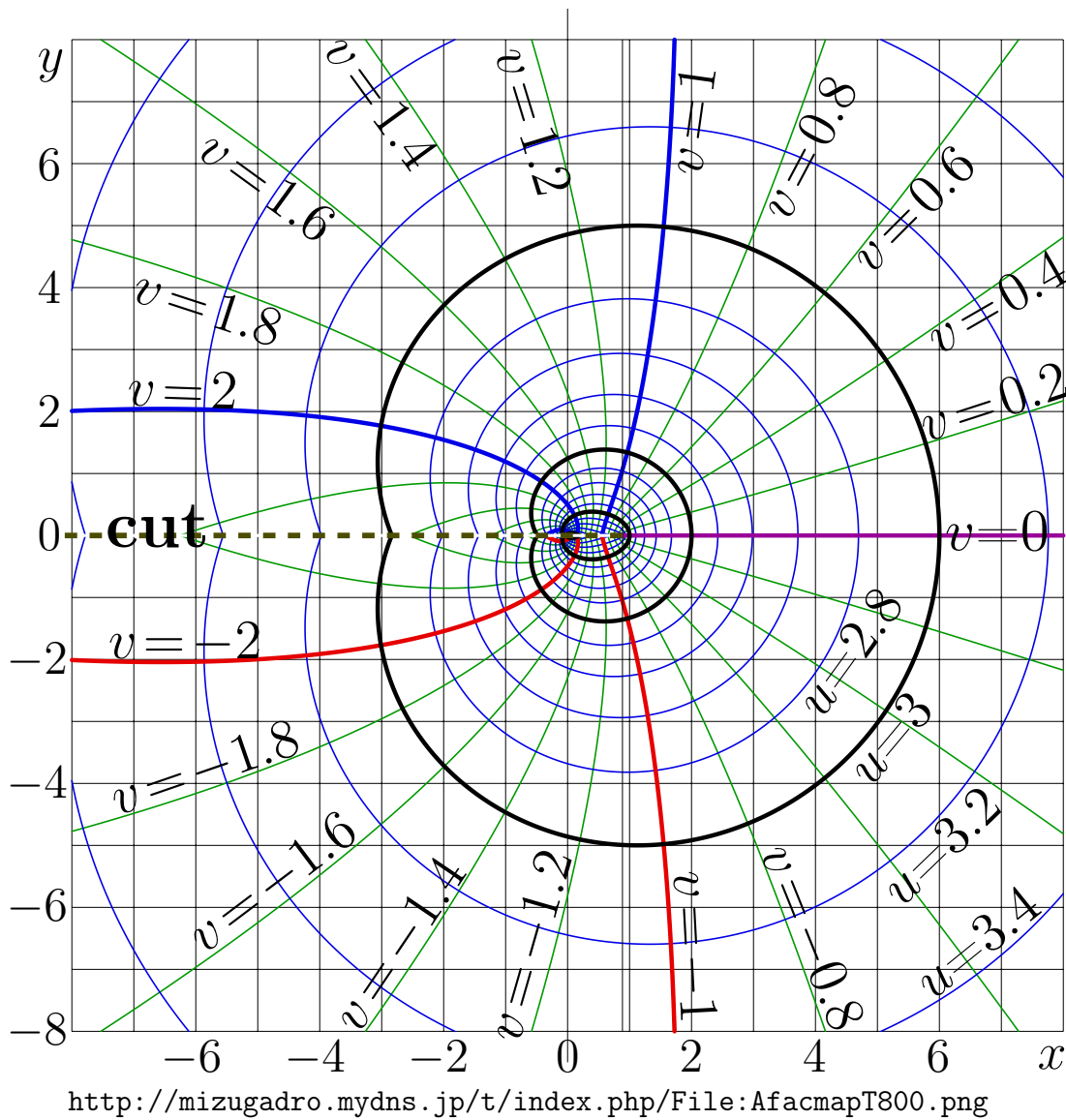


Рис. 8.3: $u+iv = \text{ArcFactorial}(x+iy)$

Численные имплементации факториала и аркфакториала, необходимые для регулярной итерации, в интернете найти было сложно. Софтвр “Mathematica” распознает факториал как встроенную функцию, но вычисляет её медленно, “To press a key, to have a tea”. Пакет “Maple” оказался не лучше [41].

При вычисления суперфункции, передаточная функция вызывается несколько раз, и важно, чтобы она вычислялась быстро. Рутин для факториала и аркфакториала типа “Complex double” на языке C++ загружены по урлям

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Fac.cin> и

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Afacc.cin>

График факториала представлен на рисунке 8.1. На этом же рисунке представлены графики $y = \text{Factorial}^{-1}(x)$ и $y = \text{Factorial}^{-1}(x)$. Отмечены также первые экстремальные точки факториала, локаль-

ный минимум в точке $x = \nu_0$ и локальный максимум в точке $x = \nu_1$; значения функции факториал в этих точках обозначены соответственно, как μ_0 и μ_1 . Функция $\text{Factorial}^{-1}(x)$ в точке $x = \mu_0$ имеет точку ветвления, и в этой точке имеет значение ν_0 .

В широкой области значений аргумента, комбинация факториала и аркфакториала эквивалентна тождественной функции, значение которой равно её аргументу. Эта функция показана на рисунке 8.1 тонкой линией. Эта линия проведена на рисунке 8.1 не для того, чтобы напомнить читателю, что такое тождественная функция¹, а чтобы показать, выделить вещественные стационарные точки факториала. Поэтому на рисунке 8.1 прямая $y = x$ продолжена влево, где соотношение $\text{Factorial}(\text{ArcFactorial}(x)) = x$ вызывает сомнения.

Стационарными точками факториала являются решения L уравнения

$$\text{Factorial}(L) = L \quad (8.3)$$

На рисунке 8.1 поместилось четыре такие точки: $L = 2$, $L = 1$, $L \approx -3.15$ и $L \approx -3.95$; и ещё счетное множество таких точек осталось слева, за пределами рисунка. В принципе, каждая из этих точек может быть использована для регулярной итерации. То есть для построения асимптотического разложения суперфункции и вычисления этой суперфункции, суперфакториала. В этой главе, в качестве стационарной точки для регулярной итерации выбрано только одно значение, а именно $L = 2$. Именно эта стационарная точка дает вещественно-голоморфную суперфункцию, неограниченно (и весьма быстро) растущую на бесконечности.

Комплексные карты факториала и аркфакториала представлены на рисунке 8.2. Свойства факториала можно найти, в частности, в ТОРИ <http://mizugadro.mydns.jp/t/Factorial>, на Ситизендиуме <http://en.citizendium.org/wiki/factorial>, в Википедии <http://en.wikipedia.org/wiki/Factorial>. В связи с подавлением науки в России [71], англоязычные описания специальных функций лучше русскоязычных. В следующей секции, свойства факториала используются для построения его суперфункции, то есть суперфакториала.

¹Предполагается, что это каждый младенец знает. У нас почему-то никто не знает, от чего умер Пушкин и чем фудоки отличаются от нибелунгов, а как очищают политуру [15] и что такое тождественная функция, и нас все знают.

2 Регулярная итерация для суперфакториала

Имеется счетное множество вещественных стационарных точек факториала. Интуитивно представляется, что суперфункция факториала, как и его абельфункция, должна быть монотонно растущей функцией по крайней мере в направлении вещественной оси. Чтобы обеспечить такой рост, выбрана наибольшая вещественная стационарная точка, а именно, $L=2$. Здесь описано построение суперфакториала, который стремится к этой стационарной точке при больших отрицательных значениях вещественной части аргумента.

В соответствии с общей формулой (6.1), для регулярной итерации вблизи стационарной точки $L=2$ используется асимптотическое разложение суперфункции F от факториала:

$$F(z) = L + \exp(kx) + a_2 \exp(2kz) + .. = L + \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + .. \quad (8.4)$$

В соответствии с общими формулами (6.8), (6.9), ..., подстановка такого разложения в передаточное уравнение

$$\text{Factorial}(F(z)) = F(z+1) \quad (8.5)$$

дает значение инкремента

$$\begin{aligned} k = \ln(K) &= \ln(3 + 2 \text{Factorial}'(0)) = \ln(3 - 2\gamma) \\ &\approx 0.61278745233070836381366079016859252 \end{aligned} \quad (8.6)$$

где $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.5772156649$ есть постоянная Эйлера.

Для коэффициентов a получаются такие выражения:

$$a_2 = \frac{\pi^2 + 6\gamma^2 - 18\gamma + 6}{12(3 - 5\gamma + 2\gamma^2)} \approx 0.798731835172434541585621 \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \left(-36 - 39\pi^2 - 738\gamma^2 + 324\gamma + 99\pi^2\gamma - 60\pi^2\gamma^2 - \pi^4 + 24\gamma^5 \right. \\ &\quad \left. + 594\gamma^3 - 120\zeta(3)\gamma + 48\zeta(3)\gamma^2 + 12\gamma^3\pi^2 + 72\zeta(3) - 204\gamma^4 \right) / \\ &\quad \left(144(-18 + 69\gamma - 104\gamma^2 + 77\gamma^3 - 28\gamma^4 + 4\gamma^5) \right) \\ &\approx 0.5778809754764832358038 \end{aligned} \quad (8.8)$$

где буквой ζ обозначена Дзета-функция Римана [18], $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Здесь используется только $\zeta(3) \approx 1.202056903$, то есть значение этой функции лишь в одной точке.

Таблица 8.1: Коэффициенты a и U в разложениях (8.4) и (8.12)

n	a_n	U_n
2	0.7987318351724345	-0.7987318351724345
3	0.5778809754764832	0.6980641135593670
4	0.3939788096629718	-0.6339640557572815
5	0.2575339580323327	0.5884152357911399
6	0.1629019581037053	-0.5538887519936520
7	0.1002824191713524	0.5265479025985924
8	0.0603184725913977	-0.5041914604280215
9	0.0355544582258062	0.4854529800293392
10	0.0205859954874424	-0.4694346809094714

Похожие (но более громоздкие) выражения получаются и для других коэффициентов a ; приближенные значения этих коэффициентов приведены в первом столбце таблицы 8.1. Кроме того, для численных имплементаций, удобно принять $a_0 = 2$ и $a_1 = 1$; тогда частичная сумма в асимптотическом разложении (8.4) программируется в одну строчку.

Ввиду положительности параметра k , разложение (8.4) дает хорошее приближение \tilde{F} для суперфункции F от факториала при больших отрицательных значениях аргумента. Для иных значений аргумента, используется выражение

$$F(z) \approx \text{Factorial}^n(\tilde{F}(z-n)) \quad (8.9)$$

при достаточно большом натуральном n . Для значений $\Re(z)$ порядка единицы, достаточно итерировать факториал всего несколько раз, чтобы требуемое значение ε стало порядка одной десятой; тогда полтора десятка слагаемых в разложении (8.4) дают около четырнадцати верных значащих цифр в оценке значения $F(z)$.

Удобно, когда в нуле функция принимает целочисленное значение. Для растущей передаточной функции, это значение должно быть все ещё больше соответствующей стационарной точки. Если стационарная точка $L = 2$, то естественно положить суперфакториал в нуле равным трем. Чтобы зафиксировать это значение суперфункции в нуле, пусть

$$\text{SuFac}(z) = F(z_3 + z) \quad (8.10)$$

где $z_3 \approx -0.91938596545217788$ есть вещественное решение уравнения $F(z_3)=3$. Тогда $\text{SuFac}(0)=3$.

Суперфункция от факториала может называться суперфакториалом, а обратная функция - абельфакториалом. Однако названия SuperFactorial и AbelFactorial длинные; вместо них я пишу SuFac и AuFac. Такие имена соответствуют простой мнемонике: имя передаточной функции сокращается до трех букв; приставка Su соответствует суперфункции, построенной на максимальной (upper) стационарной точке, а приставка Au указывает на соответствующую абельфункцию. В случае успешного применения абельфункций в золотодобывающей промышленности, целью которой декларируется золото, Au, такое обозначений примет особенно пикантный смысл, и тогда систему обозначений придется пересмотреть.

Вдоль вещественной оси, суперфакториал быстро растет, далеко обгоняя факториал (который иногда приводят как пример быстро растущей функции). График суперфакториала по формуле (8.10) в сравнении с факториалом показан на рисунке 8.4.

График факториала проходит через точки $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,6)$. График суперфакториала проходит через точки $(0,3)$, $(1,6)$, $(2,720)$; последняя точка не поместилась на рисунке.

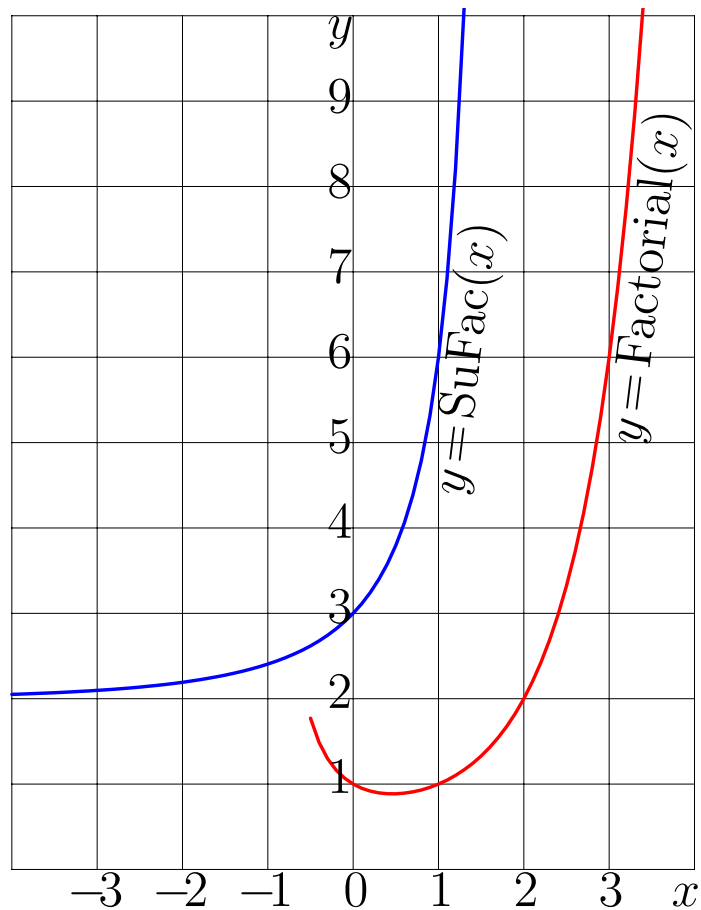
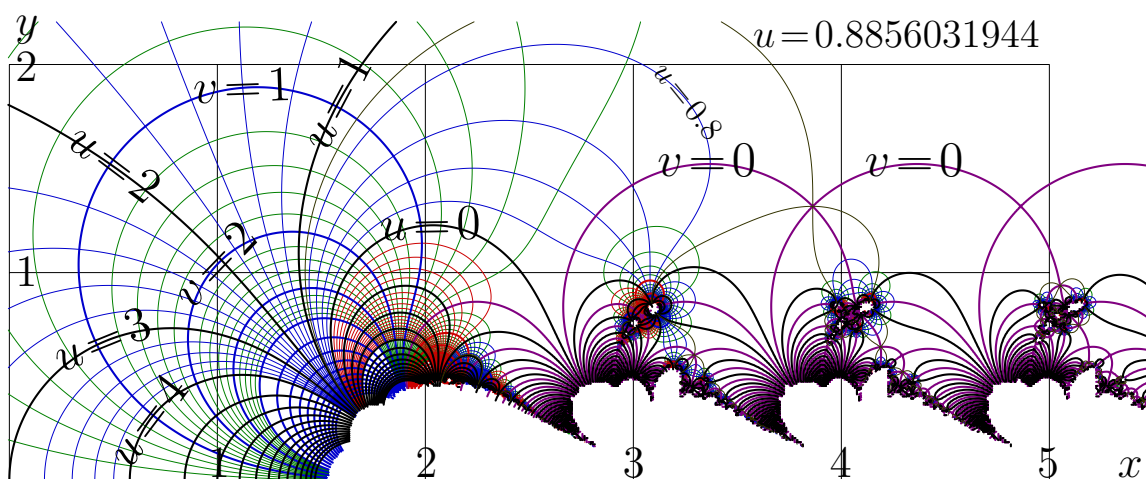
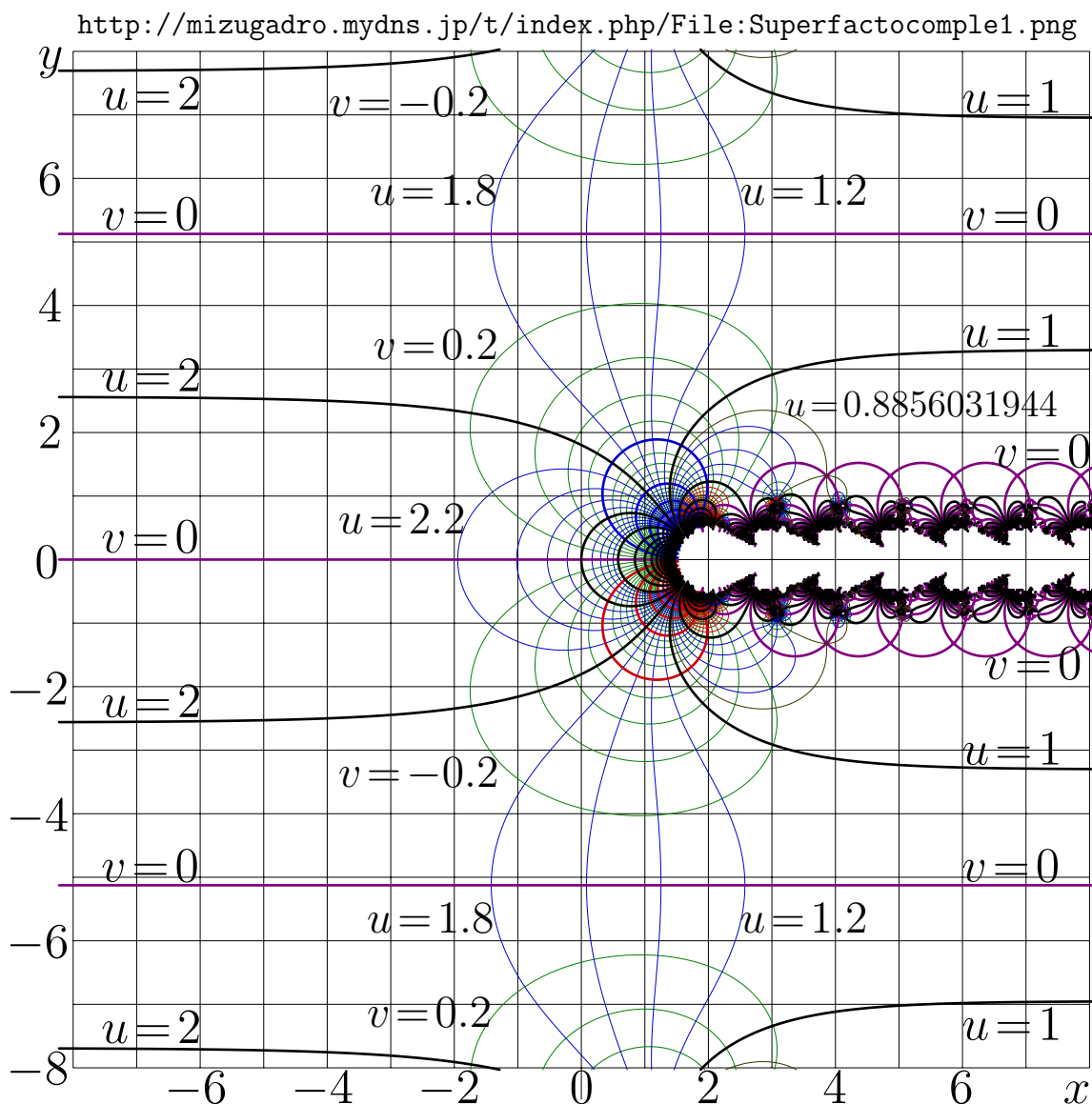


Рис. 8.4: Суперфакториал и факториал

Комплексная карта суперфакториала представлена на рисунке 8.5. Суперфакториал является периодичной функцией. Как и у других суперфункций, построенных регулярной итерацией у вещественной

стационарной точки вещественно-голоморфной передаточной функции, период P чисто мнимый. На рисунке 8.5 уместилось чуть меньше двух периодов.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Sfaczoo300.png>

Рис. 8.5: $u+iv=\text{SuFac}(x+iy)$ и зумин центральной части карты

Для суперфакториала, период

$$P = \frac{2\pi i}{k} = 2\pi i \ln(3+2 \text{Factorial}'(0)) \approx 10.253449681156 i \quad (8.11)$$

В полосах $x > 2$, $|\Im(z) + nP| < 1$, для целых n , суперфакториал имеет счетное множество сингулярностей. При пересчете значения от кривой $v = 0$ с помощью передаточного уравнения на единицу вправо, каждый полюс функции факториал дает сингулярность суперфакториала. Как и другие сингулярные суперфункции, карта суперфакториала имеет фрактальный характер: структуры, образованные линиями $v = 0$, воспроизводятся при единичных трансляциях вправо, и обрастают новыми деталями. Эти детали видны на нижней карте рисунка 8.5. Вне указанных полос, суперфакториал голоморфен, и стремится к стационарной точке факториала $L = 2$ в левой полуплоскости и к стационарной точке $L = 1$ в правой полуплоскости.

Быстрому росту суперфакториала можно противопоставить медленный рост обратной функции, то есть абельфакториала. Его карта показана на рисунке 8.6; эта функция строится в следующей секции.

3 АбельФакториал

Обращение серии асимптотического разложения суперфакториала дает разложение обратной функции, то есть абельфакториала, (или арксуперфакториала), в виде

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{k} \ln \left(\sum_{n=1}^{N-1} U_n (z-2)^n + \mathcal{O}(z-2)^N \right) \quad (8.12)$$

Значение параметра k определяется тем же выражением (8.6), что и в разложении суперфакториала;

$$U_1 = 1 \quad (8.13)$$

$$U_2 = -\frac{\pi^2 + 6\gamma^2 - 18\gamma + 6}{12(3 - 5\gamma + 2\gamma^2)} \approx 0.7987318 \quad (8.14)$$

и так далее. Приближенные значения коэффициентов U предложены в правом столбце таблицы 8.1.

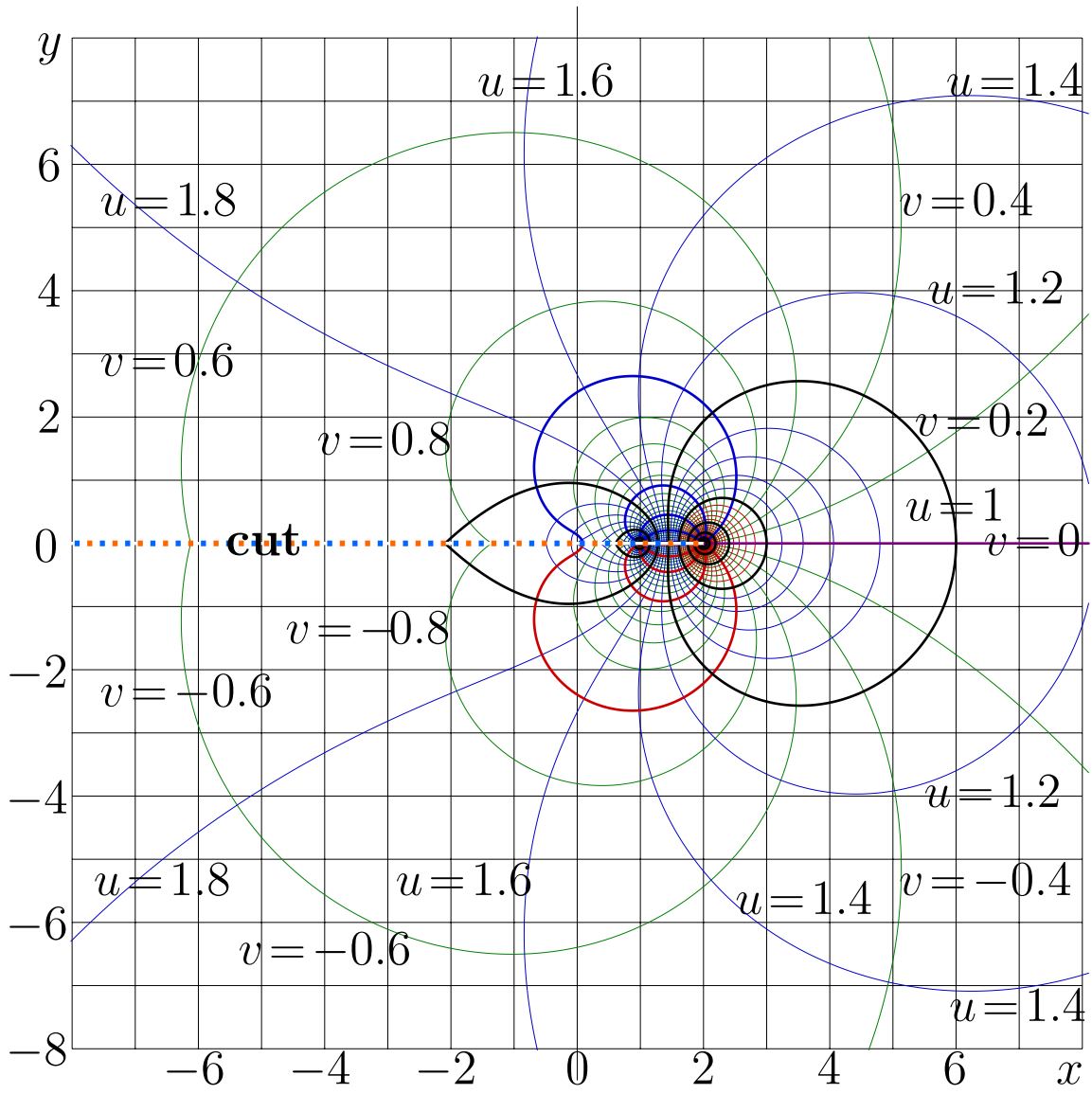


Рис. 8.6: $u+iv = \text{AbelFactorial}(x+iy)$.

Для значений z , сильно отличающихся от 2, рекуррентно применяется формула

$$G(z) = G(\text{ArcFactorial}(z)) + 1 \quad (8.15)$$

до тех пор, пока $|z-2|$ станет малым и разложение (8.12) начнет давать аккуратные значения. Такая рекуррентия определяет разрез абельфакториала; разрез идет вдоль вещественной оси и уходит на минус бесконечность.

Ввиду того, что $\text{SuFac}(0) = 3$, для абельфункции от факториала, назову её $\text{AuFac} = \text{AbelFactorial} = \text{SuFac}^{-1}$, надо обеспечить условие $\text{AuFac}(3) = 0$. Для этого надо сдвинуть значение функции G на константу $z_3 = G(0) \approx -0.91938596545218$; то есть абельфакториал

аппроксимируется как

$$\text{AuFac}(z) \approx \text{AuFac}_n(z) = G\left(\text{ArcFactorial}^n(z)\right) + n - z_3 \quad (8.16)$$

для достаточно большого натурального числа n .

Такая аппроксимация не должна создавать впечатления, что построено лишь приближенное решение. Точную формулу можно выразить через предел, то есть

$$\text{AuFac}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{AuFac}_n(z) \quad (8.17)$$

При этом абельфакториал оказывается обратной функцией суперфакториала. В частности, такой алгоритм использован для построения рисунка 8.6.

Абельфакториал сравнивается с аркфакториалом на рисунке 8.7. График аркфакториала проходит через точки $(1,1)$, $(2,2)$, $(6,3)$, $(24,4)$, хотя последняя точка уже за пределами рисунка и страницы. График абельфакториала проходит через точки $(3,0)$, $(6,1)$, $(720,2)$, хотя по-

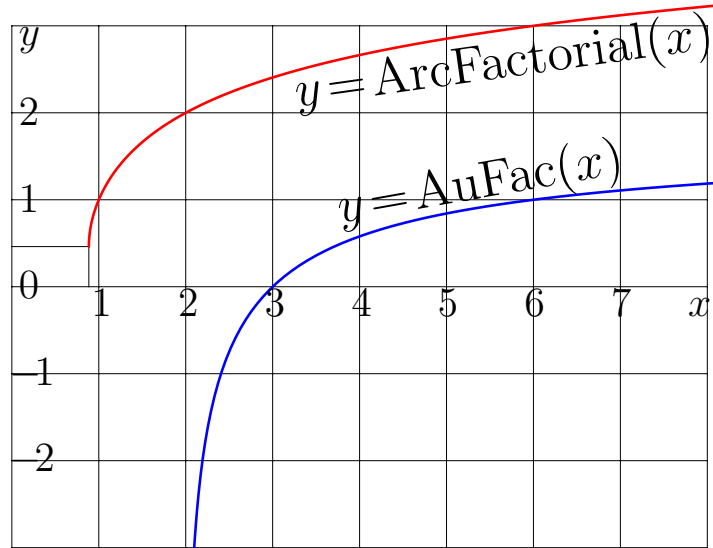
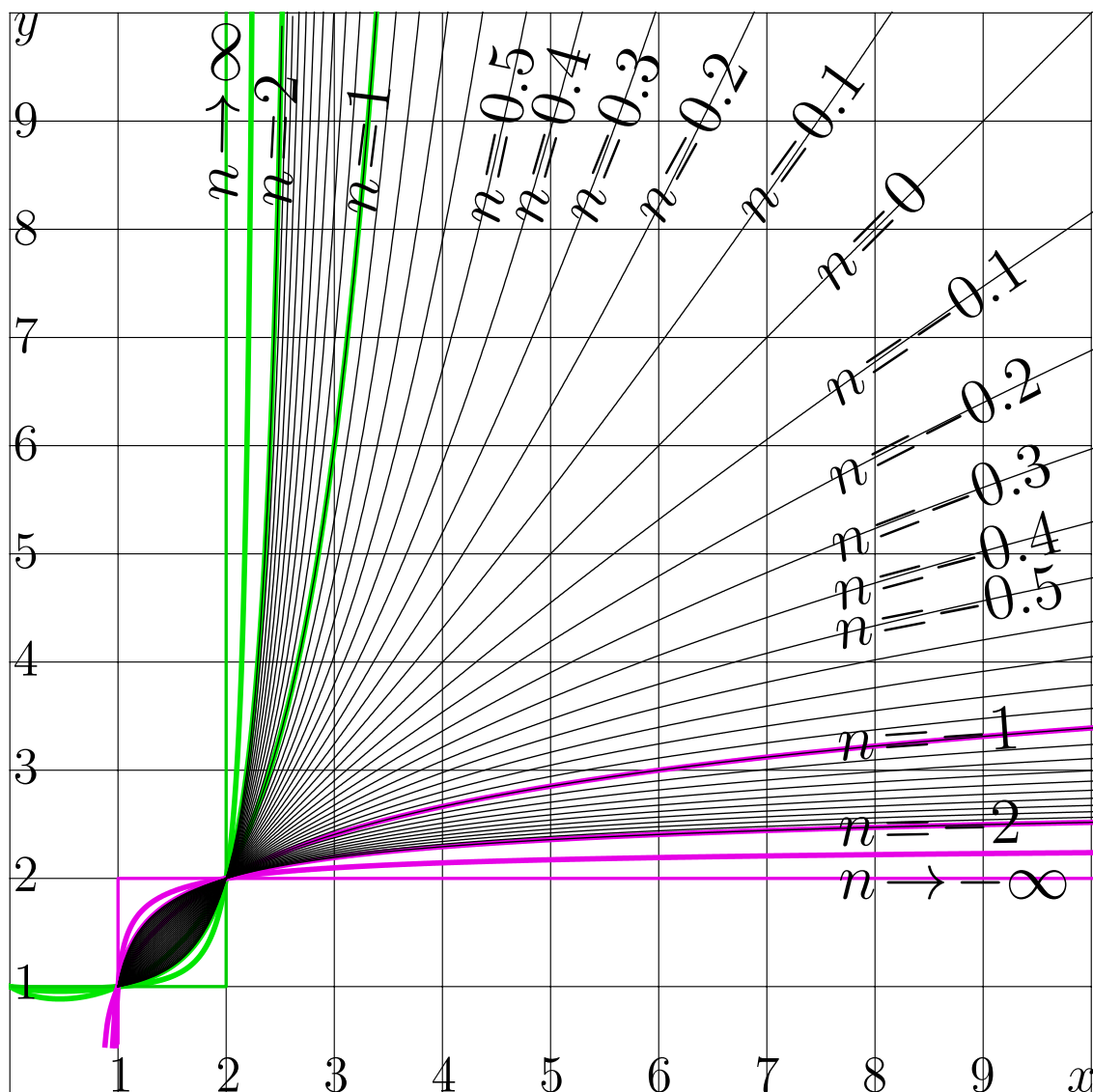


Рис. 8.7: Аркфакториал и абельфакториал

следняя точка находится не только за пределами страницы, но и за пределами комнаты, в которой пишется эта книга; а следующая точка, в которой абельфакториал принимает целое значение, то есть $(720!,3)$, оказывается далеко за пределами нашей Галактики.

Абельфакториал растет очень медленно. Если аргумент этой функции реализован как некоторая физическая величина (расстояние, масса, заряд и т.п.), измеренная в сколько-нибудь разумных единицах, то не в человеческих возможностях сделать эту величину такой большой, что абельфакториал от нее достигнет трех.

Когда функции SuFac и AuFac построены, можно строить итерации факториала. Эти итерации рассмотрены в следующей секции.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:FacitT.jpg>

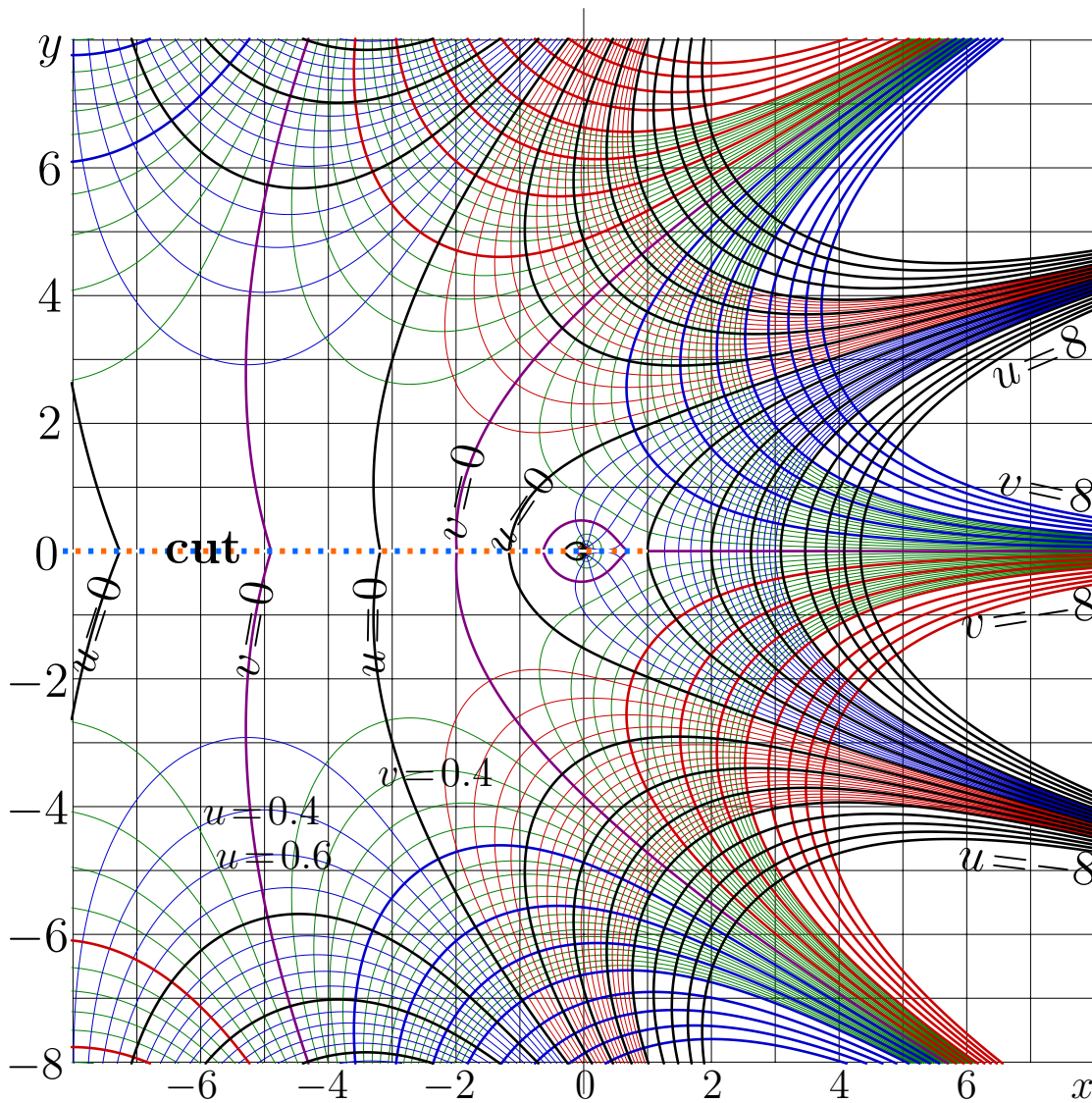
Рис. 8.8: $y = \text{Factorial}^n(x)$ при различных значениях n

4 Итерации факториала

С помощью суперфакториала и абельфакториала, итерация номер n факториала записывается в виде

$$h(z) = \text{Factorial}^n(z) = \text{SuFac}(n + \text{AuFac}(z)) \quad (8.18)$$

В таком представлении, параметр n не имеет надобности быть целым числом. На рисунке 8.8 показан график $y = \text{Factorial}^n(x)$ для различных значений n . Рисунок 8.8 аналогичен рисункам 4.1, 4.4, 4.5, 4.11, 5.11, где показаны итерации других функций, хотя для нецелых итераций факториала нет компактного представления через специальные функции, описанные в справочниках 20го века.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:QFacMapT.jpg>

Рис. 8.9: $u+iv = \text{Factorial}^{0.5}(x+iy)$

При $n=1/2$, формула (8.18) дает корень из факториала, то есть половинную итерацию факториала. Карта функции $h = \text{Factorial}^{1/2}$ показана на рисунке 8.9. Именно эта функция может быть обозначена символом $\sqrt{!}$, используемом на знаке Физфака МГУ, обсуждаемом во Введении и показанном на рисунке 2.1.

Концепция корня из факториала вызвала конфузии и дискуссии. Некоторые коллеги отказывались видеть разницу между выражениями $\text{Factorial}^{1/2}(z)$ и $\text{Factorial}(z)^{1/2}$, интерпретируя $\sqrt{\text{Factorial}(z)}$ как эквивалент $\sqrt{\text{Factorial}(z)}$. Чтобы устранить, наконец, путаницу, функция $h = \text{Factorial}^{1/2}$ рассмотрена здесь более подробно.

Ключевым для проверки и верификации предлагаемой здесь интерпретации функции $\sqrt{!}$, корня из факториала, является исследова-

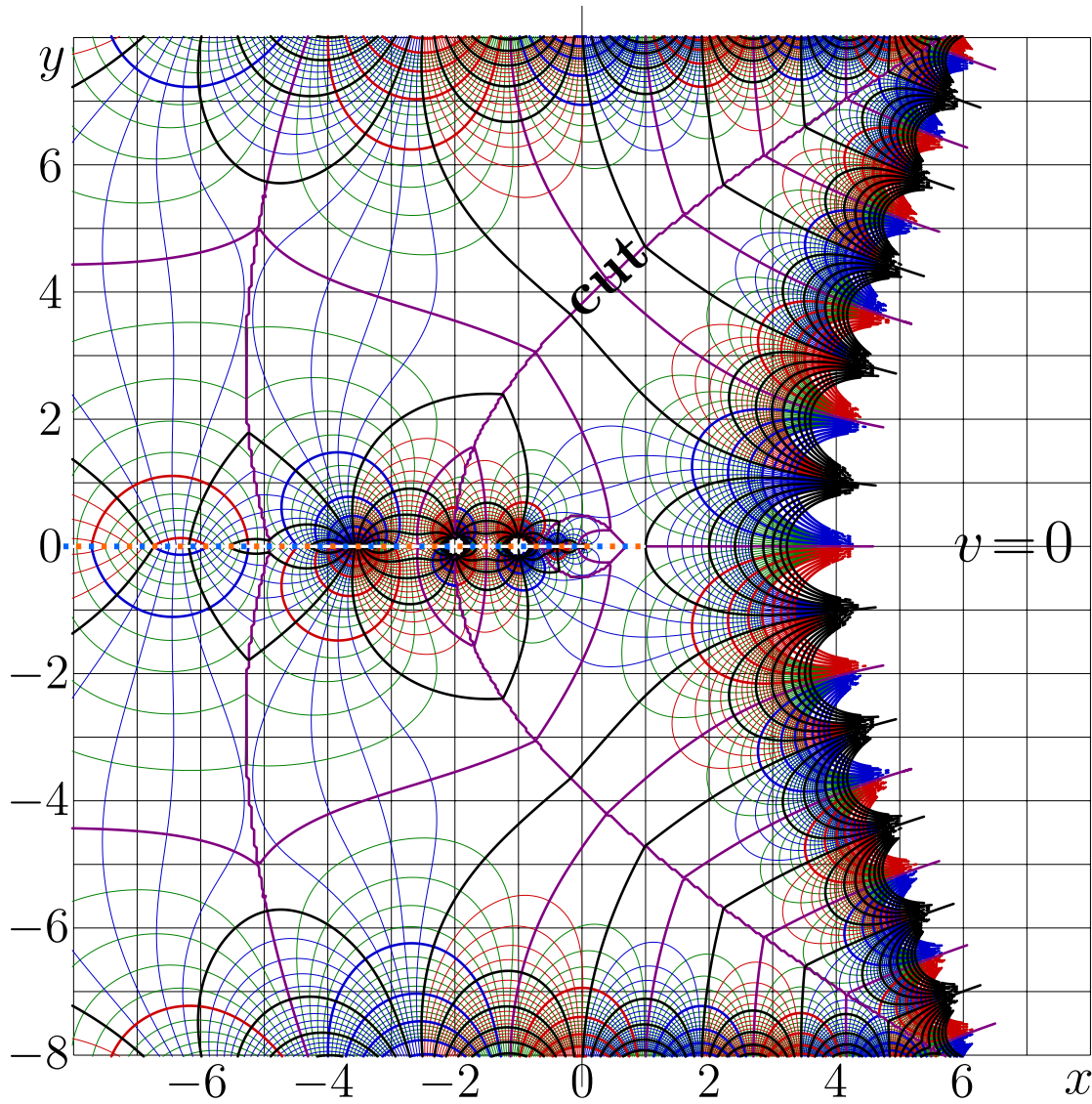


Рис. 8.10: $u+iv = h^2(x+iy)$.

ние области применимости соотношения

$$h(h(z)) = \text{Factorial}(z) = z! \quad (8.19)$$

Карта функции h^2 в левой части уравнения (8.19) показана на рисунке 8.10. Этот рисунок можно сравнить с рисунком 8.2, где показана карта факториала.

В правой части рисунка 8.10, карта функции $h \circ h$ совпадает с картой факториала. По крайней мере в полосе $\Re(z) > 1$, $|\Im(z)| \leq 4$, соотношение (8.19) выполняется; полученный “корень из факториала” ведет себя в соответствии с интуитивными ожиданиями относительно этой функции. Область применимости соотношения (8.19) ограничена разрезами. Такие разрезы типичны при итерации функций, если номер итерации не выражается натуральным числом.

5 Применение и спекуляции

Факториал не является экзотикой, исключением. С помощью формализма суперфункций, нецелые итерации можно строить для любой сколько-нибудь осмысленной голоморфной передаточной функции.

Нецелые итерации функций расширяют инструментарий, например, для аппроксимации (фиттинга) различных неизвестных функций. К любой аппроксимирующей функции добавляется возможность итерировать её произвольное количество раз.

Расширение инструментария важно для экстраполяций. Удачная фитирующая функция имеет мало параметров, это улучшает предсказательную способность экстраполяции. Безграмотное (или жульническое) использование примитивных аппроксимаций с множеством параметров ведет к неверным результатам.



Рис. 8.11: Что значит *гнать пургу*

Примером такой концепции является “глобальное потепление”², с помощью которого жулики гонят пургу (рис. 8.11) и пилят бюджет. Я надеюсь, что нецелые итерации факториала не будут использоваться для такого мошенничества - хотя бы потому, что суперфункции позволят уменьшить число подгоночных параметров и ограничить возможности для всяческих артефактов в предсказаниях - как умышленных, так и невольных.

Факториал является быстро растущей функции с вещественной стационарной точкой. Стационарная точка 4 использована для построения суперфакториала, абельфакториала и нецелых итераций факториала. Ещё пример быстрорастущей передаточной функции с вещественной стационарной точкой рассмотрен в следующей главе.

² <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Purgu.png> Глобальное потепление <http://rus.ruvr.ru/2009/12/18/3089576/> 18 декабря 2009, 18:22. Россия будет бороться с потеплением вне зависимости от результатов саммита. Дмитрий Медведев рассказал о лидирующей роли России в борьбе с глобальным потеплением.

Глава 9

Экспонента по основанию $\sqrt{2}$

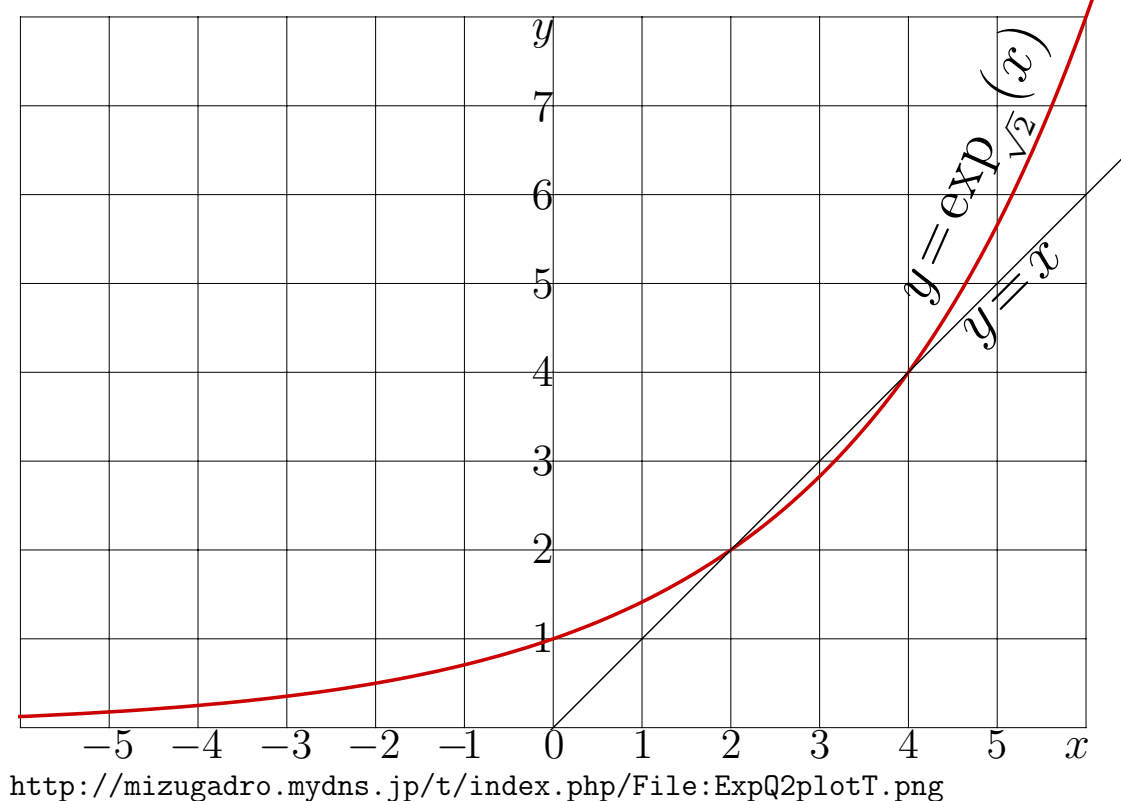


Рис. 9.1: Экспонента по основанию $b = \sqrt{2}$

Экспонента по основанию $\sqrt{2}$ оказалась первой в истории человечества передаточной функцией, для которой методом регулярной итерации была построена суперфункция [50]. Экспонента по основанию $\sqrt{2}$ определяется через обычную, натуральную экспоненту;

$$T(z) = \exp_{\sqrt{2}}(z) = \exp\left(\ln(\sqrt{2})z\right) = \exp\left(\frac{\ln(2)}{2}z\right) \quad (9.1)$$

График такой передаточной функции T показан на рисунке 9.1. Основание $\sqrt{2}$ привлекательно тем, что, для такой экспоненты работает метод регулярной итерации, причем стационарные точки $L = 2$ и $L = 4$ выражаются натуральными числами. Эти точки обозначены пересечением кривой $y = T(x)$ и прямой $y = x$.

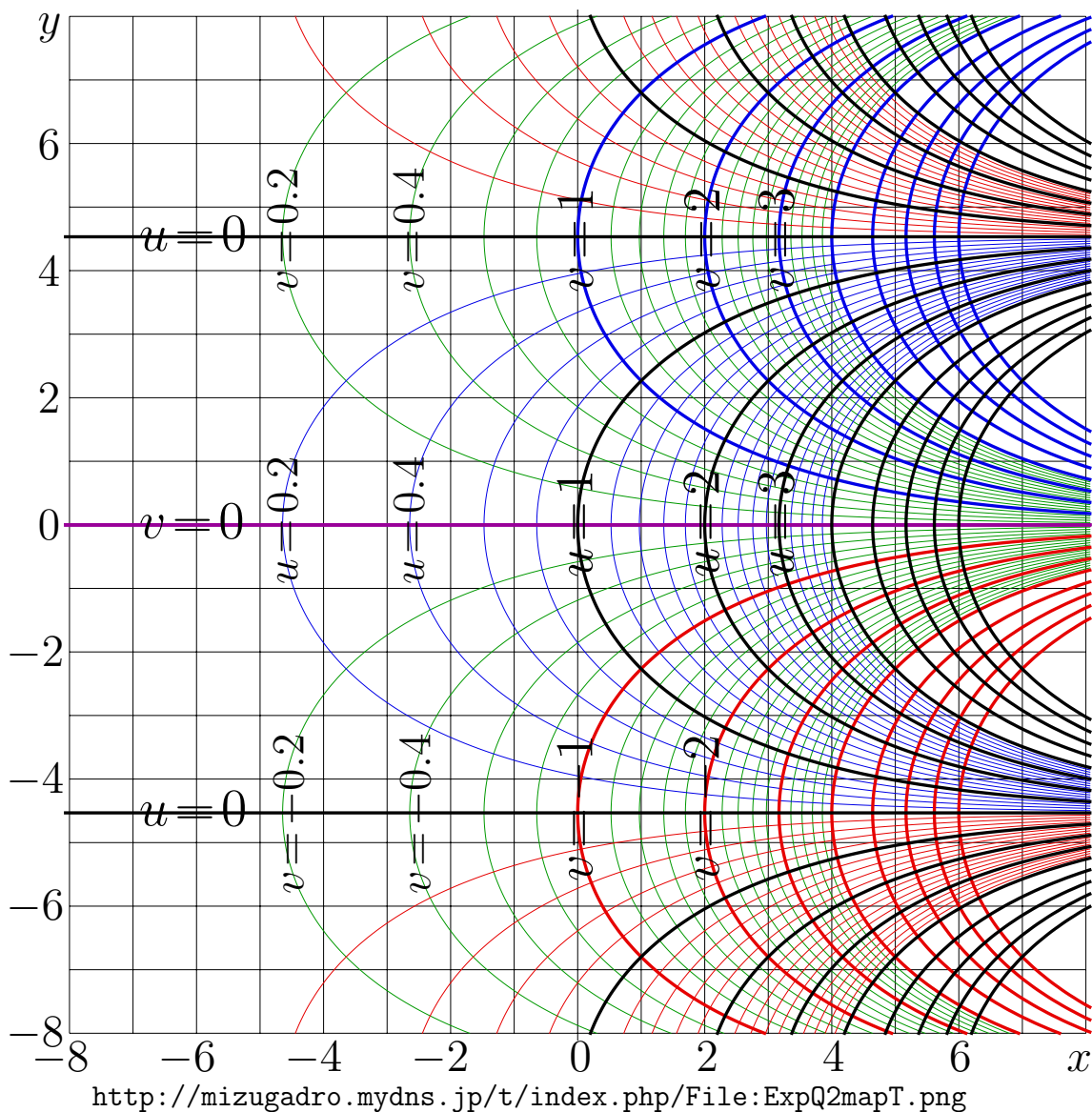


Рис. 9.2: $u+iv = \exp_{\sqrt{2}}(x+iy)$

Комплексная карта экспоненты по основанию $b = \sqrt{2}$ показана на рисунке 9.2. Эта функция периодична, её период

$$P = \frac{2\pi i}{\ln(b)} = \frac{2\pi i}{\ln(\sqrt{2})} \approx 18.1294405673i \quad (9.2)$$

На рисунке 9.2 уместилось чуть меньше одного периода.

Чтобы вычислять экспоненту, нужно знать свойства умножения и его обратной операции, то есть деления. Примерно так же, для того, чтобы вычислять итерации экспоненты и суперэкспоненту, нужно знать свойства экспоненты её обратной функции. Иначе может случиться, что после лекции об устройстве паровоза, курсант-машинист спросит, куда в паровозе запрягаются лошади, а после курса атомной физики - о том, как откачивают воздух из пространства между

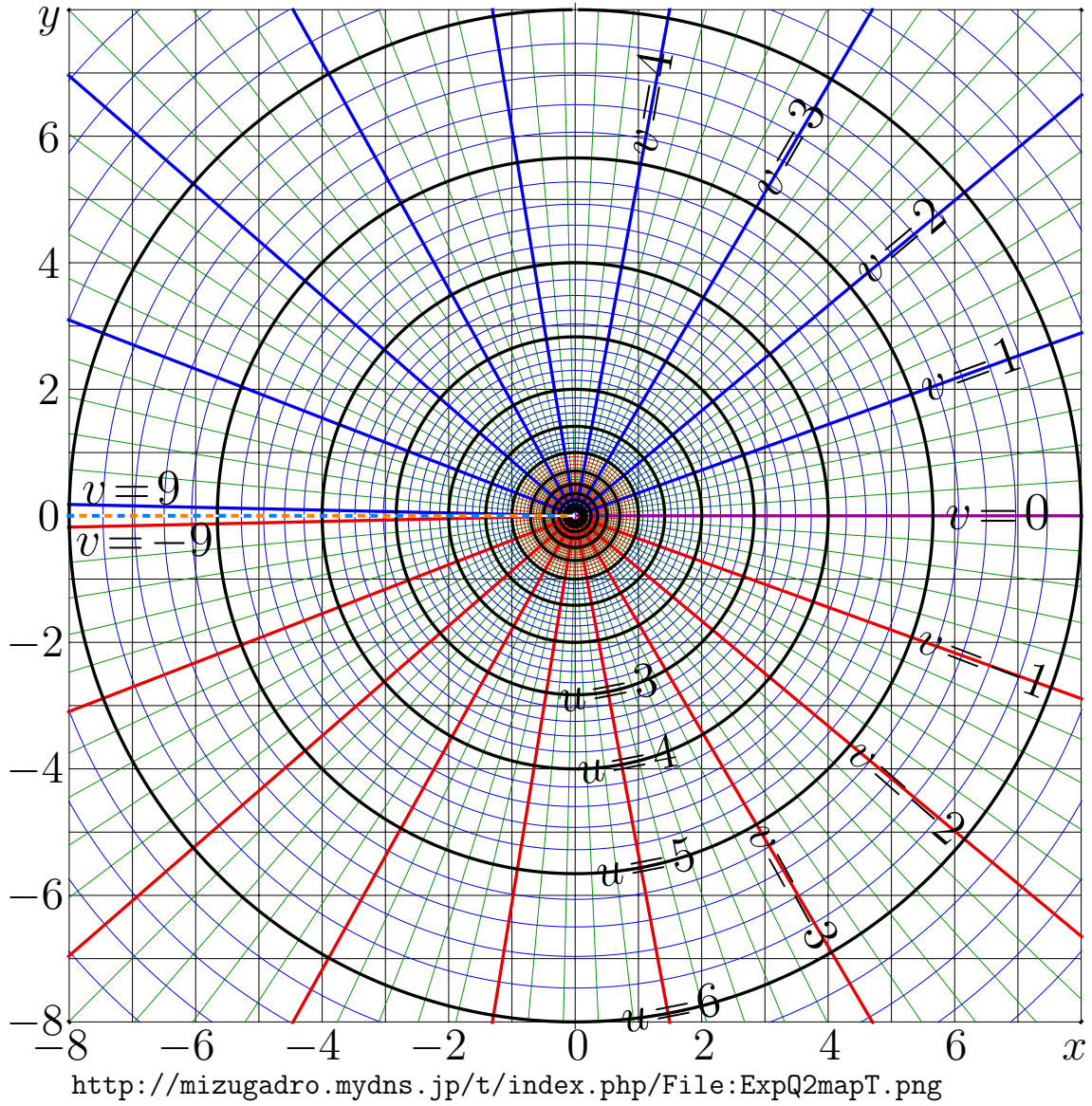


Рис. 9.3: $u+iv = \log_{\sqrt{2}}(x+iy)$

ядром и электронами. Для экспоненты по основанию b , обратной функцией является логарифм по основанию b , то есть минус первая итерация:

$$T^{-1}(z) = \log_{\sqrt{2}}(z) = \log_b(z) = \frac{2}{\ln(2)} \ln(z) \quad (9.3)$$

Комплексная карта логарифма по основанию $b = \sqrt{2}$ показана на рисунке 9.3. Эта функция имеет разрез вдоль отрицательной части вещественной оси, и её скачок на этом разрезе определяется периодом экспоненты:

$$\log_{\sqrt{2}}(x+io) - \log_{\sqrt{2}}(x-io) = P \approx 18.1294405673i \quad (9.4)$$

для $x < 0$. На рисунке 9.3, уровни $v = \Im(\log_{\sqrt{2}}(x+iy)) = -9$ и $v = \Im(\log_{\sqrt{2}}(x+iy)) = 9$ близки к отрицательной части вещественной оси.

Стационарные точки экспоненты $L = 2$ и $L = 4$ являются также и стационарными точками логарифма, их видно на рисунках 9.1, 9.2 и 9.3. В этой главе описано построение суперэкспоненты по основанию $\sqrt{2}$ регулярной итерацией на стационарной точке $L = 4$. Следующая секция рассказывает, как строится такая суперэкспонента.

1 Суперфункция на стационарной точке $L = 4$

В главе 6 рассказано, как строятся итерации, регулярные в окрестности стационарной точки. Здесь этот метод адаптирован для построения суперэкспоненты по основанию $\sqrt{2}$, асимптотически стремящейся к стационарной точке $L = 4$ при больших отрицательных значениях аргумента, и неограниченно растущей при положительных значениях аргумента. Эта функция названа $\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ и её график показан на рисунке 9.4. Ниже рассказывается, как строится эта функция.

Я использую общую формулу (6.1) асимптотического разложения суперфункции F , которая на минус бесконечности стремится к этой стационарной точке. Для передаточной функции $T = \exp_{\sqrt{2}}$, эту формулу можно записать так:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{nkz} + O(e^{Nkz}) \quad (9.5)$$

причем $a_0 = L = 4$, $a_1 = 1$.

Коэффициент a_1 можно было бы

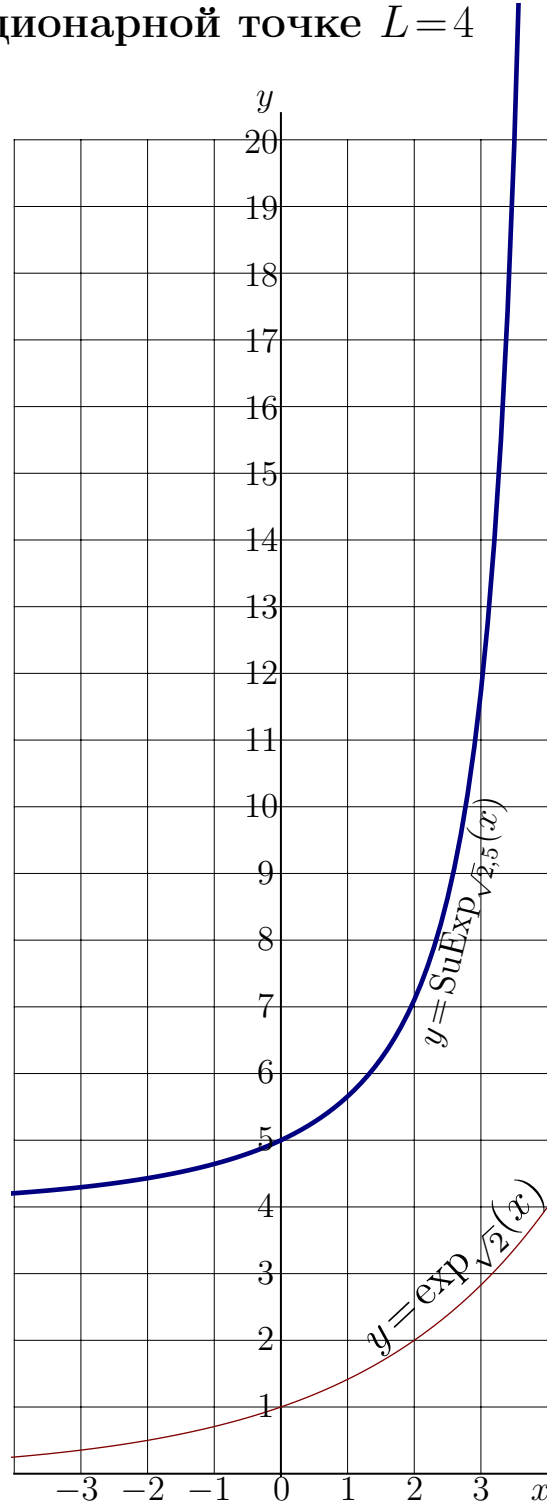


Рис. 9.4: $y = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}(x)$ по формуле (9.13)

Таблица 9.1: Коэффициенты a и U в разложениях (9.5), (9.15)

n	a_n	U_n
1	1.0000000000000000	1.0000000000000000
2	0.4485874311952612	-0.4485874311952612
3	0.1903722467978068	0.2120891200549197
4	0.0778295765369683	-0.1021843675069717
5	0.0309358603057080	0.0496986830373718
6	0.0120221257690659	-0.0243075903261196
7	0.0045849888965617	0.0119330883965109
8	0.0017207423310577	-0.0058736976420089
9	0.0006368109038799	0.0028968672871058
10	0.0002327696003030	-0.0014309081060793
11	0.0000841455118381	0.0007076637148566
12	0.0000301156464937	-0.0003503296158730
13	0.0000106807458130	0.0001735756004664
14	0.0000037565713616	-0.0000860610119291
15	0.0000013111367785	0.0000426959089013
16	0.0000004543791625	-0.0000211930290682
17	0.0000001564298463	0.0000105244225996
18	0.0000000535232764	-0.0000052285174354
19	0.0000000182077863	0.0000025984499916
20	0.0000000061604765	-0.0000012917821121

выбрать произвольно, но тогда все остальные коэффициенты оказались бы зависимыми от a_1 . Поэтому удобно положить $a_1 = 1$. Подстановка разложения (9.5) в передаточное уравнение

$$F(z+1) = \left(\sqrt{2}\right)^{F(z)} \quad (9.6)$$

в соответствии с общей формулой (6.8) дает

$$k = \ln\left(\exp'_b(4)\right) = \ln\left(4 \ln(\sqrt{2})\right) = \ln(2 \ln(2)) \approx 0.32663425997828 \quad (9.7)$$

определяя период суперфункции

$$P = P_4 = \frac{2 \pi i}{k} = \frac{2 \pi i}{\ln(2 \ln(2))} \approx 19.236149042042854712 i \quad (9.8)$$

Затем, учет высших слагаемых в разложении по малому параметру e^{kz} определяет коэффициенты a ; в частности

$$a_2 = \frac{\ln(2)/4}{1 - 2\ln(2)} \approx 0.448587431195261 \quad (9.9)$$

$$a_3 = \frac{(1 - \ln(2)) \ln(2)^2/12}{1 - 2\ln(2) - 4\ln(2)^2 + 8\ln(2)^3} \approx 0.1903722467978067 \quad (9.10)$$

Для более высоких коэффициентов получаются более громоздкие выражения. В первом столбце таблицы 9.1 предложены приближенные значения коэффициентов a в разложении (9.5). На основе $N = 20$ таких коэффициентов построено первичное приближение \tilde{f} для суперфункции f , то есть

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{19} a_n \exp(nkz) \quad (9.11)$$

Аппроксимация \tilde{f} показана на рисунке 9.5. Для удобства сравнения с другими картами, аргумент функции на этом рисунке сдвинут на вещественную константу $x_{45} \approx -1.11520724513161$; смысл этой константы объясняется ниже.

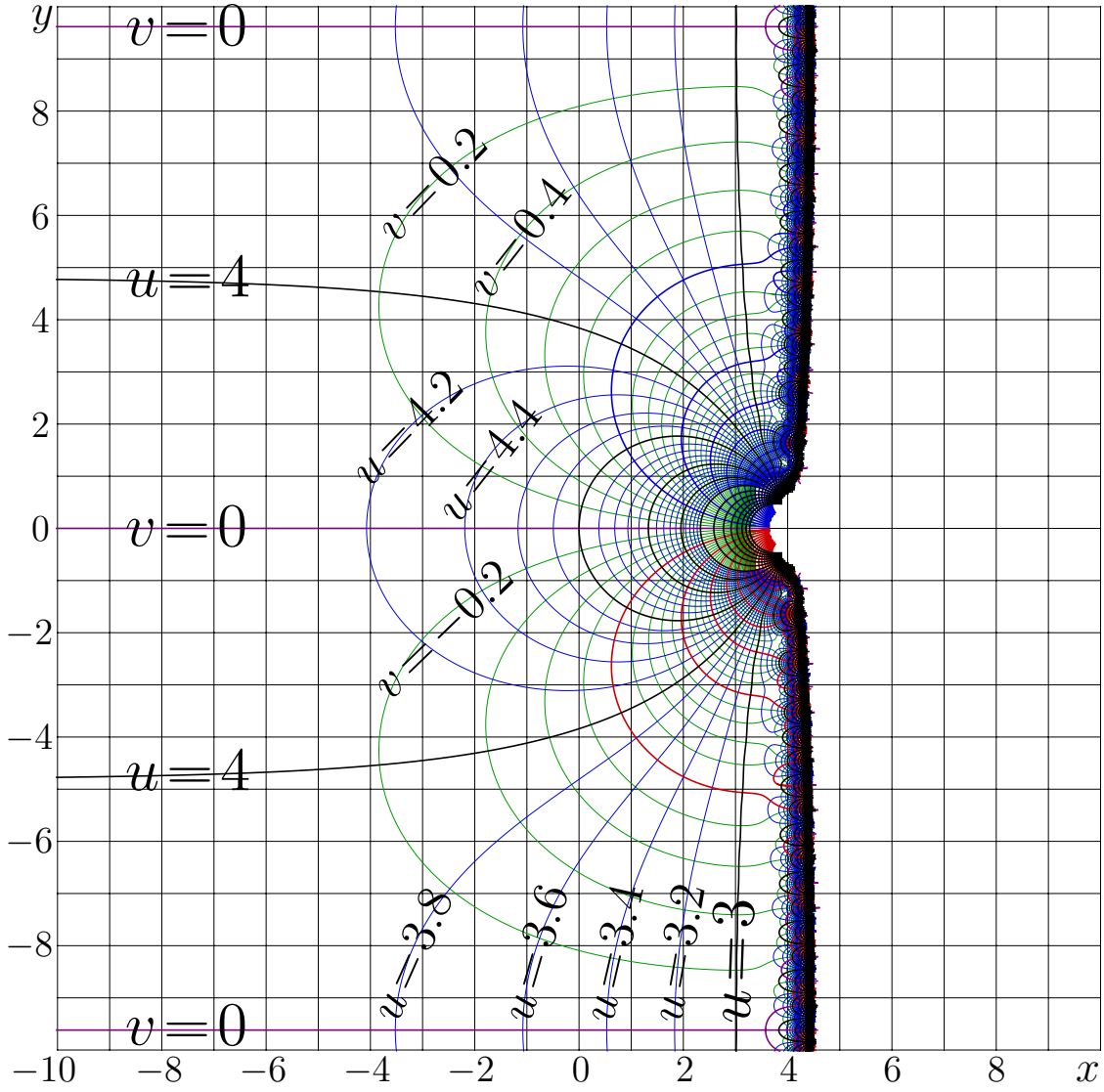
Невязка при подстановке приближения (9.11) в передаточное уравнение (9.6) становится порядка ошибок округления при $\Re(z) < -3$. Приближение (9.11) уже позволяет построить комплексную карту суперфункции в левой части комплексной полуплоскости.

Суперфункция f получается как предел

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_b^n(\tilde{f}(z - n)) \quad (9.12)$$

Ввиду того, что \tilde{f} есть асимптотическое решение, этот предел не зависит от числа слагаемых в приближении (9.11). Вместо девятнадцати, можно было бы выбрать иную константу. Однако, чем больше слагаемых, тем быстрее сходится предел. Выбирая число 19, я имел в виду имплементацию Complex double. Тогда, для аппроксимации f с 14ю значащими цифрами, достаточно выбрать $n > \Re(z) + 3$.

Удобно, когда в нуле суперфункция принимает значение 5. Это наименьшее целое число, большее использованной стационарной точки



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Sqrt2figf45bT.png>

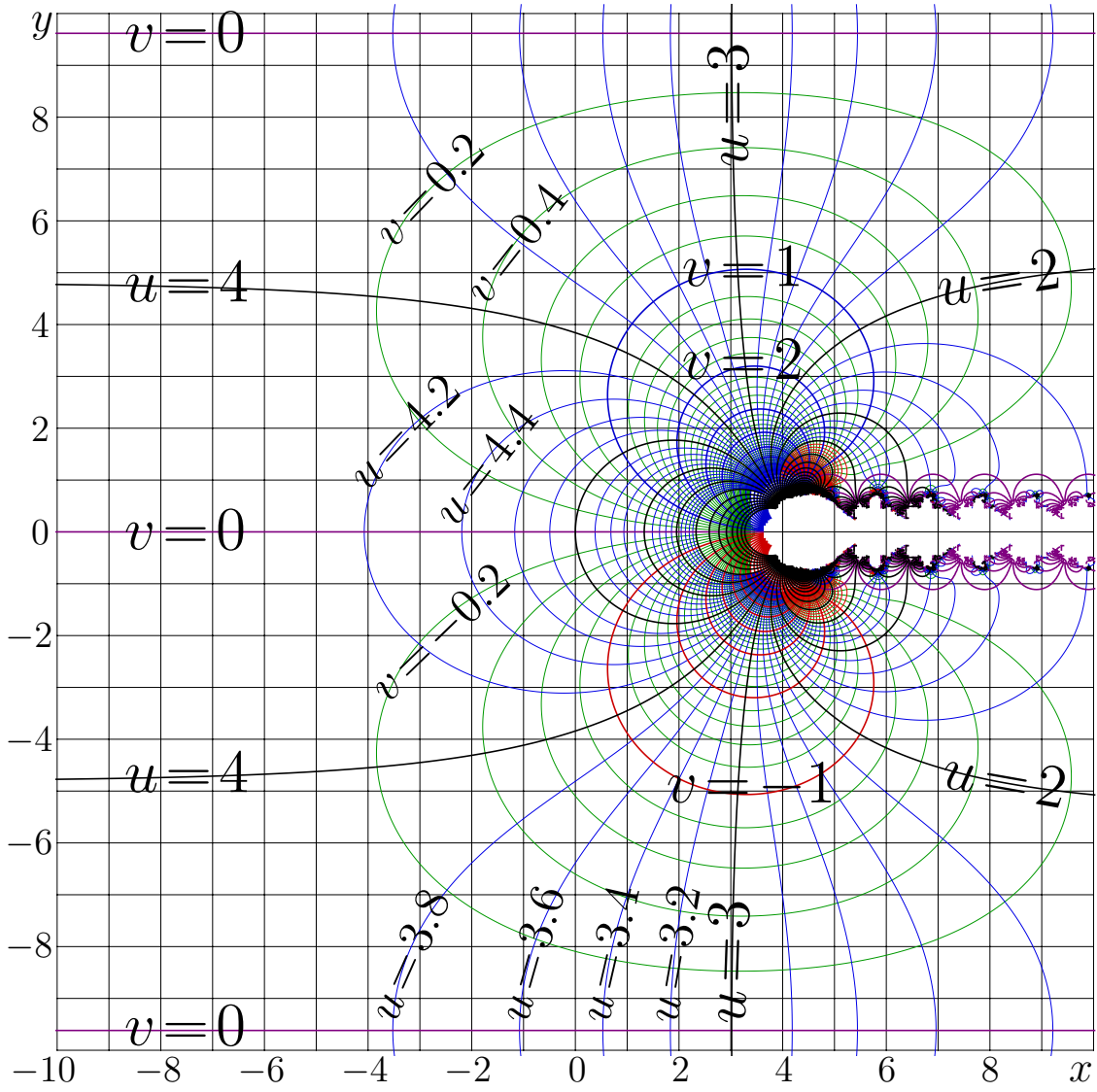
Рис. 9.5: $u+iv = f(x-1.11520724513161 + iy)$

$L = 4$. Таковую функцию можно записать как

$$\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}(z) = F(z) = f(x_{45} + z) \quad (9.13)$$

где $x_{45} \approx -1.11520724513161$ есть решение уравнения $f(x_{45}) = 0$. Карта функции $F = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ по формуле (9.13) показана на рисунке 9.6. В левой комплексной полуплоскости карты функций $z \mapsto \tilde{f}(z+x_{45})$ и $\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ практически совпадают. (Надеюсь, что рисунки 9.5 и 9.6 окажутся на одном развороте Книги.) Таким образом, первичная аппроксимация \tilde{f} распространяется на всю комплексную плоскость.

Для передаточной функции в виде экспоненты по основанию $b = \sqrt{2}$, регулярная итерация на основе стационарной точки $L = 4$ дает голоморфную во всей комплексной плоскости суперфункцию $F =$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Sqrt2figf45eT.png>

Рис. 9.6: $u+iv = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}(x+iy)$

$\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$. График этой функции показан на рисунке 9.4. Комплексная карта функции $\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ показана на рисунке 9.6.

Значение в нуле выбрано в виде наименьшего целого числа, превышающего L , то есть $F(0) = 5$. Тогда функцию F можно интерпретировать как итерацию экспоненты с начальным значением 5:

$$F(z) = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}(z) = \exp_{\sqrt{2},u}^z(5) \quad (9.14)$$

где индекс u указывает, что имеется в виду регулярная итерация, построенная на верхней (upper) стационарной точке. Для такой итерации требуется абельэкспонента $G = F^{-1} = \text{AuExp}_{\sqrt{2},5}$. Эта абельэкспонента строится в следующей секции.

2 Абельфункция на стационарной точке $L=4$

Для того, чтобы вычислять нецелые итерации передаточной функции, рассмотренной выше, то есть экспоненты по основанию $b=\sqrt{2}$, требуется построить соответствующую абельфункцию $G = F^{-1}$, то есть обратить функцию F в формуле (9.14). Построение такой абельфункции описано ниже.

Разложение для Абельфункции $g = f^{-1}$ можно получить, обращая асимптотику (9.5). Это дает для абельфункции g разложение \tilde{g} , для которого

$$\exp(k\tilde{g}(z)) = \sum_{n=1}^{N-1} U_n (z-L)^n + O(z-4)^N \quad (9.15)$$

Для расчета коэффициентов U следует отметить, что $U_0 = 0$; это означает, что стационарная точка в качестве аргумента должна уводить абельфункцию на бесконечность. Далее, в соответствии с разложением (9.5), $U_1 = 1$ и $U_2 = -a_2$. Пока коэффициенты a представлены в символьном виде (то есть бесконечно точно), Математика или Клен без потери точности может вычислять по ним коэффициенты U разложения (9.15). Функция, которая осуществляет такое преобразование, называется **InverseSeries**. В частности,

$$U_2 = \frac{\ln(2)/4}{1 - 2\ln(2)} \approx -0.4485874311952612289 \quad (9.16)$$

$$U_3 = \frac{(1+4\ln(2))\ln(2)^2/24}{1-2\ln(2)-4\ln(2)^2+8\ln(2)^3} \approx 0.21208912005491969757 \quad (9.17)$$

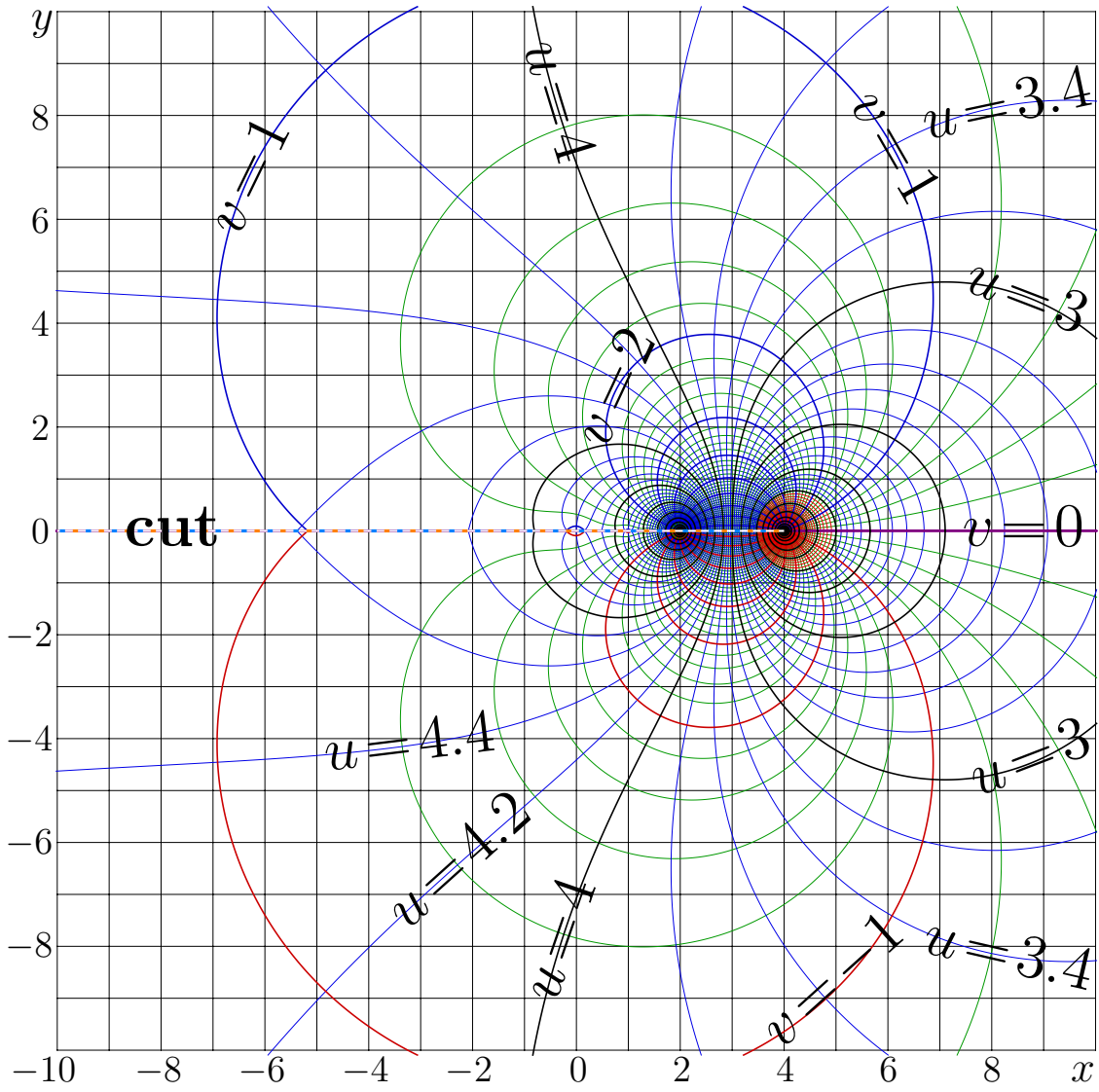
Приближенные значения коэффициентов U предложены в правом столбце таблицы 9.1. Эти же коэффициенты можно получить также и независимо от разложения для суперфункции, а именно, подставляя разложение

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{k} \ln \left(\sum_{n=1}^{N-1} U_n (z-L)^n + O(z-4)^N \right) \quad (9.18)$$

в уравнение Абеля

$$g(\exp_b(z)) = g(z) + 1 \quad (9.19)$$

Для того, чтобы несколько термов разложения $\tilde{g}(z)$ по формуле (9.18) умещались на экране или в тетради, имеет смысл ввести новую переменную для малого параметра $z-L = z-4$. Тогда первые



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Sqrt2figL45eT.png>

Рис. 9.7: $u+iv = \text{AuExp}_{\sqrt{2,5}}(x+iy)$ по формуле (9.20)

коэффициенты U в разложении (9.15) можно найти даже без помощи компьютера.

Первичное разложение $\tilde{g}(z)$ аппроксимирует абельфункцию $g(z)$ при $|z-4| < 2$. Для иных значений, используется итерация с помощью уравнения Абеля. Абельфункция $G = F^{-1}$, карта которой показана на рисунке 9.7, получается как предел таких итераций:

$$\text{AuExp}_{\sqrt{2,5}}(z) = G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}(\log_b(z-n)) + n + x_{45} \quad (9.20)$$

где $x_{45} \approx -1.11520724513161$ есть та же самая константа, которая появилась в представлении для суперфункции F , чтобы обеспечить условие $F(0) = 5$. В уравнении (9.20), эта константа обеспечивает условие $G(5) = 0$, которое должно выполняться для обратной функции от функции F .

На рисунке 9.7, символ **cut** указывает разрез области голоморфизма. Это общее правило: если некоторая нетривиальная голоморфная функция не имеет особых точек, то хотя бы один разрез есть у её обратной функции. В случае функции G , разрез идет вдоль вещественной оси от стационарной точки $L=4$ до минус бесконечности. В этой стационарной точке, абельфункция G имеет логарифмическую особенность. Эта особенность соответствует экспоненциальному стремлению суперфункции F к стационарной точке $L=4$ на минус бесконечности.

Читатели приглашаются построить карту области, в которой выполняется соотношение

$$\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}(\text{AuExp}_{\sqrt{2},5}(z)) = z \quad (9.21)$$

Ниже предлагается небольшое лирическое отступление про обозначения. В этой Книге используются короткие имена для передаточной функции, F для суперфункции и $G=F^{-1}$ для суперфункции в тех случаях, когда понятно, о какой передаточной функции идет речь и которая из суперфункций имеется в виду. Такие краткие обозначения удобны, чтобы формула уместилась на одной строке. Однако, для того, чтобы на функции этой главы было удобно ссылаться и из других глав, предложены также более длинные имена $\text{SuExp}_{\sqrt{2},5} = F$ и $\text{AuExp}_{\sqrt{2},5} = G$. Мнемоника этих имен проста. Первая буква указывает на то, что речь идет о суперфункции (Superfunction) или, соответственно об абельфункции (Abel function). Вторая буква указывает на то, что использована наибольшая (“верхняя”, “Upper”) стационарная точка передаточной функции. Последующие три символа указывают имя передаточной функции, exp. Для того, чтобы не путать такую запись с экспонентой, первая буква капитализирована, то есть сделана заглавной. Индекс указывает основание экспоненты и значение суперэкспоненты в нуле.

Длинные названия $\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ и $\text{AuExp}_{\sqrt{2},5}$ существенны для сравнения различных итераций экспоненты, предложенного в последующих главах. Для начала, в следующей секции рассмотрена такая итерация, которая неограниченно растет вдоль вещественной оси; поведение такой итерации экспоненты похоже на поведение итераций других функций, рассмотренных в предыдущих главах.

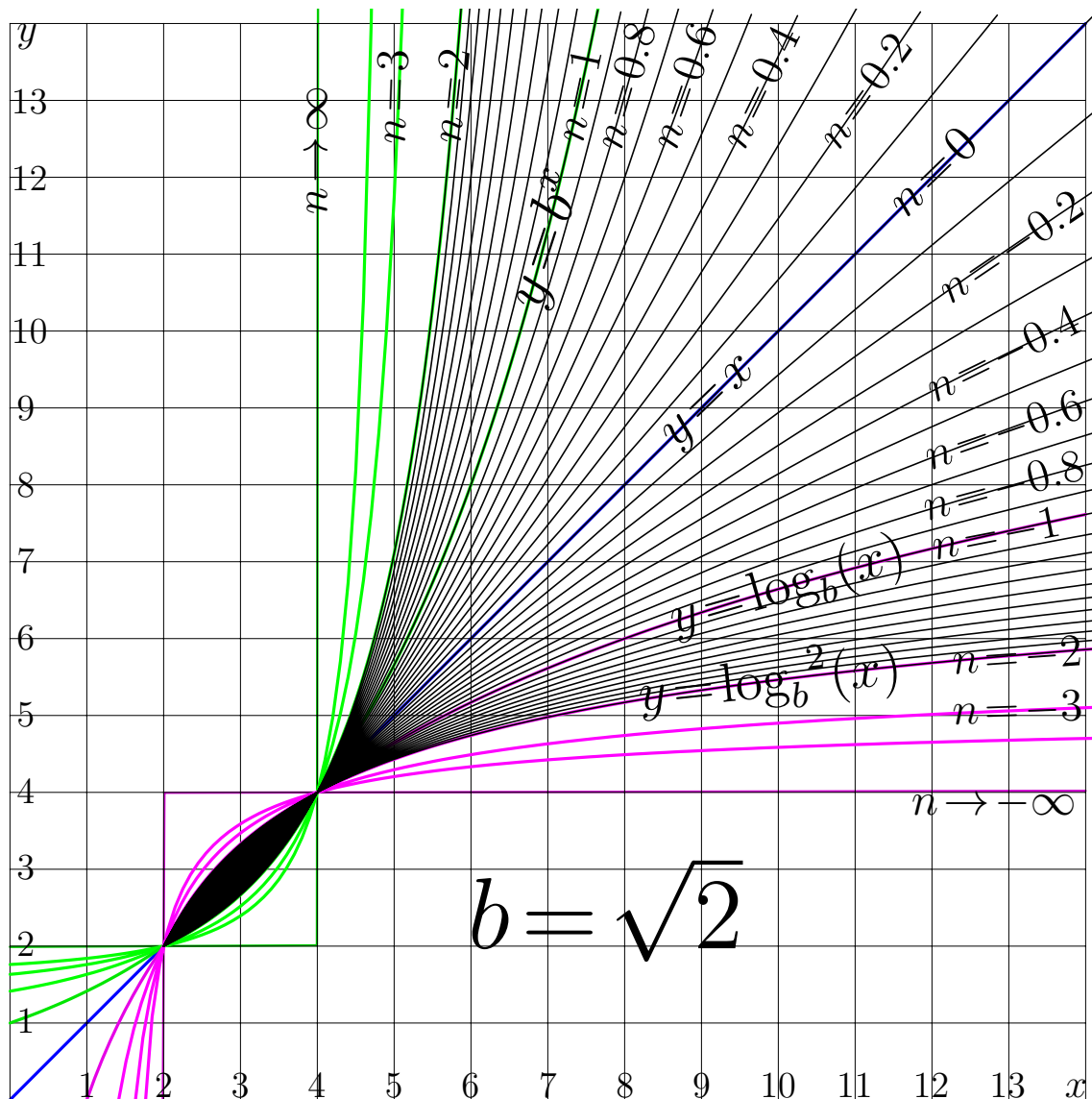


Рис. 9.8: $y = \exp_{\sqrt{2},u}^n(x)$ по формуле (9.22) для различных n .

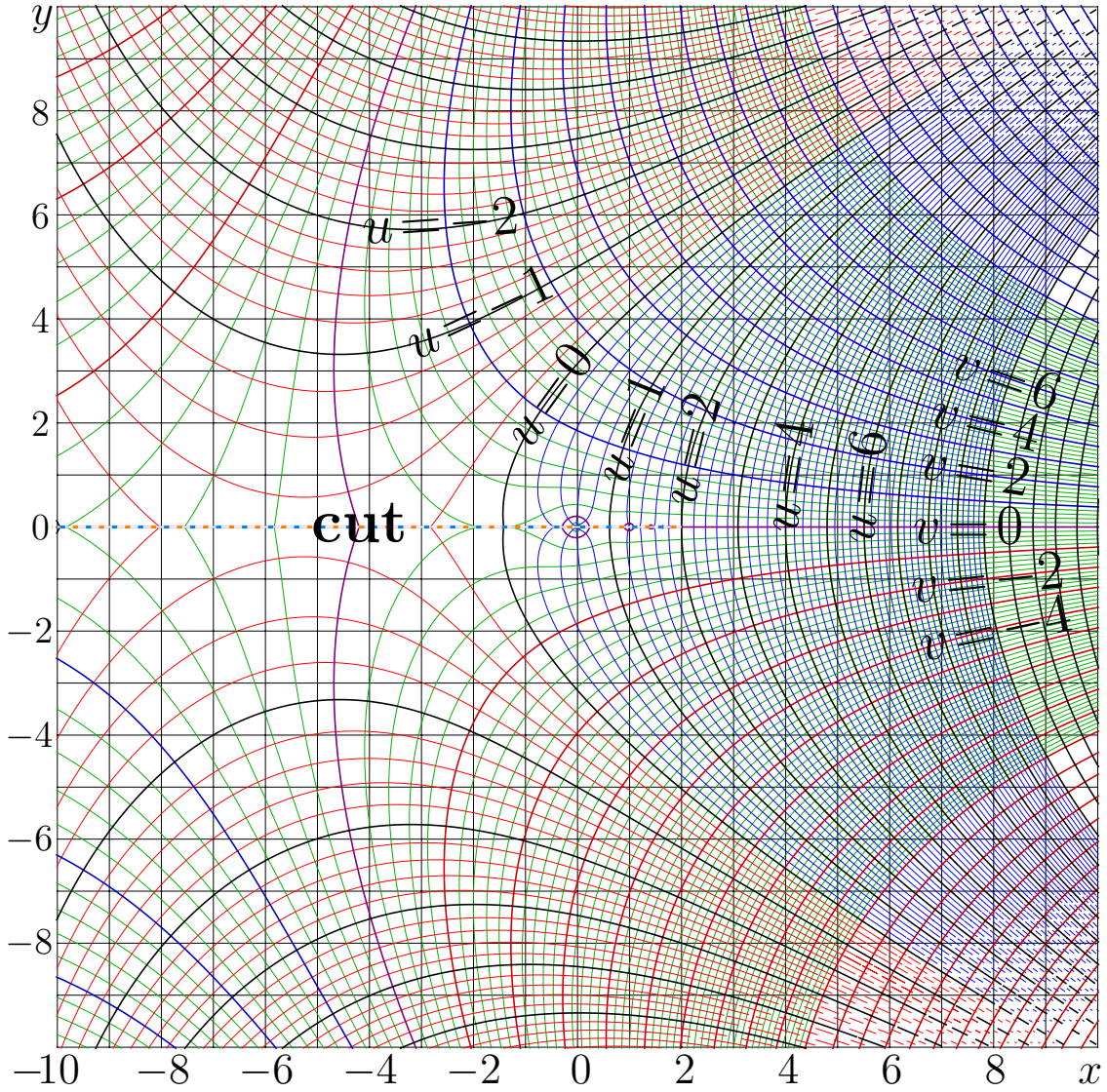
3 Итерации экспоненты по основанию $\sqrt{2}$

На основе суперфункции и абельфункции, итерация номер n экспоненты по основанию $\sqrt{2}$ может быть предствлена так:

$$T^n(z) = \exp_{\sqrt{2},u}^n(z) = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}\left(n + \text{AuExp}_{\sqrt{2},5}(z)\right) \quad (9.22)$$

Эта формула годится по крайней мере для $\Re(z) > 4$, а практически (если выбрать верхний или нижний берег разреза функции $\text{AiExp}_{\sqrt{2.5}}$) и для всей комплексной плоскости за исключением полупрямой $z \leq 2$. Для вещественных значений аргумента, такие итерации показаны на рисунке 9.8. Эти итерации монотонно растут.

Для $n=1/2$, комплексная карта этой функция показана на рисунке 9.9. Это половинная итерация экспоненты.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Esqrt2ite12mapT80.jpg>

Рис. 9.9: $u+iv=T^{1/2}(x+iy)$ по формуле (9.23).

Итерацию, показанную на рисунке 9.9, можно записать так:

$$T^{1/2}(z) = \exp_{\sqrt{2},u}^{1/2} = F\left(\frac{1}{2} + G(z)\right) = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}\left(\frac{1}{2} + \text{AuExp}_{\sqrt{2},5}(z)\right) \quad (9.23)$$

Символ u в индексе указывает, что для регулярной итерации экспоненты использована бóльшая (высшая, “upper”) среди её вещественных стационарных точек.

Абельфункция G , построенная на стационарной точке $L = 4$, имеет в этой точке логарифмическую особенность и, соответственно, точку ветвления. Однако, суперфункция F периодична; эта периодичность “нейтрализует” ветвление, и поэтому итерация передаточной функции в этой точке особенности не имеет. При этом в другой стационарной точке имеется ещё одна точка ветвления, которая периодичностью суперфункции не нейтрализуется. Поэтому нецелые итерации передаточной функции, построенные по формуле (9.22),

имеют только одну точку ветвления, а именно, 2. Функция $T^{1/2}(z)$ по формуле (9.23) голоморфна в комплексной плоскости с разрезом $z \leq 2$.

Примерно так же, как в этой секции построены итерации экспоненты по основанию $b = \sqrt{2}$ на стационарной точке $L = 4$, можно строить итерации и на другой стационарной точке, $L = 2$, и для нецелых итераций получаются, вообще говоря, разные функции. Поэтому, если у передаточной функции есть более одной вещественной стационарной точки, то при нецелом итерировании желательно указывать, к которой из стационарных точек относится итерация.

4 Результаты этой главы

Теперь я постараюсь собрать основные результаты этой главы. Для функций этой главы используются обозначения

$$F = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5} \quad (9.24)$$

$$G = \text{AuExp}_{\sqrt{2},5} \quad (9.25)$$

$$\exp_b^n = \exp_{\sqrt{2},u}^n \quad (9.26)$$

Первые буквы S и A использованных имен указывают, что речь идет о суперфункции или об абельфункции от экспоненты по основанию $b = \sqrt{2}$. Вторая буква названия указывает, что использована верхняя (upper) стационарная точка такой экспоненты. Цифра 5 в индексе указывает значение в нуле, выбранное для суперфункции. В случае итерации экспоненты, результат не зависит от того, какое значение выбрано в нуле (предполагается, что $G = F^{-1}$), и поэтому в формуле (9.26) значение суперфункции в нуле можно не указывать.

Возможность итерирования какой попало функции сильно расширяет инструментарий доступных голоморфных функций. В частности, нецелые итерации экспоненты или факториала могут использоваться для описания процессов, растущих быстрее любой степенной функции, но медленнее любой растущей экспоненциальной функции. Формализм суперфункций может вывести теорию и практику аппроксимации (то есть моделирования) физических процессов на качественно новый уровень.

5 Большой камень

Путешественник или восходитель, вскарабкавшийся на хребет или каменистый перевал, и чуток оборзевший от тяжёлого подъема, может обозреть дальнейший путь. Так же Читатель (а также и автор), прочтя, как получилось изложение регулярной итерации, может обозреть, какие ещё случаи итераций можно (и нужно) рассмотреть. Такое обозрение предлагается ниже.

В этой секции представлен своего рода “промежуточный финиш”. То есть обзор нескольких глав Книги. Представленные выше результаты могут создать впечатление, что изучение итераций, суперфункций и абельфункций закончено, и осталось только применять общую формулу регулярной итерации к всяческим специальным функциям. Однако это не совсем так, и построенная выше “регулярная итерация” работает не всегда. Чтобы указать на это, я пишу эту секцию.

Итерации быстро растущих функций ведут себя похожим образом. Можно сравнить рисунок 9.8 с рисунком 4.11 для итераций степенной функции и с рисунком 8.8 для итераций факториала. Итерации степенной функции выражаются через степенную же функцию (с другим показателем), Итерации рациональной функции выражаются рациональной же функцией (с другими параметрами). Однако для многих других передаточных функций аналогичных представлений для итераций нет. При этом многие свойства суперфункций, то есть поведение на бесконечности, периодичность, голоморфизм и т.п., для разных случаев сходны. На основе такого сходства было предложено нахальное утверждение, что я умею строить физически-осмысленные суперфункции, соответствующие абельфункции и, соответственно, нецелые итерации для какой попало возрастающей вещественно-голоморфной передаточной функции.

С тех пор я сравниваю себя Богом Всемогущим, и задаюсь вопросом о том, может ли такой Бог создать столь большой камень, что сам не сможет сдвинуть его с места. То есть пытаюсь придумать такую голоморфную передаточную функцию, для которой я не могу построить физически-осмысленную суперфункцию.

В качестве кандидата на упомянутый “камень” можно рассмотреть какую-нибудь передаточную функцию с сингулярностью, с тем, что-

бы при применении передаточной функции к значениям суперфункции получались значения, которые заставляют функцию “скакать” через её сингулярность. При этом алгоритм наткнется на необходимость вычислять передаточную функцию от значения, которое не входит в область её голоморфизма, и вместо суперфункции выдаст сообщение об ошибке. То есть я не смогу предложить итерацию, которая непрерывным (голоморфным) образом переходит через сингулярность передаточной функции и буду вынужден признать, что мое заявление про “какую попало функцию” слишком претенциозно. И оппоненты восторжествуют.

Простым примером упомянутой сингулярной передаточной функции является $T(z) = -1/z$, рассмотренная в Главе 4. Такая функция растёт, и столь быстро, что в нуле имеет сингулярность, и непрерывная (и голоморфная) итерация сквозь эту сингулярность могла бы вызвать трудности. Впрочем, оказалось, что именно для этого случая суперфункция не только существует, но выражается в терминах элементарных функций.

В принципе, сингулярную передаточную функцию можно модифицировать, чтобы её запись становилась сложнее, чтобы я запутался в алгебре, и декларировал такую передаточную функцию как “нерешаемую”. Вероятно, такая передаточная функция будет иметь точки ветвления, чтобы алгоритм не смог обойти сингулярности, а попытки использовать интеграл Коши¹, рассмотренный ниже (см. формулу (14.21)), наткнулись на разрезы области голоморфизма. Тогда можно будет говорить, что эта передаточная функция и есть камень, который Бог не может сдвинуть с места. И я буду вынужден признать, что оппоненты закинули в мой огород Очень большой камень.

В качестве других примеров можно предложить передаточную функцию, которая не имеет удобных для расчетов стационарных точек; тогда регулярная итерация, предложенная в этой секции, не применима. Простым примером функции с “неудобными” стационарными

¹Суть формулы Коши в том, что $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(t) dt}{t-z}$. Коши (кошки) обходят “свою” территорию по замкнутому контуру; если на этом контуре с функцией всё в порядке, то кошки считают, что и внутри контура всё тоже слава Богу. Эта концепция является научной и имеет ограниченную область применимости; она применима только для голоморфных функций F .

точками является экспонента по основанию $b > \exp(1/e)$, и, в частности, натуральная экспонента, которая получается при $b = e$. То есть передаточная функция $T = \exp$.

Исторически получилось так, что именно для натуральной экспоненты комплексная карта суперфункции, а именно - тетрации [44], оказалась построена раньше, чем для других оснований b . После этого встал вопрос о применимости использованного при этом алгоритма для случаев $0 < b \leq \exp(1/e)$. Алгоритм оказался не применимым, и пришлось строить формализм регулярной итерации, предложенный в этой главе. Этот алгоритм оказался проще, чем формализм для натуральной тетрации [44], и поэтому в этой Книге изложен раньше. Как указано в Предисловии, для этой Книги я сразу и категорично отвергаю исторический порядок изложения, хотя упорядочиваю цитируемую литературу в хронологическом порядке.

Профессиональные историки могут поднять работы Абеля [3], Фато [6], Кнезера [10], Сзекереса [11], Экале [17] и других коллег, чтобы представить исторический процесс создания аппарата суперфункций во всех деликатных подробностях. Я надеюсь, что в цивилизованных странах цензура не будет препятствовать публикации и распространению подробной монографии по истории создания суперфункций. Однако это всё-таки “совсем другая история” [14], и такая история выходит за рамки декларированной темы этой Книги. Я оставляю историю создания формализма суперфункций для соответствующих узких специалистов ².

Таким образом, я начинаю с совсем простого, и торжественно заявляю: предложенный выше метод построения суперфункции и абель-функции (и нецелых итераций) не универсален. Может статься, что передаточная функция хоть и имеет вещественную стационарную точку, но применение регулярной итерации, как она изложена выше, невозможно, так как знаменатели формул (6.9) принимают значение ноль. Такой случай рассмотрен в следующей главе.

²Узкая специализация вполне соответствует общему направлению развития человеческой цивилизации. В современных больницах даже клизму ставят два специалиста: один из них знает, как, а другой - куда.

Глава 10

Экзотические итерации

Регулярная итерация по формулам (6.1)-(6.11) не является универсальным способом построения суперфункции. В частности, разложение (6.1) становится недопустимым, когда производная передаточной функции в стационарной точке становится единицей, то есть

$$T(L) = L \quad , \quad T'(L) = 1 \quad (10.1)$$

При этом выражение $T' - 1 = T'(L) - 1$ в знаменателе правой части формулы (6.9) обращается в ноль, лишая смысла коэффициенты в разложении (6.1). Такое совпадение можно назвать экзотикой (рис. 10.1); это определяет название главы.

На основе указанного выше обстоятельства, ожидалось, что вычисление суперфункций для случая $T'(L) = 1$ будет сложным, медленным и с большой погрешностью. В этой главе показано, что эффективные способы вычисления суперфункций, абельфункций, и, соответственно, нецелых итераций существуют и для этого случая.

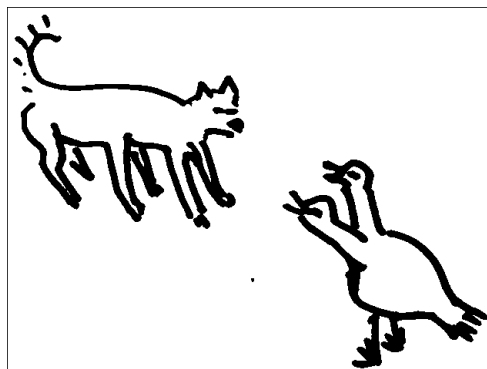


Рис. 10.1: Экзотикой называется то, что встречается нечасто, если вообще

1 Единичная производная

В этой секции показано, как по коэффициентам разложения передаточной функции в стационарной точке построить алгоритм для вычисления суперфункции. Для простоты предположим, что стационарная точка равна нулю, то есть $L=0$. Если это условие по каким-либо причинам не выполнено, то суперфункцию F можно представить в виде

$$F(z) = f(z) + L \quad (10.2)$$

и тогда для функции f получаются формулы

$$f(z+1) = F(z+1) - L = T(F(z)) - L = T(L + f(z)) - L \quad (10.3)$$

При этом можно определить

$$T_{\text{new}}(z) = T(L + z) - L \quad (10.4)$$

и интерпретировать эту T_{new} как новую передаточную функцию, для которой f будет суперфункцией. В дальнейшем, в этой секции, индекс $_{\text{new}}$ не пишется. Фактически предполагается, что

$$T(0) = 0 \quad (10.5)$$

Пусть разложение Тэйлора передаточной функции в нуле имеет вид

$$T(z) = z + vz^2 + wz^3 + .. \quad (10.6)$$

причём $v \neq 0$. Для такой передаточной функции невозможно построить суперфункцию, на бесконечности экспоненциально стремящуюся к нулю. Однако можно построить функцию, которая убывает примерно как обратная пропорциональная зависимость. Пусть

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b\ell}{z^2} + \frac{\alpha\ell^2 + \beta\ell + \gamma}{z^3} + .. \quad (10.7)$$

a, b, α, β и γ суть константы, а $\ell = \ln(z)$. Ниже показано, как, зная коэффициенты v и w разложения (10.6) передаточной функции, найти коэффициенты a и b в разложении (10.7).

Для преобразования аргумента $z \mapsto z+1$, преобразование выражений в асимптотическом представлении (10.7) осуществляется следу-

ющим образом:

$$\frac{1}{z} \mapsto \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (10.8)$$

$$\frac{1}{z^2} \mapsto \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-2} = \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \dots \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \ell = \ln(z) \mapsto \ln(z+1) &= \ln\left(z \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \ln(z) + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \ell + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \dots \end{aligned} \quad (10.10)$$

С этими заготовками, левая часть передаточного уравнения

$$f(z+1) = T(f(z)) \quad (10.11)$$

записывается в таком виде:

$$\begin{aligned} f(z+1) &= \frac{a}{z} - \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z^3} + \frac{b\ell + b/z}{z^2} \left(1 - \frac{2}{z}\right) + \frac{\alpha\ell^2 + \beta\ell + \gamma}{z^3} + \dots \\ &= \frac{a}{z} + \frac{1}{z^2}(-a + b\ell) + \frac{1}{z^3}(a + b - 2b\ell + \alpha\ell^2 + \beta\ell + \gamma) + \dots \end{aligned} \quad (10.12)$$

Тогда правая часть уравнения (10.11) записывается так:

$$\begin{aligned} T(f(z)) &= \frac{a}{z} + \frac{b\ell}{z^2} + \frac{\alpha\ell^2 + \beta\ell + \gamma}{z^3} + v \cdot \left(\frac{a}{z} + \frac{b\ell}{z^2}\right) + \dots \\ &= \frac{a}{z} + \frac{1}{z^2}(b\ell + ba^2) + \frac{1}{z^3}(\alpha\ell^2 + \beta\ell + \gamma + 2vab\ell + wa^3) + \dots \end{aligned} \quad (10.13)$$

Следует приравнять правые части уравнений (10.12) и (10.13). Коэффициенты при $\frac{1}{z}$ совпадают сами. Для того, чтобы совпадали коэффициенты при $\frac{1}{z^2}$, следует потребовать, чтобы

$$-a = va^2 \quad (10.14)$$

Для того, чтобы совпадали коэффициенты при $\frac{1}{z^3}$, следует потребовать, чтобы

$$a + b - 2b\ell = 2vab\ell + wa^3 \quad (10.15)$$

Ввиду того, что $\ell = \ln(z)$, то есть зависит от z , а уравнение (10.15) должно иметь место для разных z , из этого уравнения получаются два требования:

$$-2b = 2vab \quad (10.16)$$

которое, при $b \neq 0$, дает то же, что и (10.14), а также

$$a + b = wa^3 \quad (10.17)$$

Решая эти уравнения, получаю:

$$a = \frac{-1}{v}, \quad b = \frac{-w}{v^3} + \frac{1}{v} \quad (10.18)$$

Коэффициенты асимптотического разложения (10.7) определяются коэффициентами разложения (10.6) передаточной функции.

Далее, как в случае обычной регулярной итерации, асимптотическое решение распространяется на всю комплексную плоскость применением одной из формул

$$f(z) = T^n(f(z - n)) \quad (10.19)$$

или

$$f(z) = T^{-n}(f(z + n)) \quad (10.20)$$

с тем, чтобы сделать аргумент суперфункции большим, приводя его в область, где асимптотическое разложение (10.7) дает требуемую точность. Выбор одной из формул (10.19) или (10.20) определяет разрезы получаемой функции. Для того, чтобы изменить направление линии разреза, может потребоваться заменить $\ell = \ln(z)$ на $\ell = \ln(-z)$.

В принципе, с даже с двумя слагаемыми, такое представление суперфункции позволяет строить качественные карты суперфункций в реальном времени. Вероятно, такое представление достаточно для применений в физике и других науках, где точность измерения передаточной функции обычно существенно меньше 14 значащих цифр.

Для проверочных расчетов с высокой точностью желательно подсчитать ещё несколько коэффициентов разложения суперфункции, тогда параметр n можно брать меньше и погрешность уменьшается. С помощью пакета “Mathematica”, десятки коэффициентов в разложении (10.7) могут быть вычислены. Затем, через уравнения (10.19) или (10.20), асимптотическое представление решения определяет точную суперфункцию и распространяется на всю (или почти всю) комплексную плоскость.

2 Отличная от нуля стационарная точка

Формулы предыдущей секции написаны для передаточной функции, стационарной точкой которой является ноль, и производная в этой стационарной функции в нуле равна единице. При этом упомянуто, что эти формулы допускают обобщение на случай, когда стационарная точка не равна нулю. Такой случай рассмотрен ниже.

Допустим, требуется построить суперфункцию \mathcal{F} для передаточной функции \mathcal{T} , которая на бесконечности стремится к её стационарной точке \mathcal{L} , то есть $\mathcal{T}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, и при этом $\mathcal{T}'(\mathcal{L}) = 1$.

Пусть новая передаточная функция T связана с исходной передаточной функцией \mathcal{T} соотношением

$$T(z) = \mathcal{T}(z + \mathcal{L}) - L \quad (10.21)$$

Если \mathcal{L} есть стационарная точка передаточной функции \mathcal{T} , то $L = 0$ есть стационарная точка передаточной функции T .

Суперфункция \mathcal{F} для передаточной функции \mathcal{T}

$$F(z) = \mathcal{F}(z) - \mathcal{L} \quad (10.22)$$

Схожим образом преобразуется и абельфункция $G = F^{-1}$:

$$G(z) = \mathcal{G}(z + \mathcal{L}) \quad (10.23)$$

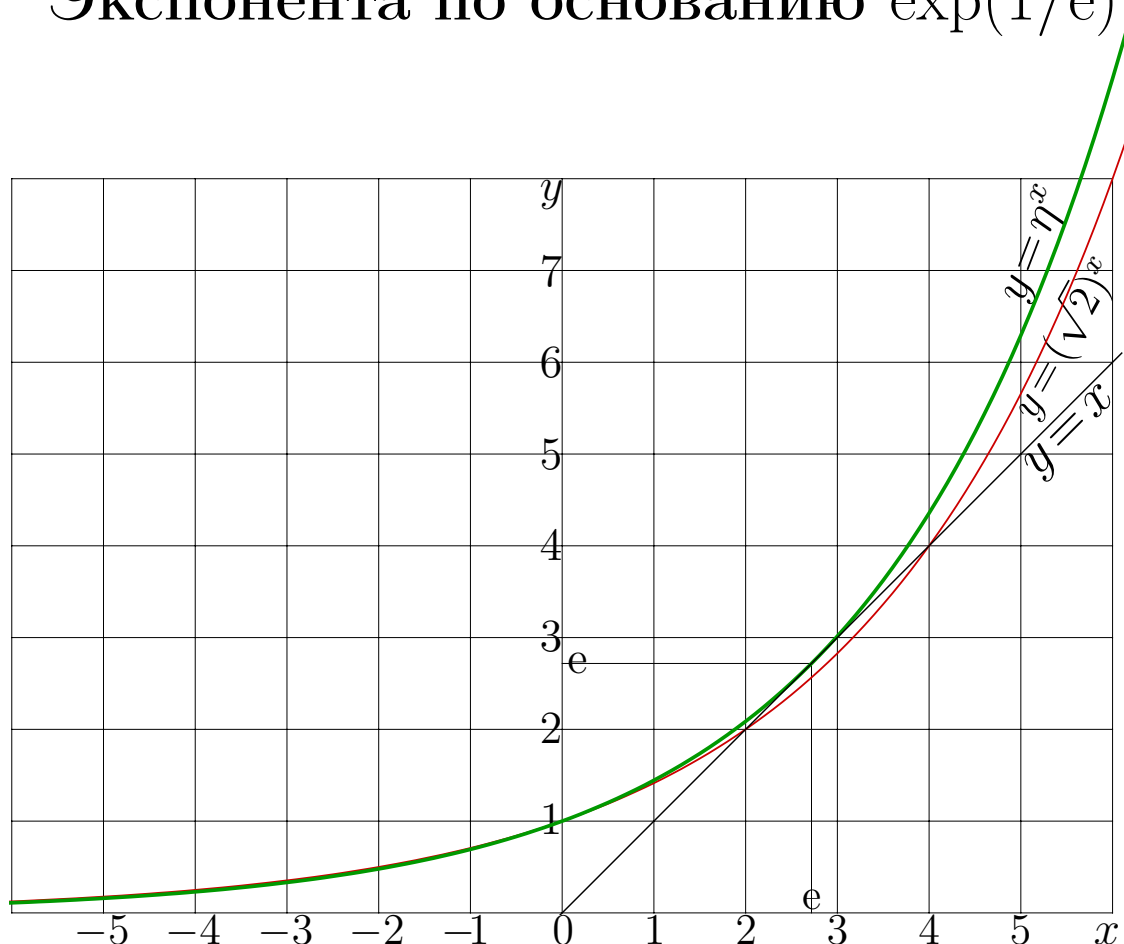
Читатель может проверить, что если в некоторой области значений z выполняется $F(G(z)) = 1$, то и в некоторой области значений z выполняется $\mathcal{F}(\mathcal{G}(z)) = 1$, и наоборот. Таким образом, рассмотрения случая $T(L) = L$, $T'(L) = 1$ сводится к рассмотрению случая $T(0) = 0$, $T'(0) = 1$, рассмотренного в предыдущей секции.

В следующей главе, предложенные здесь формулы применяются для вычисления суперфункции экспоненты по основанию $b = \exp(1/e)$. Этот случай рассмотрен по просьбе Генрика Траппманна, и константу $\eta = \exp(1/e) \approx 1.44466786101$ можно назвать константой Генрика или основанием Генрика ¹. Карта такой экспоненты, карта её обратной функции и явный график для вещественных значений аргумента показаны в следующей главе на рисунках 11.2, 11.3, 11.1.

¹ Название “**Основание Генрика**” несколько двусмысленно, примерно как “**Защита Лужина**”, или “**Изобретение Вальса**”, или комбинация “**РОЙ МЕДВЕДЕВ — Они кружились вокруг Сталина**”. Вероятно, удачное название и должно быть двусмысленным, чтобы читатель подумал, как бы такое защитить Лужина, или о том, где и когда изобретён Вальс, или представил себе медведей (или даже “медведёв”), которые, как пчёлы, роем кружат вокруг Сталина, или попытался вспомнить, кто и как основал Генрика.

Глава 11

Экспонента по основанию $\exp(1/e)$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Expe1eplotT.jpg>

Рис. 11.1: $y = b^x$ для $b = \eta = e^{1/e} \approx 1.44466786$ и $b = \sqrt{2} \approx 1.41421356$

В этой главе рассмотрен специальный случай экспоненты по основанию $b = \eta = \exp(1/e) \approx 1.44466786$. То есть речь идет о функции T по формуле

$$\mathcal{T}(z) = \eta^z = \exp_{\eta}(z) = \exp(\ln(\eta) z) = \exp(z/e) \quad (11.1)$$

График этой экспоненты показан на рисунке 11.1 толстой кривой. Для сравнения, тонкой кривой показана также экспонента по основанию $\sqrt{2}$, рассмотренная в главе 9; тонкая кривая воспроизводит график рисунка 9.1. Кривые на рисунке 11.1 близки; при умеренных

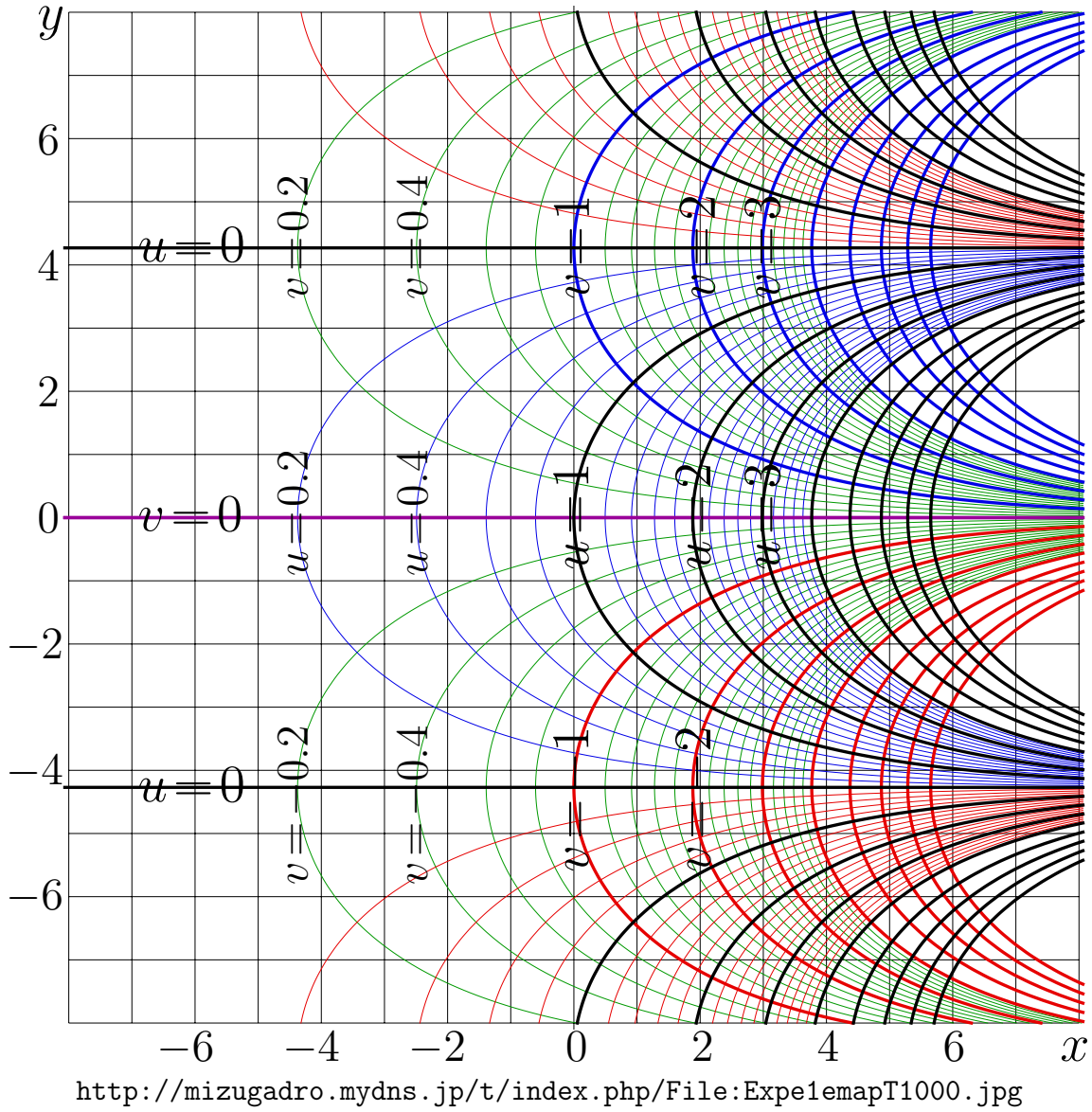


Рис. 11.2: $u+iv = \exp_{\eta}(x+iy)$

и отрицательных значениях абсциссы они почти сливаются. Однако поведение в окрестностях стационарных точек различно, и это предопределяет различное поведение соответствующих суперфункций в комплексной плоскости.

Комплексная карта функции \exp_{η} показана на рисунке 11.2. Эта карта похожа на карту рисунка 9.2; незначительно отличается лишь период. Для основания η , этот период

$$P_{\exp_{\eta}} = 2\pi i e \approx 17.0794684453i \quad (11.2)$$

Забавно, что такая простая формула объединяет сразу три фундаментальные математические константы: π , i , и e . К тому же, основание Генрика $\eta = \exp^2(-1) = \exp(1/e) \approx 1.44466786101$ тоже является

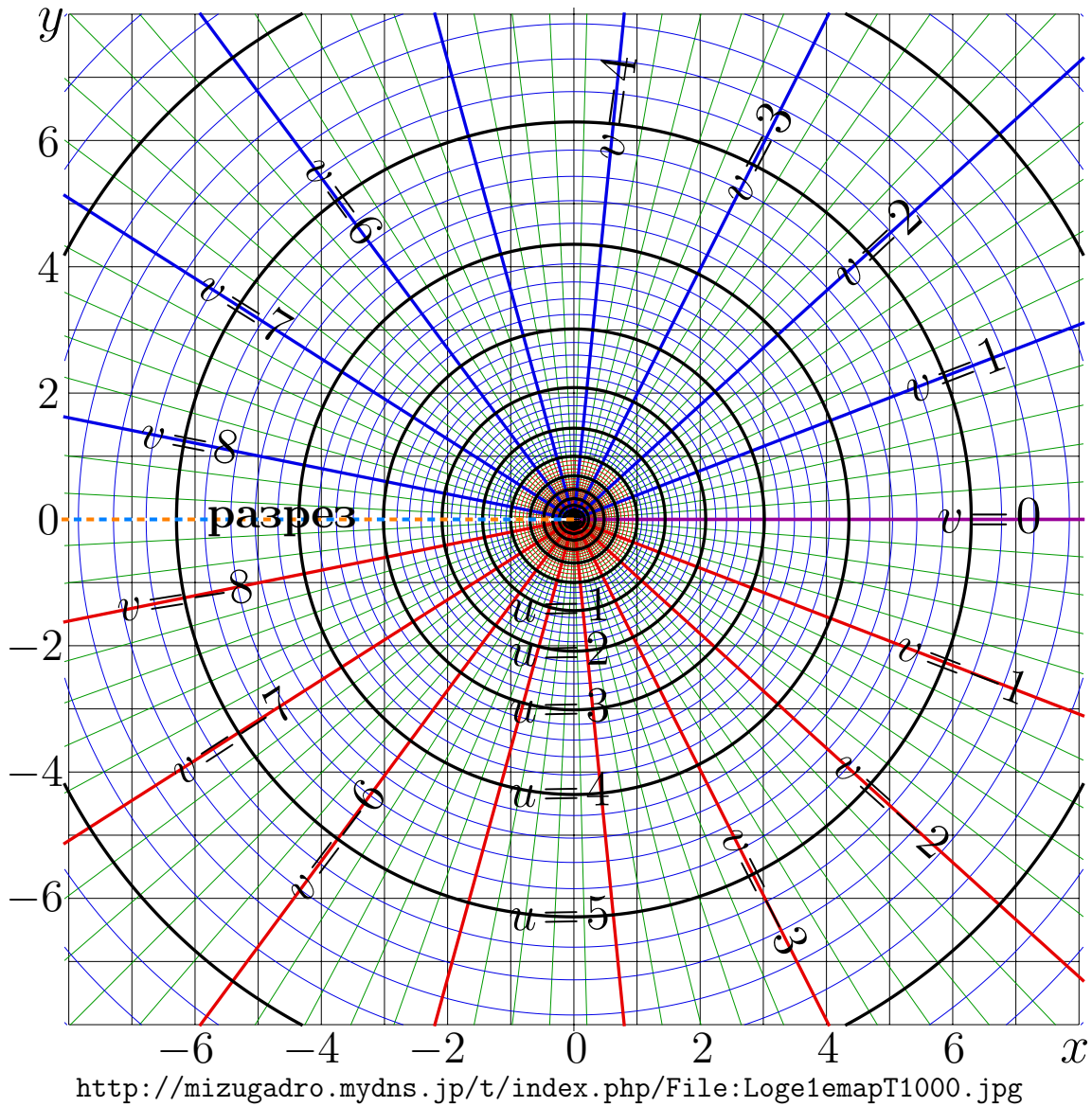


Рис. 11.3: $u+iv=\log_{\eta}(x+iy)$

математической константой. Чуть меньше одного периода уместилось на карте 11.2.

Комплексная карта обратной функции, то есть $\log_{\eta}=\exp_{\eta}^{-1}$, показана на рисунке 11.3. Эта карта похожа на карту логарифма по основанию $\sqrt{2}$, представленную в главе 9 на рисунке 9.3; на том рисунке сетка изолиний чуть гуще: линия уровня $u=6$ целиком уместается на карте, а на карте рисунка 11.3 она уместилась лишь частично; а уровень $v=\pm 9$ оказался за линией разреза.

Значение $b=\eta$ есть максимальное основание, при котором экспонента всё ещё имеет вещественную стационарную точку. Для такой экспоненты в этой главе строятся суперфункция, абельфункция и итерации.

1 Суперэкспонента по основанию $\eta = e^{1/e} = \exp^2(-1)$

Генрик Траппманн считал, что для экспоненты по основанию

$$\eta = \exp(1/e) = \exp^2(-1) \approx 1.44466786101 \quad (11.3)$$

эффективный алгоритм вычисления суперфункций построить нельзя. Генрик был далеко не одинок в таком мнении; такое же мнение высказывали многие коллеги, в том числе участники его форума. Это же мнение в публикации 1991 года выражал Петр Волкер (Peter L Walker) [24]. Чтобы переубедить Генрика, нам с ним пришлось писать специальную статью для журнала Mathematics of Computation [69]; её часть пересказана в этой главе.

Пусть передаточная функция \mathcal{T} определяется формулой 11.1 предыдущей секции; пусть

$$\mathcal{T}(z) = \eta^z = \exp_{\eta}(z) = \exp(\ln(\eta) z) = \exp(z/e) \quad (11.4)$$

Чтобы применить формализм экзотической итерации, следует определить новую передаточную функцию по формуле (10.21); для случая (11.4) получается передаточная функция

$$T(z) = \exp((z+e)/e) - e = \exp(z/e + 1) - e \quad (11.5)$$

Для такой передаточной функции

$$T(0) = 0 \quad (11.6)$$

$$T'(0) = 1 \quad (11.7)$$

$$T''(0) = 2v = 1/e \quad (11.8)$$

$$T'''(0) = 6w = 1/e^2 \quad (11.9)$$

$$\dots \quad (11.10)$$

$$T^{(n)}(0) = 1/e^{n-1} \quad (11.11)$$

В последней строчке, в левой части, верхний индекс указывает не номер итерации, а номер производной.

В принципе, для этого случая, экзотические итерации, описанные в начале главы, можно применять как есть. Разложение (10.6) записывается так:

$$T(z) = z + \frac{1}{2e}z^2 + \frac{1}{6e}z^3 + \dots \quad (11.12)$$

Для $v = \frac{1}{2e}$ и $w = \frac{1}{6e^2}$, формулы (10.18) дают

$$a = -2e \approx -5.43656365691809 \quad (11.13)$$

$$b = -\frac{e}{3} + \frac{1}{8e^3} \approx 1.604598172578777 \quad (11.14)$$

При этом первичная аппроксимация f для суперфункции (10.7) приобретает такой вид:

$$\tilde{f}(z) = -\frac{1}{z} + \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{\ln(\pm z)}{z^2} + .. \quad (11.15)$$

Ещё несколько слагаемых в этом разложении можно вычислить аналитически; особенно если при этом используются какие-нибудь Математики или Клены. Оборванный ряд, даже с двумя слагаемыми, аппроксимирует суперфункцию. Для $|z| > 100$, такая формула даёт несколько корректных значащих цифр. Для остальных значений следует многократно использовать передаточное уравнение, выражая суперфункцию требуемого аргумента через суперфункцию от достаточно большого аргумента, сдвигая значение, при котором используется первичное приближение, вправо или влево, параллельно вещественной оси. Такой алгоритм позволяет строить комплексные карты суперфункции с хорошим разрешением и в реальном времени.

Для аккуратного приближения суперфункции и проверки, имеет смысл несколько модифицировать разложение. Для вычисления суперфункций от экспоненты по основанию Генрика, лучше использовать разложение

$$\tilde{F}(z) = \frac{-2e}{z} \left(1 + \sum_{m=1}^M \frac{P_m(-\ln(\pm z))}{(3z)^m} + \mathcal{O}(\ln(\pm z)/z)^{M+1} \right) \quad (11.16)$$

где

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^m c_{m,n} x^n \quad (11.17)$$

Коэффициенты c получаются при подстановке разложения (11.16) в передаточное уравнение

$$\tilde{F}(z+1) = \exp\left(\tilde{F}(z)/e + 1\right) - e$$

и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях z в правой и левой частях равенства. Первые пять полиномов P представ-

лены ниже:

$$P_1(t) = t \quad (11.18)$$

$$P_2(t) = t^2 + t + 1/2 \quad (11.19)$$

$$P_3(t) = t^3 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{7}{10} \quad (11.20)$$

$$P_4(t) = t^4 + \frac{13}{3}t^3 + \frac{45}{6}t^2 + \frac{53}{10}t + \frac{67}{60} \quad (11.21)$$

$$P_5(t) = t^5 + \frac{77}{12}t^4 + \frac{101}{6}t^3 + \frac{83}{4}t^2 + \frac{653}{60}t + \frac{2701}{1680} \quad (11.22)$$

Как и для регулярных итераций, используется предел

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} T^n(f(z - n)) \quad (11.23)$$

где функция f получена обрывом асимптотического ряда в формуле (11.16), а n выбирается положительным или отрицательным в зависимости от того, верхний или нижний знак использован в аргументе полиномов P в формуле (11.16).

Удобно определить такие суперфункции, которые имеют целочисленное значение в нуле, используя трансляцию аргумента:

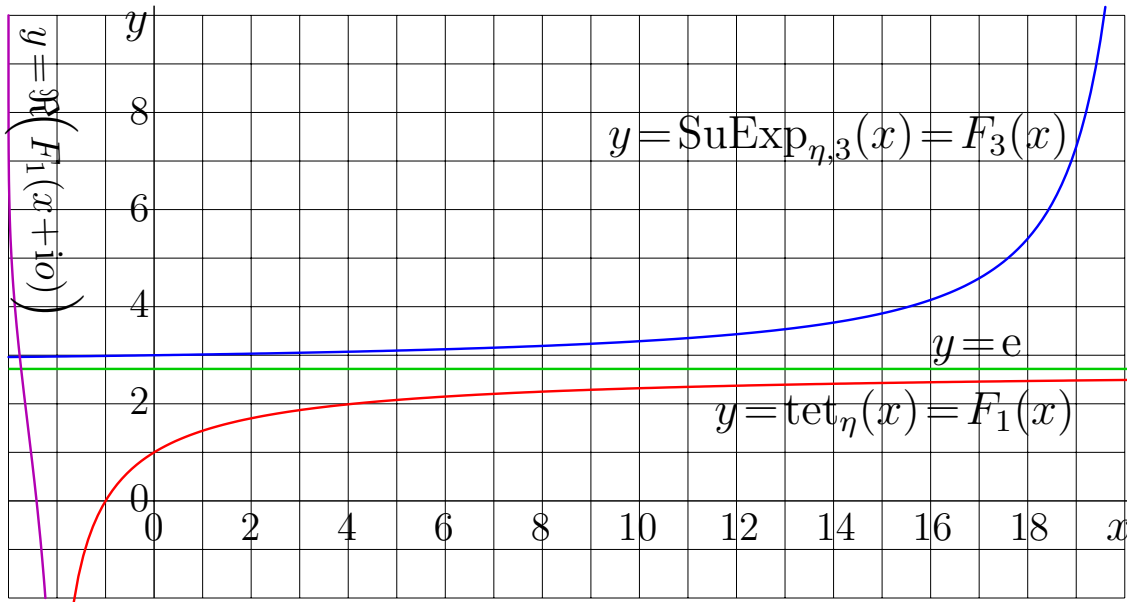
$$\text{tet}_\eta(z) = F_1(z) = f(z + x_1) \quad (11.24)$$

$$\text{SuExp}_{\eta,3}(z) = F_3(z) = f(z + x_3) \quad (11.25)$$

где константы $x_1 \approx 2.798248154231454$ и $x_3 \approx -20.28740458994004$ выбраны так, чтобы обеспечить соотношения $F_1(0) = 1$ и $F_3(0) = 3$.

Функция tet_η соответствует верхнему значению выражения \pm в формулах (11.16), (11.23), а функция (11.25) - нижнему. Таким образом, F_1 и F_3 суть совсем разные функции, и их трудно выразить одну через другую простым преобразованием. В формулах (11.24) и (11.25), для этих функций предложены новые и чуть более длинные имена $\text{tet}_{\exp(1/e)}$ и $\text{SuExp}_{\exp(1/e)}$. Это делается для того, чтобы облегчить их идентификацию при использовании в других главах этой Книги, где рассматриваются суперфункции от экспоненты по другим основаниям, то есть где не обязательно $b = \eta$. Первое из этих названий, tet_η , совершенно естественно, и указывает, что речь идет о тетрации; для тетрации по любому основанию b , подразумевается условие $\text{tet}_b(0) = 1$. Более подробно свойства тетрации рассматриваются в специальной главе.

Выбор значения в нуле для растущей суперфункции F_3 не так прост. В работах [50, 69] (и не только там), для растущей вещественно-



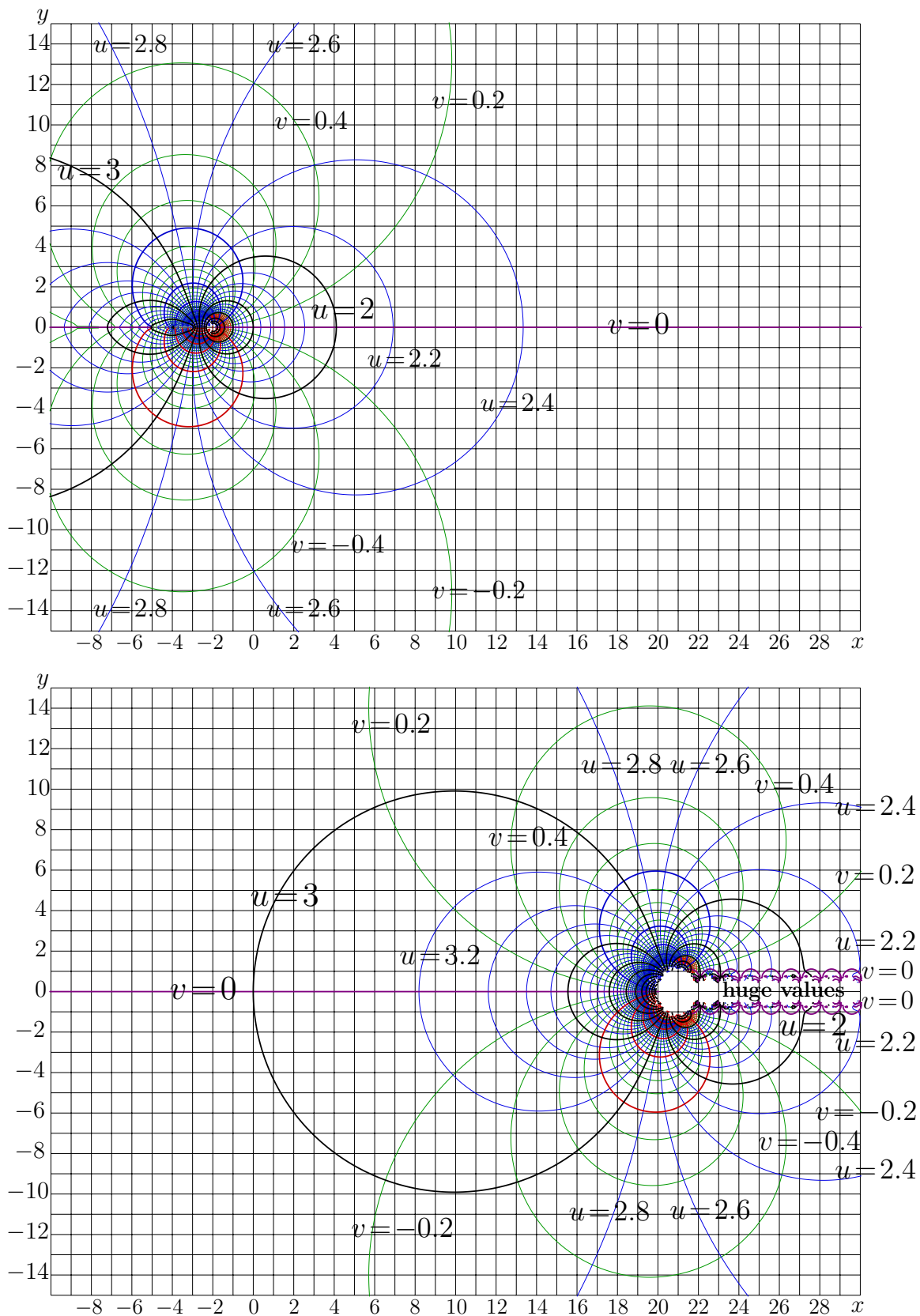
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:E1eplot8.png>

Рис. 11.4: Две суперэкспоненты по основанию $b = \exp(1/e)$

голоморфной суперфункции, построенной на некоторой вещественной стационарной точке L передаточной функции, в качестве значения в нуле выбирается наименьшее целое число, большее L . Такой выбор оправдан, когда в работе рассматривается лишь одна передаточная функция без параметров (или с фиксированными значениями параметров). Однако такой выбор приводит к кусочно-непрерывной (то есть не голоморфной) функции при рассмотрении зависимости суперфункции от этого параметра. Поэтому, на случай если такая зависимость потребуется, предлагается обозначение $\text{SuExp}_{\eta,3}$; при этом значение в нуле указывается в виде дополнительного индекса.

Для вещественного аргумента, графики функций F_1 и F_3 показаны на рисунке 11.4. Комплексные карты этих суперфункций показаны на рисунке 11.5. Эти функции весьма различны. Чтобы освободить обозначения F с индексами для других функций, рассматриваемых в других главах, пришлось дать им специальные имена, $\text{tet}_{\eta} = F_1$, и $\text{SuExp}_{\eta,3} = F_3$.

Вдоль вещественной оси, функция $\text{SuExp}_{\eta,3}$ неограниченно возрастает при положительных значениях аргумента, и стремится к предельному значению e при больших отрицательных значениях аргумента. К этому же значению функция стремится и в остальной части комплексной плоскости, за исключением полосы вдоль положительного направления вещественной оси.



Функция tet_η , наоборот, при больших значениях аргумента приближается к предельному значению η , но в точке -2 имеет логарифмическую особенность, при приближении к ней вдоль вещественной оси, функция уходит на минус бесконечность. Это свойство типично для класса функций, которые я называю термином тетрация; это суперфункции от экспоненты по некоторому фиксированному основанию (в данном случае - по основанию Генрика), удовлетворяющие определенным дополнительным условиям: в нуле эта функция равна единице и остается ограниченной по крайней мере в полосе шириной 2 вдоль мнимой оси. Более подробно, тетрации рассмотрены ниже, в последующих главах. Я упоминаю их здесь, лишь чтобы обосновать обозначение tet_η .

С помощью суперфункций от экспоненты по основанию Генрика η , можно выразить итерации этой экспоненты. Но для этого нужны ещё абельфункции. Эти абельфункции рассмотрены в следующей секции.

2 Абельэкспонента по основанию Генрика

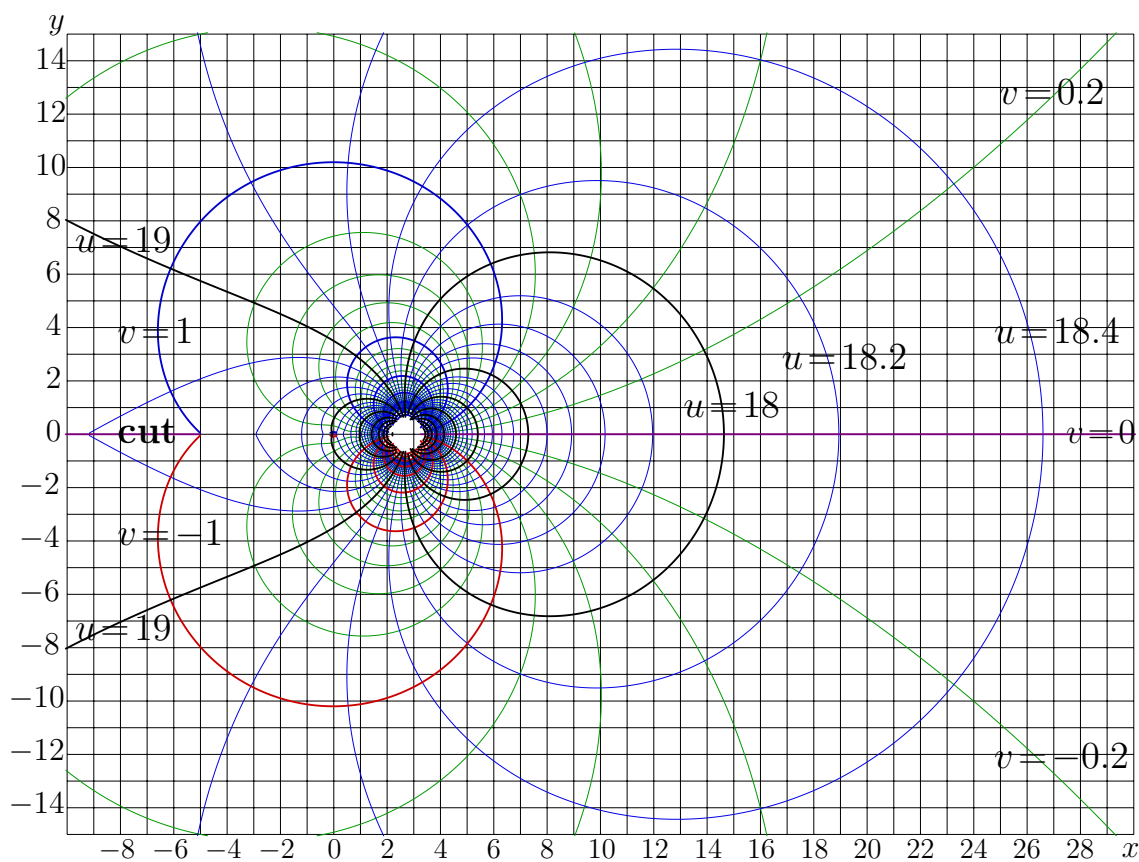
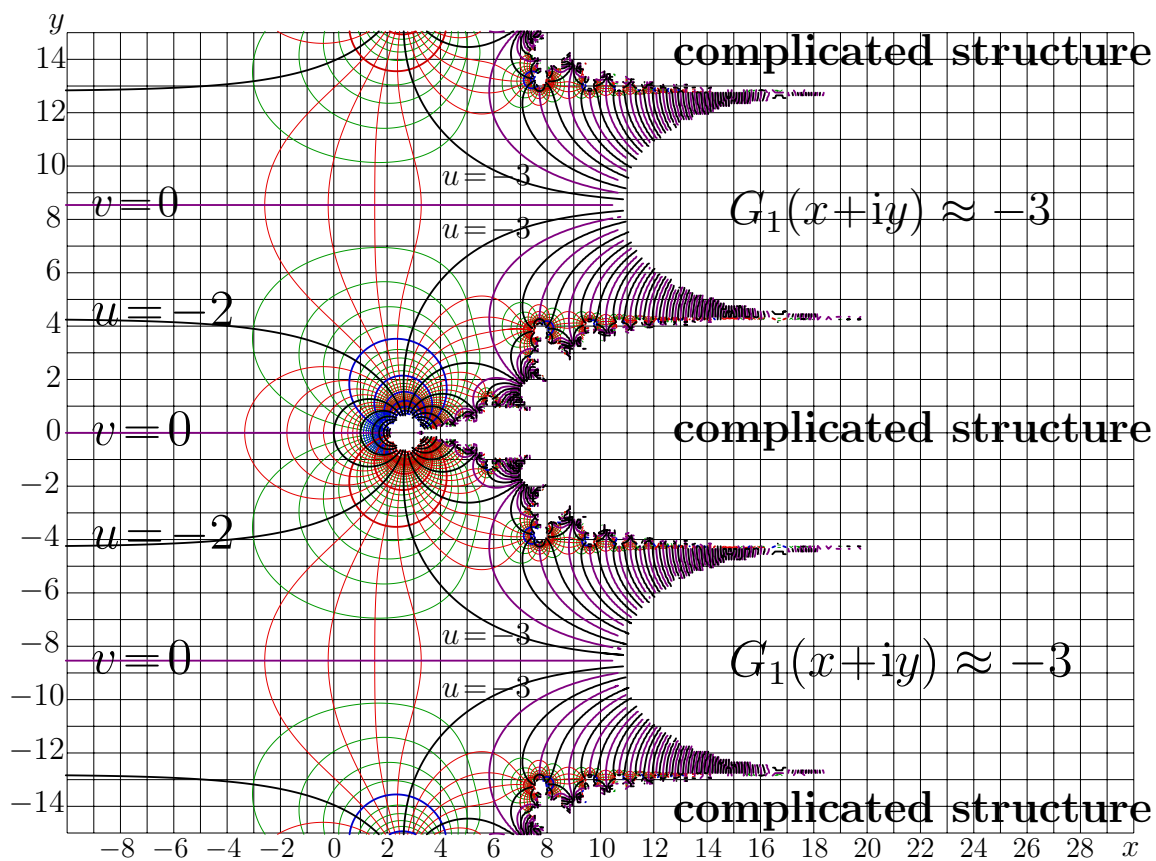
Исторически, экспонента по основанию Генрика η была первой передаточной функцией, для которой построены итерации, которые я назвал “экзотическими”. Экзотика в том, что регулярная итерация, голоморфная в окрестности стационарной точки, для таких функций невозможна [69]. Однако итерации, голоморфные в широкой области значений аргумента, существуют. Для построения таких итераций, кроме суперфункции, требуется также функция Абеля. Эта функция рассмотрена ниже.

Пусть $G_1 = F_1^{-1}$ and $G_3 = F_3^{-1}$. Комплексные карты этих функций показаны на рисунке 11.6. Для вычисления функций G_1 и G_3 , использованы асимптотические представления

$$g_{\pm}(z) = \alpha(g) \approx \frac{\ln(\pm t)}{3} + \frac{2}{t} + \sum_{n=1}^{15} c_n t^n + O(t^{16}) \quad (11.26)$$

где $g = (z - e)/e$. Коэффициенты c можно найти, обращая разложение (11.16) для суперфункции. Эти же коэффициенты получаются при подстановке разложения (11.26) в уравнение Абеля

$$g(z) + 1 = g\left(\exp(z/e)\right) \quad (11.27)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:E1eAuMap600.jpg>

Рис. 11.6: $u+iv = G_1(x+iy) = \text{ate}_\eta(x+iy)$ по формуле (11.28), сверху,
и $u+iv = G_3(x+iy) = \text{AuExp}_{\eta,3}(x+iy)$ по формуле (11.29), снизу

Обрывание асимптотической серии, то есть выкидывание символа O из правой части уравнения (11.26), дает алгоритм для вычисления абельфункции g примерно с 15 значащими цифрами, пока $|t| < 1/2$. Для иных значений аргумента, для вычисления функции g следует использовать уравнение (11.27). Я хочу рассматривать такое заявление как определение, и надеюсь, что Читатель сам может написать соответствующий предел как представление точной абельфункции. Абельфункции $G_1 = F_1^{-1}$ и $G_3 = F_3^{-1}$ можно определить, добавляя к значениям функций g соответствующие константы,

$$\text{ate}_\eta(z) = G_1(z) = g(z) - g(1) \approx g(z) - 3.029297214418 \quad (11.28)$$

где использован верхний знак в формуле (11.26), и

$$\text{AuExp}_{\eta,3} = G_3(z) = g(z) - g(3) \approx g(z) + 20.0563555297533789 \quad (11.29)$$

где использован нижний знак в формуле (11.26).

Дополнительные более длинные имена AuExp и ate вводятся здесь для того, чтобы упростить ссылки на эти функции из других глав и, возможно, из других публикаций. Мнемоника этих имен проста. AuExp указывает, что речь идет о функции Абеля; следующая буква указывает, что суперфункция голоморфна по крайней мере для значений аргумента над, сверху (“up”) от стационарной точки. Имя ate указывает, что речь идет об арктетрации. Эти более длинные имена позволяют избежать путаницы при использовании букв F и G для обозначения других функций в других главах.

Представления (11.28) и (11.29) автоматически обеспечивают выполнения соотношений $G_1(1) = 0$ and $G_3(3) = 0$, как это и должно быть для обратных функций от F_1 и F_3 . Численная проверка подтверждает, что в широких областях значений z , соотношения

$$F_1(G_1(z)) = z, \quad F_3(G_3(z)) = z, \quad F_1(G_1(z)) = z, \quad G_3(F_3(z)) = z \quad (11.30)$$

воспроизводятся с четырнадцатью значащими цифрами. Читатели приглашаются построить функции согласия

$$A(z) = -\lg \left(\frac{|F(G(z)) - z|}{|F(G(z))| + |z|} \right) \quad (11.31)$$

добавляя в этой формуле подходящие индексы 1 или 3 к функциям F и G и заменяя $F \leftrightarrow G$. Такое построение дает численную

проверку соотношений (11.30). Уровни $A(x + iy)$ в плоскости x, y подтверждают, что алгоритмы работают вблизи максимальной точности, достижимой с переменными complex double.

Абельфункция $AuExp_{\eta,3} = G_3$, вместе с суперфункцией $SuExp_{\eta,3} = F_3$ из предыдущей секции, позволяет определить неограниченно возрастающие итерации экспоненты по основанию Генрика $\eta = \exp(1/e)$. Эти итерации рассмотрены в следующей секции.

3 Итерации

С функциями $F_3 = SuExp_{\eta,3}$ и $G_3 = AuExp_{\eta,3}$, можно выразить растущие итерации экспоненты по основанию $\eta = \exp(1/e)$. В этой главе рассмотрены лишь неограниченно растущие (вдоль вещественной оси) итерации; такие итерации похожи на растущие итерации других функций, рассмотренные в предыдущих главах.

Для $T(z) = \exp(z/e) = \exp_{\eta}(z)$,

$$T^n(z) = \exp_{\eta,u}^n(z) = F_3(n + G_3(z)) = SuExp_{\eta,3}\left(n + AuExp_{\eta,3}(z)\right) \quad (11.32)$$

Индекс u у итераций экспоненты указывает, что для итераций использована растущая суперфункция (та, которая, для вещественных значений аргумента, на бесконечности идет вверх, “up”).

В представлении (11.32), ни номер итерации n , ни аргумент z не имеют надобности быть целыми, ни даже вещественными. Но, разумеется, они могут и быть таковыми.

На рисунке 11.7 показаны итерации $T^n(x)$ по формуле (11.32) как функции вещественного аргумента x , для нескольких вещественных значений номера итерации n . Толстые кривы соответствуют целым значениям n . Нецелые итерации голоморфны по крайней мере в некоторой окрестности луча $x > e$. При целых неотрицательных значениях n , итерации голоморфны для любых значений аргумента. Диагональ Первого квадранта координатной плоскости соответствует нулевой итерации и идентичной функции.

Нецелые итерации показаны тонкими линиями. Такие нецелые итерации определены для случая комплексного аргумента, либо для положительного аргумента, большего e , но они не определены для вещественного аргумента, меньшего e . Поэтому тонкие кривые на

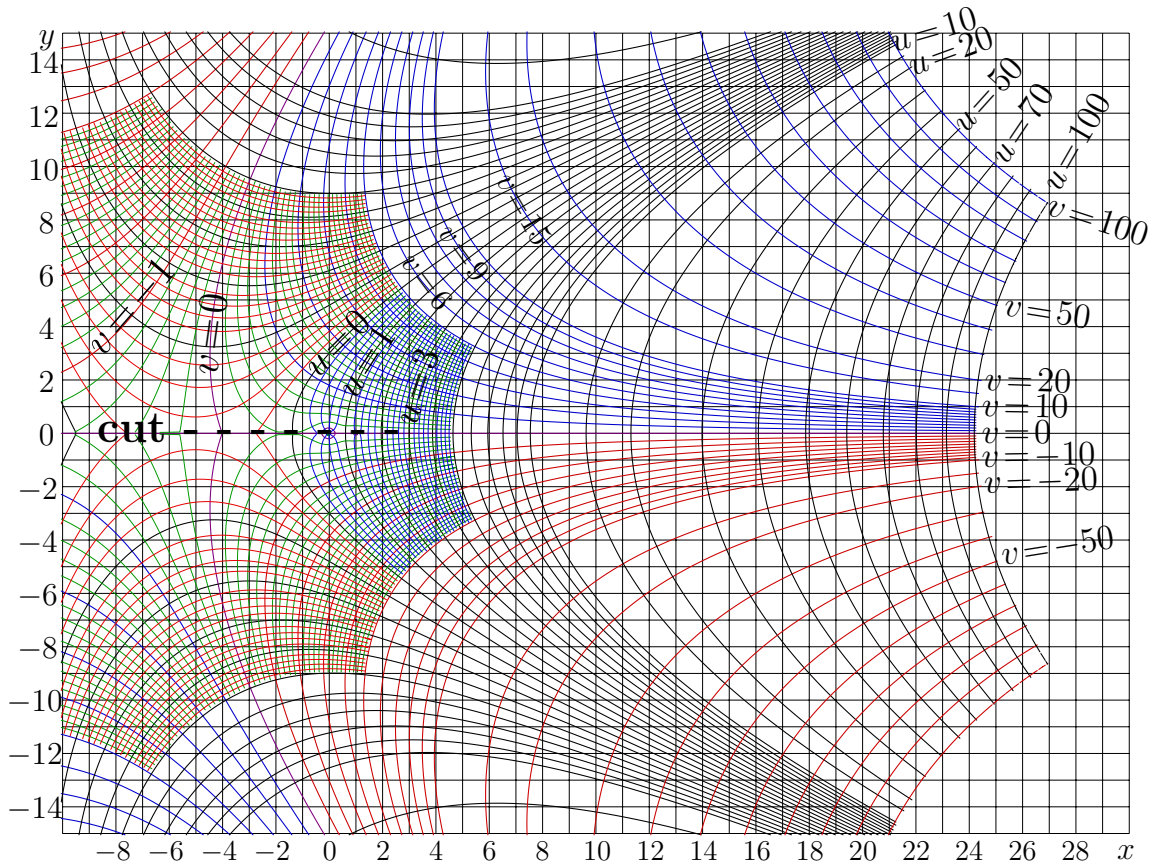


Рис. 11.8: $u+iv = \exp_{\eta,u}^{1/2}(x+iy)$ по формуле (11.32) для $n=1/2$

начало координат в середине изображения. Однако, когда места на странице не хватает, приходится жертвовать такой наглядностью, и строить лишь верхнюю половину карты. Я надеюсь, что у Читателя достаточно воображения для того, чтобы мысленно приставить к экрану зеркало и столь же мысленно увидеть в нем нижнюю часть комплексной карты. С расчетом на это, на рисунке 11.9 показаны итерации экспоненты по основанию η и для других n . В частности, карта, соответствующая $n=0.5$, соответствует зумину из центральной части рисунка 11.8.

Рисунок 11.9 показывает, как непрерывно и постепенно, при увеличении номера итерации от минус единицы до единицы, комплексная карта итерации изменяется от карты логарифма по основанию η (верхняя правая карта) к карте тождественной функции (которая есть однородная прямоугольная сетка и поэтому не нарисована внизу) и затем к карте экспоненты по основанию η (верхняя левая карта).

Аналогичные карты можно построить и для других передаточных функций. Одна из них рассмотрена в следующей главе.

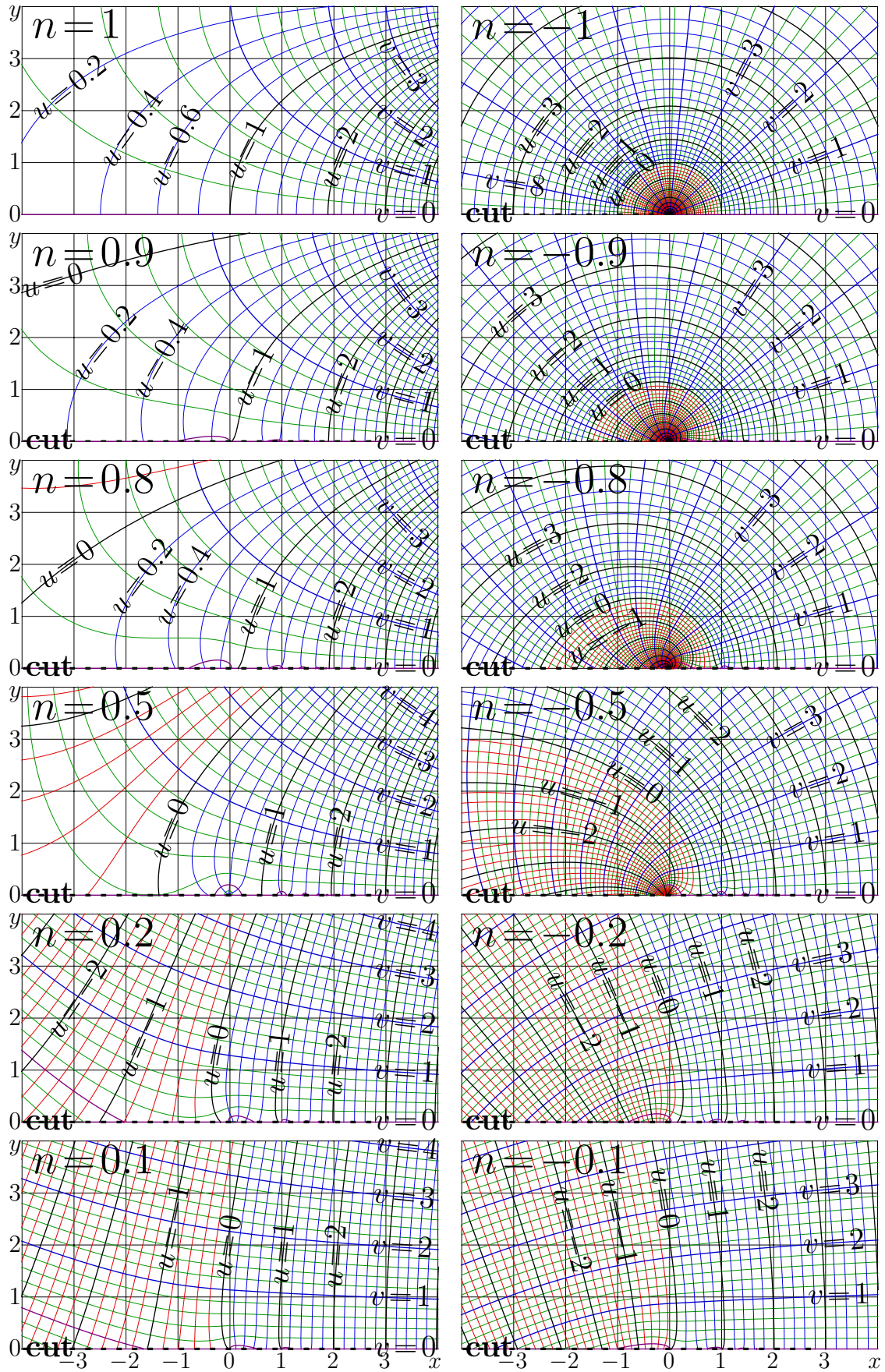
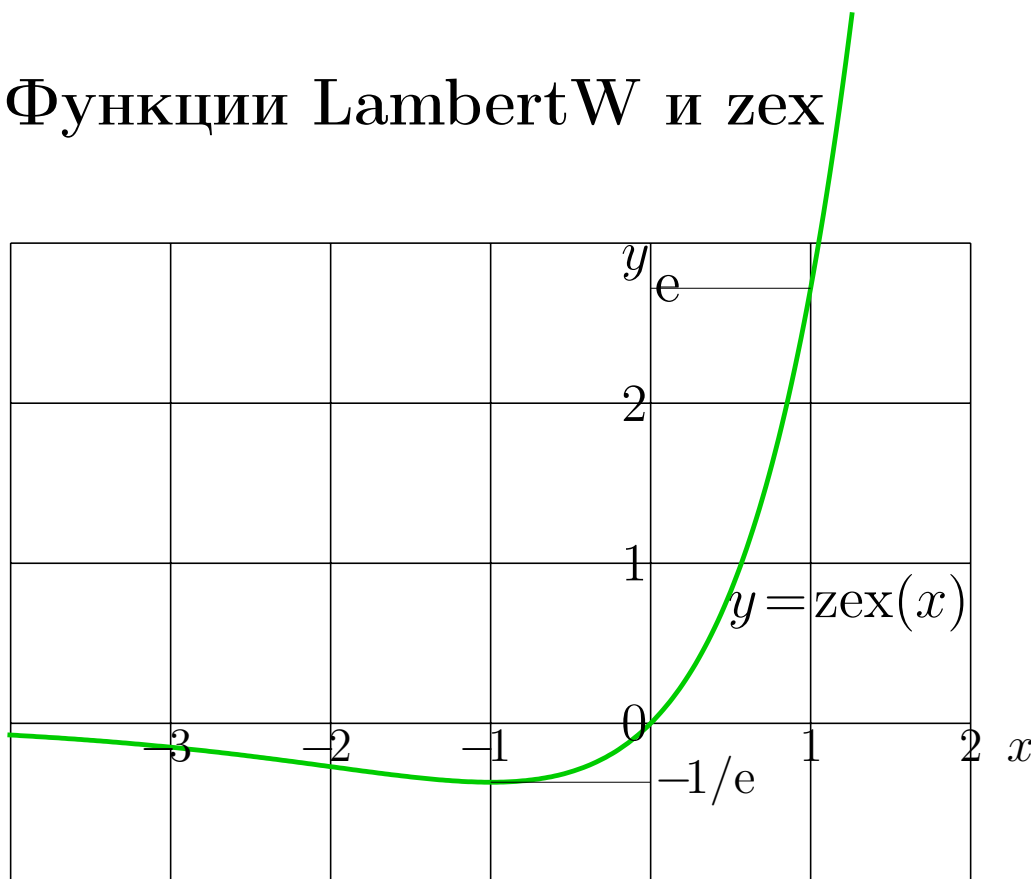


Рис. 11.9: Комплексные карты итераций экспоненты по основанию Генрика: $u+iv = \exp_{n,u}^n(x+iy)$ по формуле (11.32) для различных n

Глава 12

Функции LambertW и zex



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:ZexPlot.png>

Рис. 12.1: $y = zex(x) = x \exp(x)$

В этой главе рассматривается функция ArcLambertW ,

$$\text{ArcLambertW}(z) = \text{ArcProductLog}(z) = zex(z) = z \exp(z) \quad (12.1)$$

Длинное имя ArcLambertW эквивалентно ещё более длинному обозначению ArcProductLog . Такие имена напоминают “*монохид ди-гедрогена*” (см. рис. 6.3). То есть формально, вроде, правильно, обратная функция по отношению к функции ProductLog вполне может называться ArcProductLog , но использовать такое обозначение в формулах неудобно. Поэтому я использую обозначение zex . Для вещественного аргумента, график функции zex по формуле (12.1) представлен на рисунке 12.1.

Короткое имя zex образовано из первых трех букв последнего выра-

жения в формуле (12.1). Эта функция используется для иллюстрации общей идеи построения “экзотических” итераций передаточной функции, у которой производная в стационарной точке равна единице. То есть как бы для закрепления материала.

Название этой Главы указывает, что речь идет о функции LambertW. Однако мне удобнее работать с функцией zex , которая проще; хотя бы потому, что у неё нет особых точек. В моё оправдание замечу, что построение итераций функции zex эквивалентно построению итераций функции LambertW. И даже эквивалентно построению итераций функции ProductLog, которая то же, что и LambertW. Потому как $\text{zex}^{-n} = \text{LambertW}^n$, и номер итерации n может принимать не только что отрицательные, а ажно комплексные значения. Так что если кто умеет итерировать функцию zex , то он/она умеет итерировать и функцию LambertW. И наоборот.

Название главы должно быть видным и гуглебельным. Название LambertW известно широко, а в названии zex поисковики пытаются исправлять первую букву, чтобы предложить миллионы коммерческих ссылок. Содержание таких ссылок выходит за пределы темы этой Книги, поэтому в названии главы упоминается не zex , а LambertW.

Я надеюсь, что Читатель не смутится названием, и сам сможет провести все расчеты этой главы, по аналогии с тем, как в предыдущей секции это сделано для экспоненты по основанию Генрика ($\eta = e^{1/e}$). Однако я помню старое правило, что если на докладе за первой партой сидят Софья Ковалевская и Леонард Эйлер, а на последней парте — Надя Кискина и Вася Пупкин, то обращаться надо к Наде и Вase; тогда, может быть, Софья и Леонард поймут хотя бы основную идею доклада и зададут “самые мучительные социальные вопросы” [15].

Адаптируя такое правило к этой Книге, в этой главе я описываю, как для функции zex строятся суперфункция, абельфункция и нецелые итерации. Потому как повторение, хоть и не мать остроумия, но всё ещё мать учения. Я рекомендую Читателям делать выкладки самостоятельно, и лишь иногда подглядывать в книгу, чтобы выудить хинт (подсказку) или подтвердить правильность формулы.

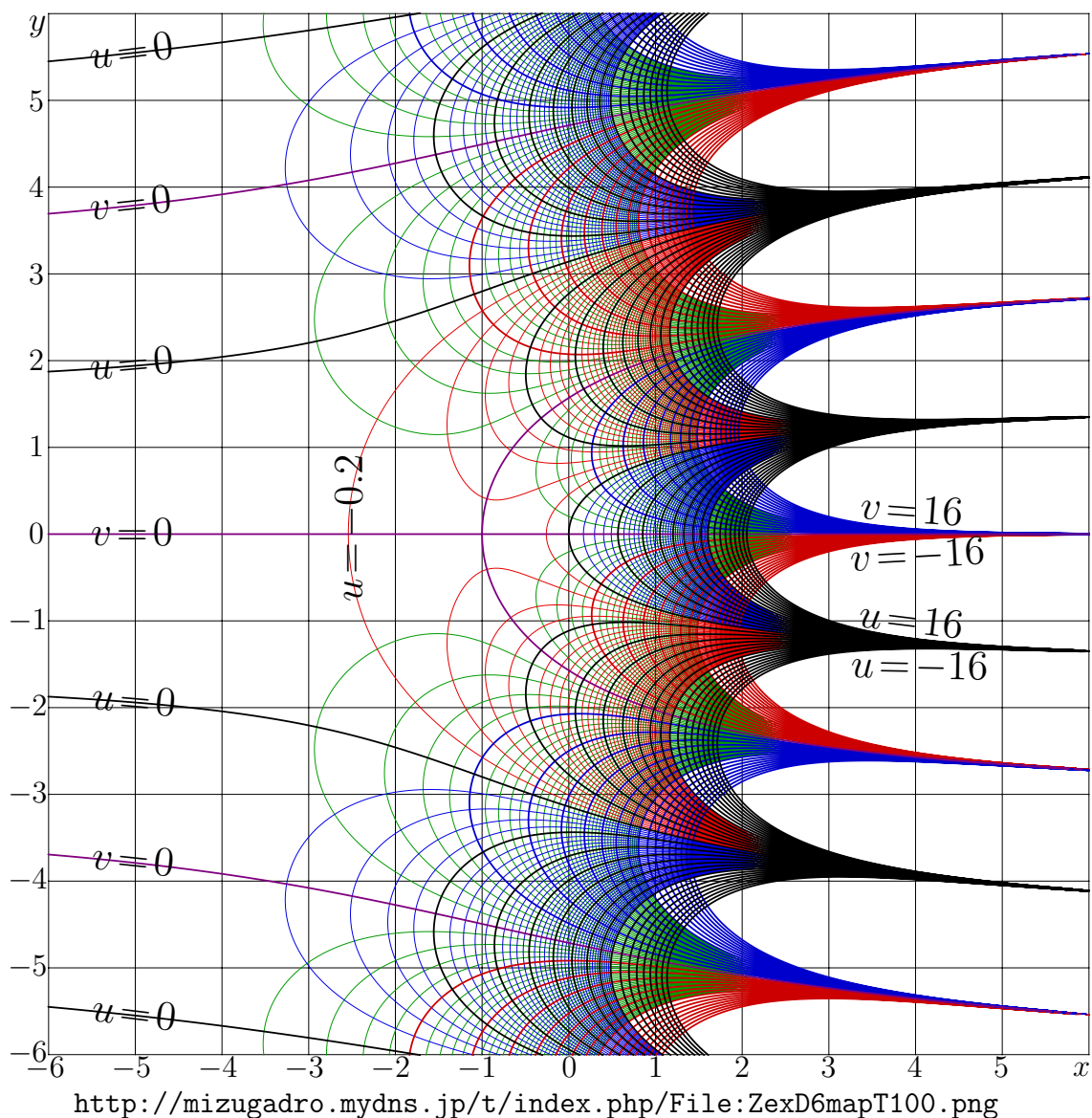
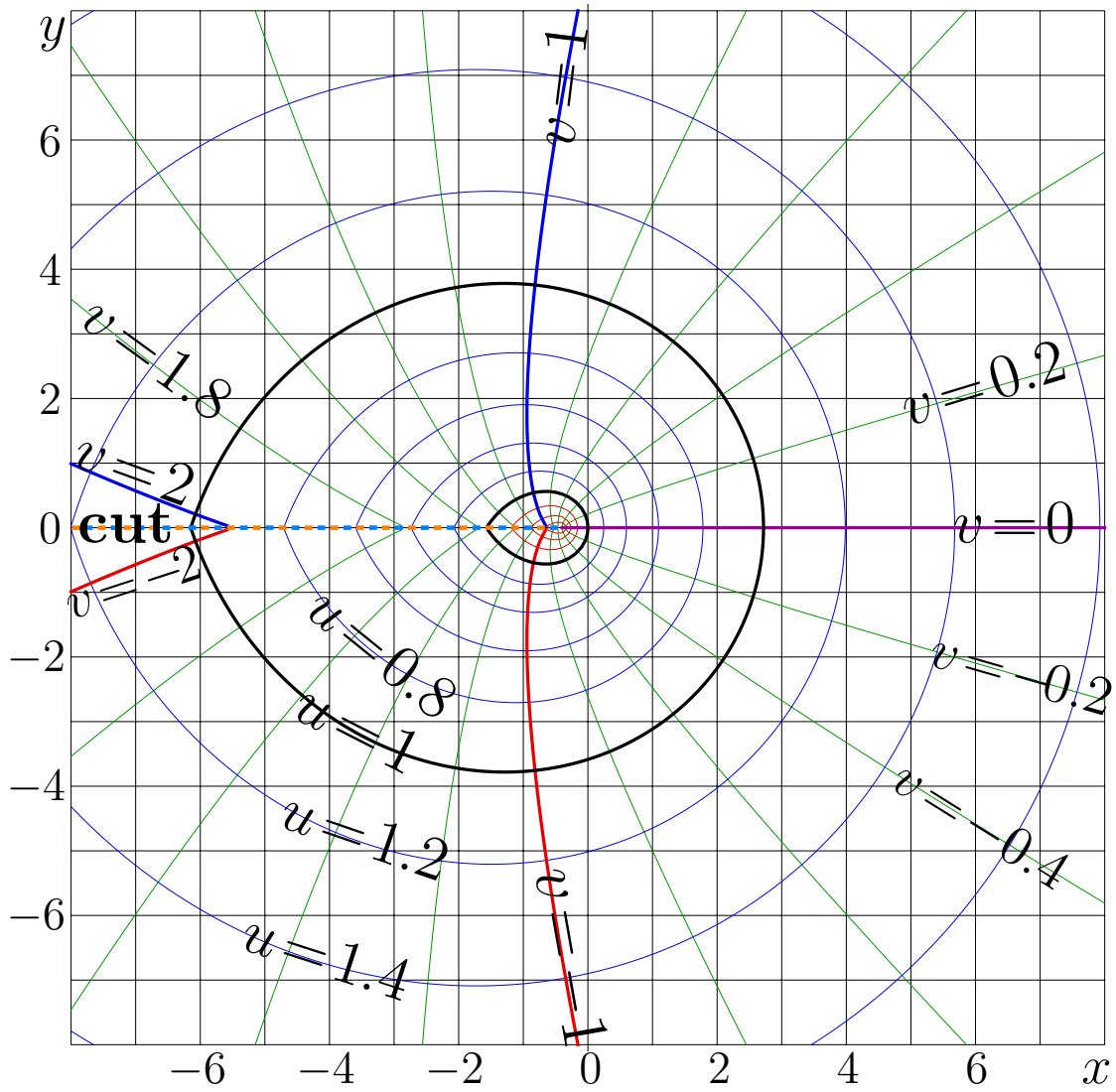


Рис. 12.2: $u+iv = \text{zex}(x+iy)$ by (12.1)

1 Голоморфный zex

График функции zex по формуле (12.1) показан на рисунке 12.1. При больших отрицательных значениях аргумента zex стремится к нулю, и убывает от нуля на минус бесконечности до значения $-1/e$ в точке -1 , затем растет. График проходит через точку $(0, 0)$, и в нуле производная функции zex равна единице. Именно поэтому итерации зекса квалифицируются как экзотические. При больших значениях аргумента zex продолжает быстро расти до бесконечности.

Комплексная карта функции zex представлена на рисунке 12.2. Эта функция является целой. То есть голоморфна где ни попади.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:LambertWmap150.png>

Рис. 12.3: $u+iv = \text{ArcZex}(x+iy) = \text{LambertW}(x+iy)$

Карта обратной функции, то есть

$$z \text{ex}^{-1} = \text{ArcZex} = z \text{ex}^{-1} = \text{LambertW} \quad (12.2)$$

показана на рисунке 12.3. Эта функция имеет разрез, обозначенный символом **cut**.

Функцию LambertW можно определить как решение F дифференциального уравнения

$$F'(z) = \frac{F(z)}{(1 + F(z))z} \quad (12.3)$$

с дополнительным условием $F(0) = 0$, где контур интегрирования идет от нуля вдоль мнимой оси до мнимой части аргумента, а потом, параллельно вещественной оси, до значения аргумента. Решая

уравнение (12.3), Читатель может проследить, что обратная функция от решения есть $z \exp(z)$.

Функцию LambertW можно выразить через функцию Тани, определенную формулой (5.3):

$$\text{LambertW}(z) = \text{Tania}\left(\ln(z) - 1\right) \quad (12.4)$$

Мнимая часть значений логарифма всегда находится в интервале от $-\pi$ до π . Поэтому в выражении (12.4), разрезы функции Тани (см. рисунок 5.3) не добавляют разрезов к области голоморфизма функции LambertW . Эта функция имеет только один разрез, от логарифма в аргументе Тани в правой части уравнения (12.4). Этот разрез идет от точки ветвления $-1/e$ до минус бесконечности.

Мне не попалось хорошей имплементации `complex double` для функции LambertW на языке C++, на котором у меня написаны хорошие графопостроители. Поэтому мне пришлось делать такую имплементацию самому. Для этой имплементации использованы вполне очевидные разложения. Эти разложения перечислены ниже.

Для малых значений аргумента, есть разложение в нуле:

$$\begin{aligned} \text{LambertW}(z) &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} (-z)^n \\ &= z - z^2 + \frac{3z^3}{2} - \frac{8z^4}{3} + \frac{125z^5}{24} - \frac{54z^6}{5} + \frac{16807z^7}{720} + \dots \end{aligned} \quad (12.5)$$

Ряд сходится при $|z| < 1/e \approx 0.367879$. При учете 48 слагаемых, для $|z| \leq 0.2$, такая сумма дает для $\text{LambertW}(z)$ по крайней мере 16 корректных значащих цифр.

Разложение вблизи точки ветвления можно записать так:

$$\begin{aligned} \text{LambertW}\left(\frac{-1}{e} + \frac{t^2}{2e}\right) &= -1 + t - \frac{t^2}{3} + \frac{11t^3}{72} - \frac{43t^4}{540} + \frac{769t^5}{17280} - \frac{221t^6}{8505} \\ &+ \frac{680863t^7}{43545600} - \frac{1963t^8}{204120} + \frac{226287557t^9}{37623398400} - \frac{5776369t^{10}}{1515591000} + \dots \end{aligned} \quad (12.6)$$

Такое разложение можно использовать для аппроксимации функции LambertW при $|t| < 1$, то есть когда аргумент функции LambertW близок к значению $-\exp(-1) \approx -0.367879$.

Для больших значений $|z|$, обозначу $L = \ln(z)$ и $M = \ln(L) = \ln^2(z)$; тогда разложение для $\text{LambertW}(z)$ можно записать так:

$$\begin{aligned}
\text{LambertW}(z) = & L - M + \frac{M}{L} + \frac{M(-2 + M)}{2L^2} \\
& + \frac{M(6 - 9M + 2M^2)}{6L^3} \\
& + \frac{M(-12 + 36M - 22M^2 + 3M^3)}{12L^4} \\
& + \frac{M(60 - 300M + 350M^2 - 125M^3 + 12M^4)}{60L^5} \\
& + \frac{M(-120 + 900M - 1700M^2 + 1125M^3 - 274M^4 + 20M^5)}{120L^6} \\
& + O\left(\frac{M}{L}\right)^7 \quad (12.7)
\end{aligned}$$

При этом малым параметром разложения является $\varepsilon = \ln^2(z)/\ln(z)$; при $|\varepsilon| \ll 1$, разложение (12.7) дает аккуратную аппроксимацию функции LambertW.

Как обычно, верхний индекс после имени функции указывает номер итерации, вычисление второй (то есть целой) итерации логарифма не вызывает сложностей, а верхний индекс после того, как указан аргумент и закрыта скобка, указывает степень, в которую следует возвести результат вычисления функции. Таким образом, выражение $\ln^{-1}(z) = \exp(z)$ не следует путать с выражением $1/\ln(z)$, а выражение $\ln^2(z) = \ln(\ln(z))$ не должно конфузироваться с выражением $\ln(z)^2$. Это соответствует общей системе обозначений, принятых в этой Книге.

Предлагаемые выше разложения позволяют написать эффективный (быстрый и аккуратный) алгоритм для вычисления обратной функции для zex , то есть функции LambertW. Его имплементация на языке C++ загружена по урлу

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/LambertW.cin>.

Функция $\text{LambertW} = \text{zex}^{-1}$ требуется для вычисления итераций функции zex через её суперфункцию и абельфункцию. Суперфункция для передаточной функции zex рассмотрена в следующей секции.

2 SuZex

Суперфункцией для передаточной функции zex по формуле (12.1) является решение F передаточного уравнения

$$F(z+1) = zex\left(F(z)\right) \quad (12.8)$$

Для некоторого целого числа $M > 1$, ищущее решение F в таком виде:

$$F(z) = F_M(z) + O\left(\frac{\ln(\pm z)^{M+1}}{z^{M+2}}\right) \quad (12.9)$$

где

$$F_M(z) = -\frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{2} \ln(\pm z)}{z^2} + \frac{1}{z} \sum_{m=2}^M \frac{P_m(\ln(\pm z))}{z^m} \quad (12.10)$$

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^m c_{m,n} (-z)^n \quad (12.11)$$

Коэффициенты c в формуле (12.11) можно найти подстановкой разложения (12.9) в передаточное уравнение (12.8). Для этого может использоваться следующая программа на языке Математика:

```

zex[z_] = z Exp[z];
Foo[z_] = -1/z + a Log[z]/z^2
Soo = Series[Foo[z+1]-zex[Foo[z]], {z,Infinity,3}]
Eoo = Coefficient[Soo,1/z^3]
Ao = Extract[Solve[Eoo==0, a], 1]
F2o[z_] = ReplaceAll[Foo[z], Ao]
F20[z_] = F2o[z] + (a Log[z]^2 + b Log[z] + c)/z^3
S2o = Series[F20[z+1] - zex[F20[z]], {z,Infinity,4}]
S20 = ReplaceAll[S2o, Log[1/z] -> -L]
E2o = Coefficient[S20, 1/z^4]
E22 = Coefficient[E2o, L^2]
A1 = Extract[Extract[Solve[E22==0, a], 1], 1]
E2A = ReplaceAll[E2o, A1]
E21 = Coefficient[E2A, L]
B1 = Extract[Extract[Solve[E21==0, b], 1], 1]

```

```

E2B = ReplaceAll[E2A, B1]
C1 = Extract[Extract[Solve[E2B==0, c], 1], 1]
F3o[z_] = ReplaceAll[F20[z], {A1, B1, C1}]
F30[z_] = F3o[z] + (a Log[z]^3 + b Log[z]^2 + c Log[z] + d)/z^4
S3o = Series[F30[z+1] - zex[F30[z]], {z, Infinity, 5}]
S30 = ReplaceAll[S3o, Log[1/z] -> -L]
E3o = Coefficient[S30, 1/z^5]
E33 = Coefficient[E3o, L^3]
A3 = Extract[Extract[Solve[E33==0, a], 1], 1]
E3a = ReplaceAll[E3o, A3]
E32 = Coefficient[E3a, L^2]
B3 = Extract[Extract[Solve[E32==0, b], 1], 1]
E3b = ReplaceAll[E3a, B3]
E31 = Coefficient[E3b, L]
C3 = Extract[Extract[Solve[E31==0, c], 1], 1]
E3c = ReplaceAll[E3b, C3]
D3 = Extract[Extract[Solve[E3c == 0, d], 1], 1]
F4o[z_] = ReplaceAll[F30[z], {A3, B3, C3, D3}]
F40[z_] = F4o[z] +
    (a Log[z]^4 + b Log[z]^3 + c Log[z]^2 + d Log[z] + e)/z^5
S4o = Series[F40[z+1] - zex[F40[z]], {z, Infinity, 6}]

```

Такой расчет дает следующую асимптотику:

$$\begin{aligned}
 F(z) = & -\frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{2}\ell}{z^2} + \frac{\frac{-1}{4}\ell^2 + \frac{1}{4}\ell - \frac{1}{6}}{z^3} + \frac{\frac{1}{8}\ell^3 + \frac{-5}{16}\ell^2 + \frac{3}{8}\ell + \frac{-7}{48}}{z^4} \\
 & + \frac{\frac{-1}{16}\ell^4 + \frac{13}{48}\ell^3 + \frac{-17}{32}\ell^2 + \frac{23}{48}\ell + \frac{-707}{4320}}{z^5} \\
 & + \frac{\frac{1}{32}\ell^5 + \frac{-77}{384}\ell^4 + \frac{37}{64}\ell^3 + \frac{-83}{96}\ell^2 + \frac{1121}{1728}\ell + \frac{-1637}{8640}}{z^6} \\
 & + \frac{\frac{-1}{64}\ell^6 + \frac{87}{640}\ell^5 + \frac{-205}{384}\ell^4 + \frac{443}{384}\ell^3 + \frac{-1619}{1152}\ell^2 + \frac{15427}{17280}\ell + \frac{-274133}{1209600}}{z^6} \\
 & + O\left(\frac{\ell^7}{z^8}\right)
 \end{aligned} \tag{12.12}$$

где $\ell = \ln(-z)$.

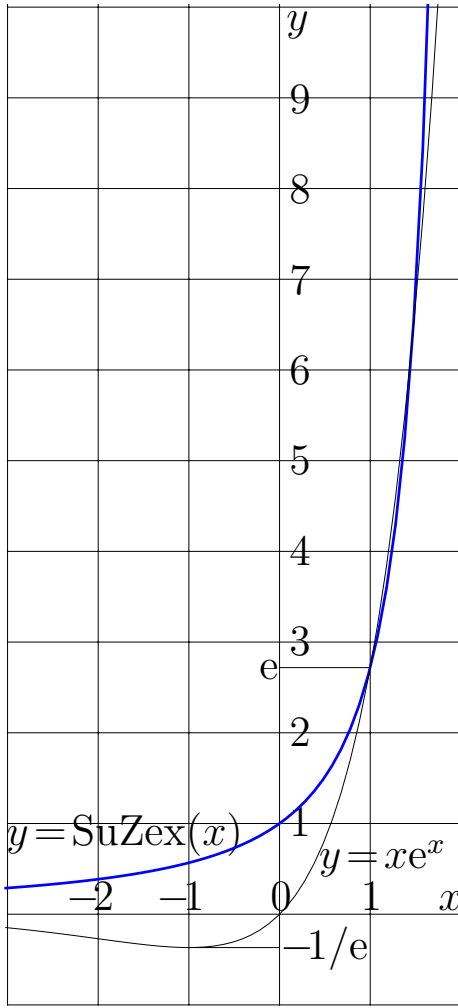


Рис. 12.4: $y = \text{SuZex}(x)$
по формуле (12.14)

Для некоторого фиксированного числа M , суперфункцию F можно выразить через её M -ную асимптотику в таком виде:

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} z e^{x^n} (F_M(z - n)) \quad (12.13)$$

Поскольку F_M является асимптотическим решением, получающаяся суперфункция F не зависит от числа M термов, принимаемых во внимание в первичном приближении. Разумеется, с увеличением числа M скорость сходимости увеличивается.

Чтобы упростить сравнения различных суперфункций, удобно определить “сдвинутую” функцию

$$\text{SuZex}(z) = F(z_1 + z) \quad (12.14)$$

где $z_1 \approx -1.1259817765745026$ есть решение уравнения $F(z_1) = 1$. Имплементация такого алгоритма на C++

загружена в <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/SuZex.cin>

График функции SuZex показан на рисунке 12.4 толстой кривой. Для сравнения, тонкая линия показывает функцию $z e^x$. Эти кривые пересекаются в точке $(1, e)$, а также вблизи точки $(1.4, 6.2)$. Для вещественных значений аргумента, SuZex есть положительная монотонно возрастающая функция. На минус бесконечности она приближается к нулю, как предписывает асимптотика (12.10). SuZex принимает значение единица в нуле, и затем быстро растёт при положительных значениях аргумента.

Комплексная карта функции SuZex показана на рисунке 12.5. Ввиду быстрого роста этой функции при положительных значениях аргумента, уровни не удалось провести в окрестности луча $x > 1$; эта полоса осталась пустой. Функция SuZex голоморфна во всей ком-

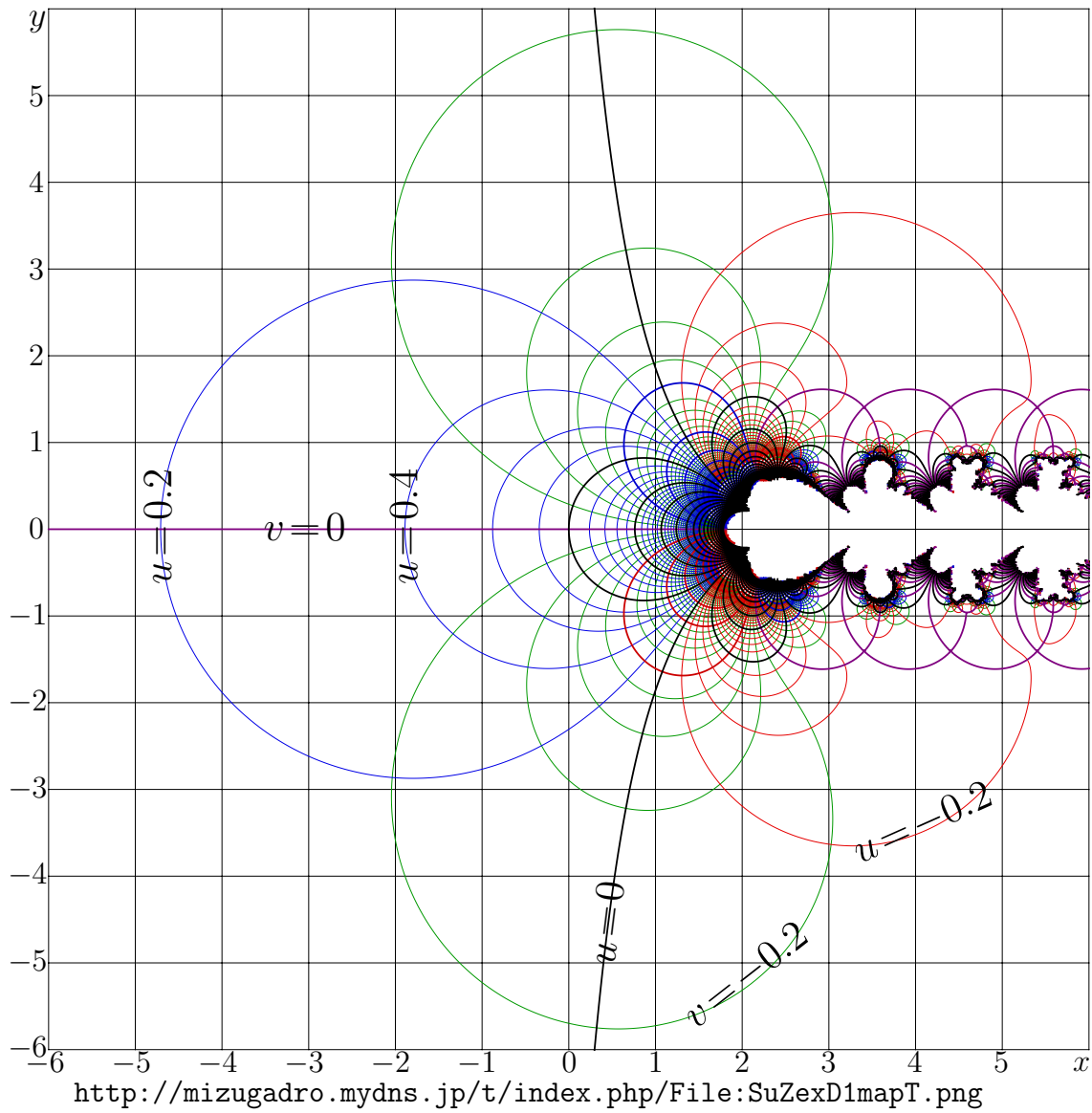


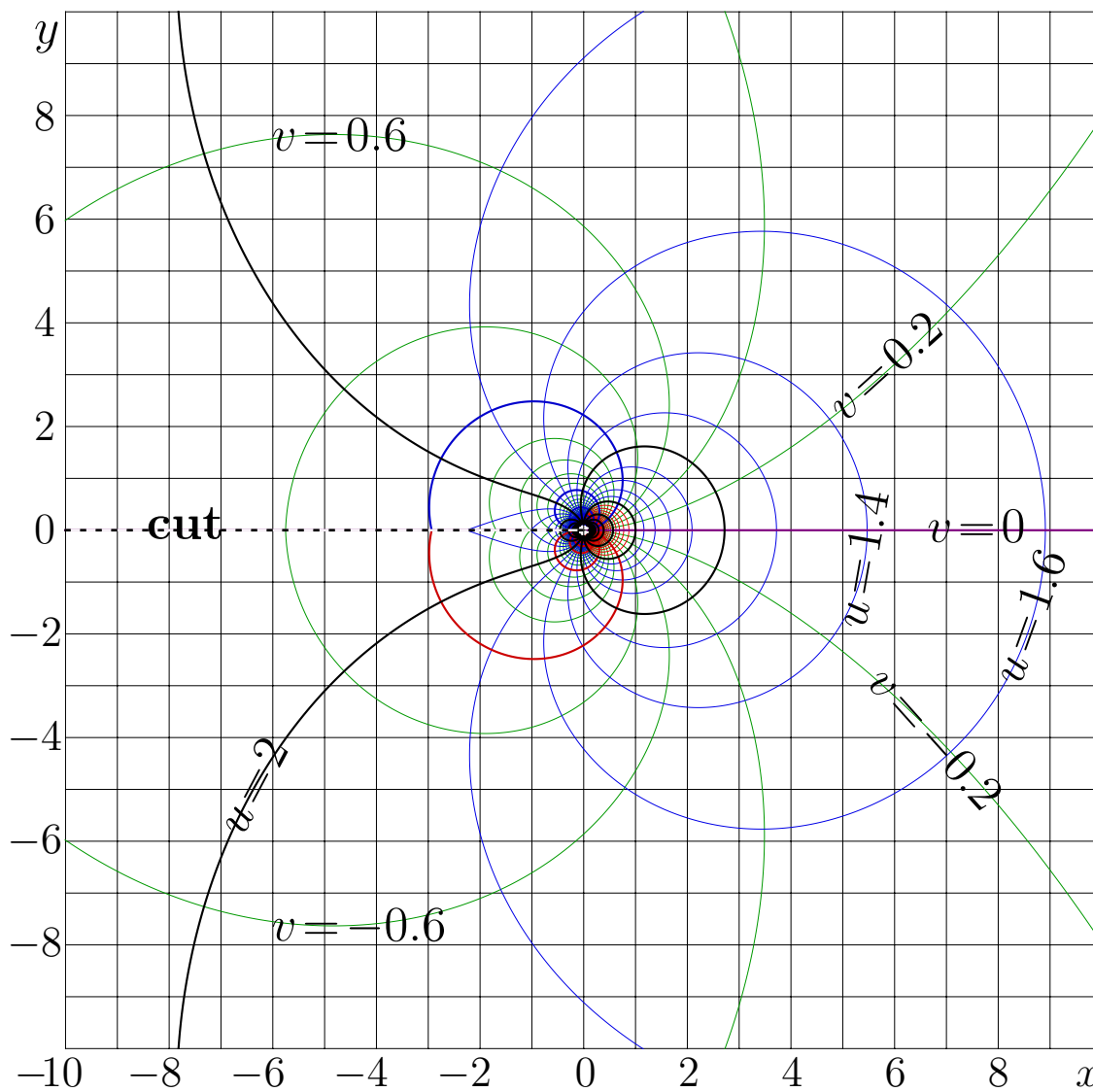
Рис. 12.5: $u+iv = \text{SuZex}(x+iy)$

плексной плоскости. То есть это целая функция. В следующей секции, для неё строится обратная функция.

3 AuZex

Комплексная карта функции $\text{AuZex} = \text{SuZex}^{-1}$, то есть абельфункции для передаточной функции $\text{zex}(z) = z \exp(z)$, показана в правой части рисунка 12.6. Эта секция описывает свойства функции AuZex .

Асимптотическое разложение функции AuZex можно получить, обращая разложение функции SuZex , рассмотренное в предыдущей секции. Однако тот же результат можно получить проще, рассмот-



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:AuZexMapT.jpg>

Рис. 12.6: $u+iv = \text{AuZex}(x+iy)$

рев уравнение Абеля

$$G(\text{zex}(z)) = G(z) + 1 \quad (12.15)$$

Асимптотика ршения $G = \text{AuZex}$ может быть записана так:

$$G(z) \approx \frac{-1}{z} + \frac{1}{2} \ln(z) + \sum_{n=0}^N b_n z^n + .. \quad (12.16)$$

Коэффициенты b_n для $n > 1$ можно найти, подставляя такое разложение в уравнение Абеля (12.15). Такая асимптотика дает accurate значения функции для малых z ; при больших значениях аргумента можно использовать уравнение Абеля, чтобы выразить значение функции через функцию от меньшего значения аргумен-

та. Для некоторого фиксированного натурального числа M , пусть

$$G_M(z) \approx \frac{-1}{z} + \frac{1}{2} \ln(z) + \sum_{m=0}^M b_m z^m \quad (12.17)$$

и пусть

$$\begin{aligned} \text{AuZex}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_M \left(\text{zex}^{-n}(z) \right) + n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_M \left(\text{LambertW}^n(z) \right) + n \end{aligned} \quad (12.18)$$

Коэффициент b_0 выбирается так, чтобы $\text{AuZex}(1) = 0$; тогда соотношение

$$\text{SuZex} \left(\text{AuZex}(z) \right) = z \quad (12.19)$$

выполняется в широкой области значений z , за исключением нуля и отрицательной части вещественной оси.

Коэффициенты b разложения (12.17) можно вычислять с помощью копиястнутой ниже программы на языке Mathematica:

```

zex[z_] = z Exp[z];
S[k_, L_] = Sum[a[k, m] L^m, {m, 0, k}];
F[K_, z_, L_] = Sum[S[k, L]/z^(k + 1), {k, 0, K}];
Series[zex[F[4,z,L]] - F[4, z+1,L+Log[1+1/z]], {z,Infinity,3}]
a[0,0] = -1;
Series[zex[F[4, z, L]] - F[4, z+1, L+Log[1+1/z]], {z,Infinity,3}]
a[1, 1] = 1/2; a[1, 0] = 0;
Simplify[Series[zex[F[5,z,L]] - F[5,z+1, L+Log[1+1/z]], {z,Infinity,4}]]

n = 2;
s[n]=Series[zex[F[n+3,z,L]]-F[n+3,z+1,L+Log[1+1/z]],{z,Infinity,n+2}];
For[k = 0, k<=n,k++,m=n-k;
a[n,m] = ReplaceAll[a[n, m],So1[Coefficient[s[n] L,L*L^m] == 0, a[n,m]]];
Print[n, Space, k, Space, m, Space, a[n, m] ] ]

n = 3;
s[n]=Series[zex[F[n+3,z,L]]-F[n+3,z+1,L+Log[1+1/z]],{z,Infinity,n+2}];
For[k = 0, k<=n,k++,m=n-k;
a[n,m] = ReplaceAll[a[n, m],So1[Coefficient[s[n] L,L*L^m] == 0, a[n,m]]];
Print[n, Space, k, Space, m, Space, a[n, m] ] ]

```

и так далее для бóльших значений n .

Первые 9 коэффициентов разложения (12.17) собраны в таблице:

n	b_n	approximation of b_n	
1	$-1/6$	$\approx -0.16666666666666666667$	
2	$1/16$	≈ 0.0625	
3	$-19/540$	$\approx -0.0351851851851851852$	
4	$1/48$	$\approx 0.02083333333333333333$	
5	$-41/4200$	$\approx -0.0097619047619047619$	(12.20)
6	$37/103680$	$\approx 0.00035686728395061728$	
7	$18349/3175200$	$\approx 0.005778848576467624$	
8	$-443/80640$	$\approx -0.005493551587301587$	
9	$55721/21555072$	$\approx -0.002585052835824441$	

Читатели приглашаются проверить, что асимптотически, а также и численно, выполняется соотношение

$$\text{SuZex}(\text{AuZex}(z)) = z \quad (12.21)$$

4 Итерации функции zex

С функциями SuZex и AuZex , описанными в предыдущих секциях, итерации функции zex выражаются так:

$$\text{zex}^n(z) = \text{SuZex}\left(n + \text{AuZex}(z)\right) \quad (12.22)$$

Как обычно, номер n итерации не имеет надобности быть целым; это число может быть даже комплексным.

Итерации $y = \text{zex}^n(x)$ как функции x для некоторых вещественных значений n показаны на рисунке 12.7. Курвы для целых значений n выделены толстыми линиями.

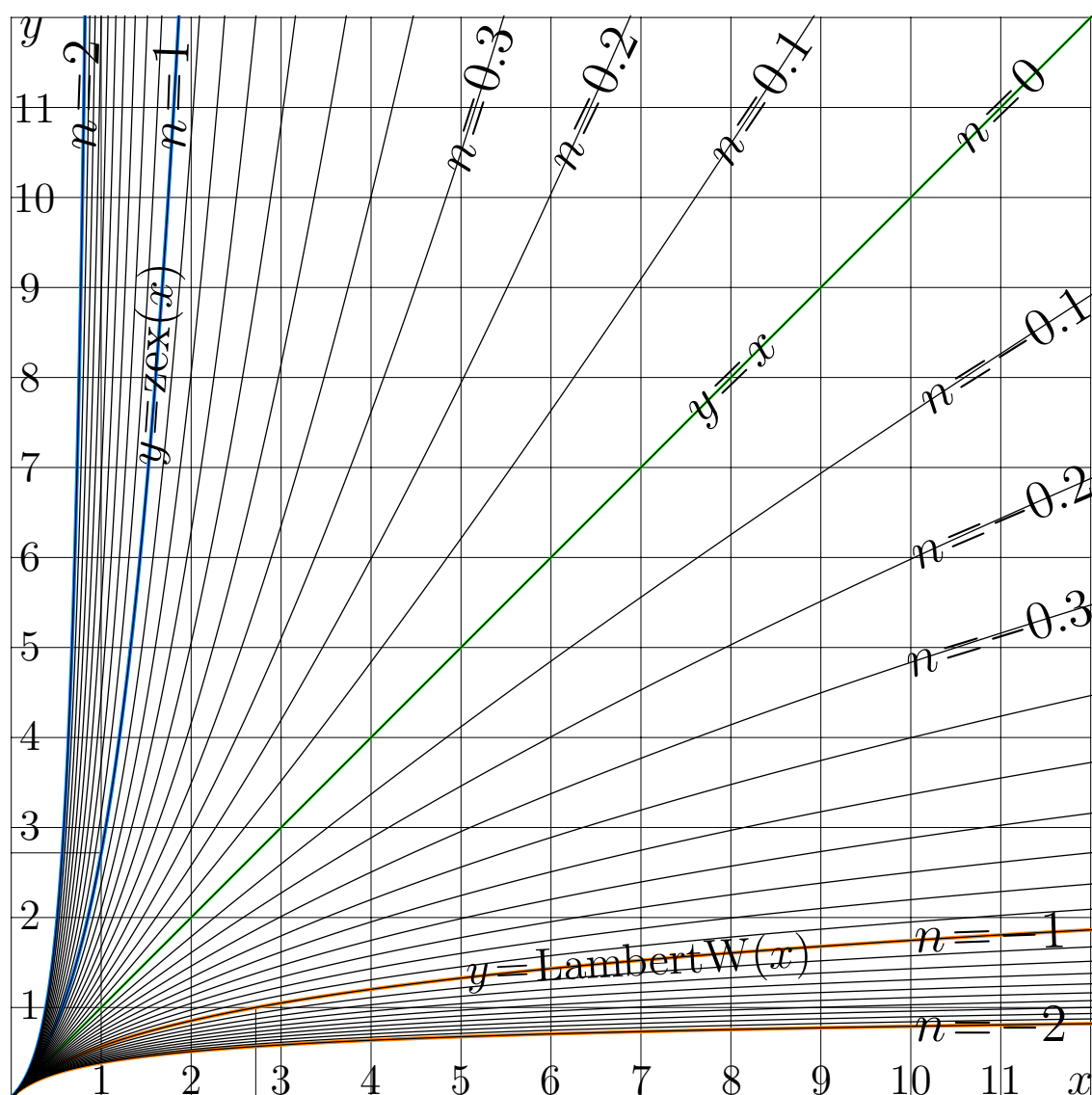
Читателям предлагается проверить соотношение

$$\text{zex}^n\left(\text{zex}^m(z)\right) = \text{zex}^{m+n}(z) \quad (12.23)$$

хотя бы для нескольких значений чисел m и n . Это можно сделать с помощью асимптотического анализа (особенно если у читателя установлена какая-нибудь Математика или Клен). Кроме того, это можно сделать численно, причем даже для комплексных значений

m , n и z , и охарактеризовать область применимости соотношения (12.23).

Итерации функции zex выглядят похоже на итерации других быстро растущих функций с вещественной стационарной точкой. Итерирование сохраняет единичную производную в этой точке, поэтому все кривые на рисунке 12.7 подходят к стационарной точке (то есть к началу координат) под углом 45 градусов к оси абсцисс. Такое свойство сохраняется и для других передаточных функций с единичной производной в стационарной точке. Ещё одна такая передаточной функции рассмотрена в следующей главе.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:ZexIteT.jpg>

Рис. 12.7: $y = zex^n(x)$ по формуле (12.22) для различных n

Глава 13

Суперсинус и итерации синуса

В этой главе рассмотрена передаточная функция $T = \sin$. Это хороший пример для иллюстрации нетривиальных итераций; потому как иногда коллега, когда ему предлагают привести пример элементарной функции, долго думает, а потом говорит: “Ну... скажем, синус.”

Итерации синуса рассматриваются давно, но лишь в 2011 году были предложены простые (хотя и грубые) аппроксимации для таких итераций [66, 67]. Затем, в 2014 году, вычисление нецелых итераций синуса доложено в журнале Far East Journal of Mathematical Science [78]. Ниже пересказываются ключевые моменты этой публикации.

Я надеюсь, что Читатель может сам построить комплексные карты синуса и арксинуса; арксинус в этой главе тоже понадобится. Я рекомендую проделать это упражнение, ибо без таких упражнений чтение превращается в пустую забаву. Полюбовавшись на карты синуса и арксинуса, можно переходить к чтению следующей секции, в которой строится суперсинус, показанный на рисунке 13.1.

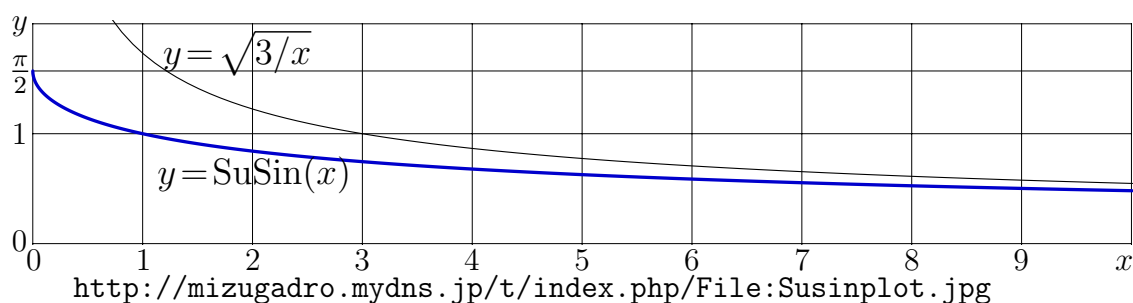


Рис. 13.1: $y = \text{SuSin}(x)$ по формуле (13.8) и асимптотика (13.3)

1 Суперсинус SuSin

Суперфункция синуса, я назвал её SuSin, показана на рисунке 13.1. Здесь я рассказываю, как строится эта функция.

Для суперфункции F от синуса, передаточное уравнение таково:

$$F(z+1) = \sin(F(z)) \quad (13.1)$$

Ниже строится решение $F = \text{SuSin}$ с такими свойствами:

$$\text{SuSin}(0) = \pi/2 \quad (13.2)$$

$$\text{SuSin}(z) = \sqrt{\frac{3}{z}} \left(1 + O\left(\frac{\ln(z)}{z}\right) \right) \quad (13.3)$$

Лидирующий терм в правой части асимптотики (13.3) можно угадать, заменяя в левой части уравнения (13.1) выражение $F(z+1)$ на $F(z) + F'(z)$. Получающееся при этом дифференциальное уравнение легко решается и дает $F(z) \approx \sqrt{3/z}$. При подстановке такого эвристического решения в исходное передаточное уравнение (13.1), получается невязка. Эта невязка позволяет угадать следующий терм разложения (13.3). Тогда Дьявол-искуситель утрет свою пасть и скажет: “Ну вот, дело сделано. Можете преспокойно повторить его и продолжать в том же духе!”..¹ В результате получается следующее асимптотическое разложение для суперфункции F :

$$F(z) = F_M(z) + O\left(\frac{\ln(z)^{M+1}}{z^{M+3/2}}\right) \quad (13.4)$$

где

$$F_M(z) = \sqrt{\frac{3}{z}} \left(1 - \frac{3}{10} \frac{\ln(z)}{z} + \sum_{m=2}^M P_m(\ln(z)) z^{-m} \right) \quad (13.5)$$

$$P_M(z) = \sum_{n=0}^m a_{m,n} (-z)^n \quad (13.6)$$

и коэффициенты a суть константы. Эти константы можно вычислить с помощью программы на языке Mathematica:

¹http://www.dolit.net/author/7649/ebook/25941/mann_tomas/izbrannik/read/3 Томас Манн. Божий избранник. Собрание сочинений. Том 6. Государственное издательство художественной литературы; Москва; 1960.

```

P[m_, L_] := Sum[a[m, n] L^n, {n, 0, m}]
F[z_] = Sqrt[3/z] ( 1 + Sum[P[m, Log[z]]/z^m, {m, 1, M}])
M = 9; a[1, 0] = 0;
F1x = F[1 + 1/x];
Ftx = Sin[F[1/x]];
s[1] = Series[(F1x - Ftx)/Sqrt[x], {x, 0, 2}]
t[1] = Extract[Solve [Coefficient[s[1], x^2] == 0, {a[1, 1]}], 1]
A[1, 1] = ReplaceAll[a[1, 1], t[1]]
su[1] = t[1]

m=2;
s[m]=Simplify[ReplaceAll[Series[(F1x-Ftx)/Sqrt[3 x],{x,0,m+1}], su[m-1]]]
t[m] = Simplify[Coefficient[ReplaceAll[s[m], Log[x] -> L], x^(m+1)]]
u[m] = Simplify[Collect[t[m], L]]
v[m] = Table[Coefficient[u[m] L, L^(n+1)] == 0, {n, 0, m}]
w[m] = Table[a[m, n], {n, 0, m}]
ad[m] = Extract[Solve[v[m], w[m]], 1]
su[m] = Join[su[m - 1], ad[m]]

m=3;
s[m]=Simplify[ReplaceAll[Series[(F1x-Ftx)/Sqrt[3 x],{x,0,m+1}], su[m-1]]]
t[m] = Simplify[Coefficient[ReplaceAll[s[m], Log[x] -> L], x^(m+1)]]
u[m] = Simplify[Collect[t[m], L]]
v[m] = Table[Coefficient[u[m] L, L^(n+1)] == 0, {n, 0, m}]
w[m] = Table[a[m, n], {n, 0, m}]
ad[m] = Extract[Solve[v[m], w[m]], 1]
su[m] = Join[su[m - 1], ad[m]]
. . .

```

Значения коэффициентов a показаны в таблице 13.1.

Таблица 13.1: Table of coefficients a in equation (13.6)

$a_{1,0}$	$\frac{3}{10}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$
$\frac{79}{700}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{27}{200}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$
$\frac{411}{3500}$	$\frac{1941}{7000}$	$\frac{27}{125}$	$\frac{27}{400}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	$a_{3,7}$
$\frac{1606257}{10780000}$	$\frac{7227}{17500}$	$\frac{1683}{4000}$	$\frac{1917}{10000}$	$\frac{567}{16000}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$	$a_{4,7}$
$\frac{140345627}{700700000}$	$\frac{70079931}{107800000}$	$\frac{566973}{700000}$	$\frac{98739}{200000}$	$\frac{7533}{50000}$	$\frac{15309}{800000}$	$a_{5,6}$	$a_{5,7}$
$\frac{137678711441}{490490000000}$	$\frac{7364523}{7007000}$	$\frac{305491257}{196000000}$	$\frac{4155111}{3500000}$	$\frac{796311}{1600000}$	$\frac{2218347}{20000000}$	$\frac{168399}{16000000}$	$a_{6,7}$
$\frac{25317035192599}{62537475000000}$	$\frac{8462569406199}{4904900000000}$	$\frac{32174780481}{10780000000}$	$\frac{5367503637}{1960000000}$	$\frac{407711313}{280000000}$	$\frac{181900809}{400000000}$	$\frac{1960281}{25000000}$	$\frac{938223}{160000000}$

Теперь для синуса можно определить суперфункцию F как предел

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} \arcsin^k(F_M(z + k)) \quad (13.7)$$

для некоторого фиксированного числа M термов в разложении (13.5). При $M > 2$, функция F по формуле (13.7) является асимптотическим

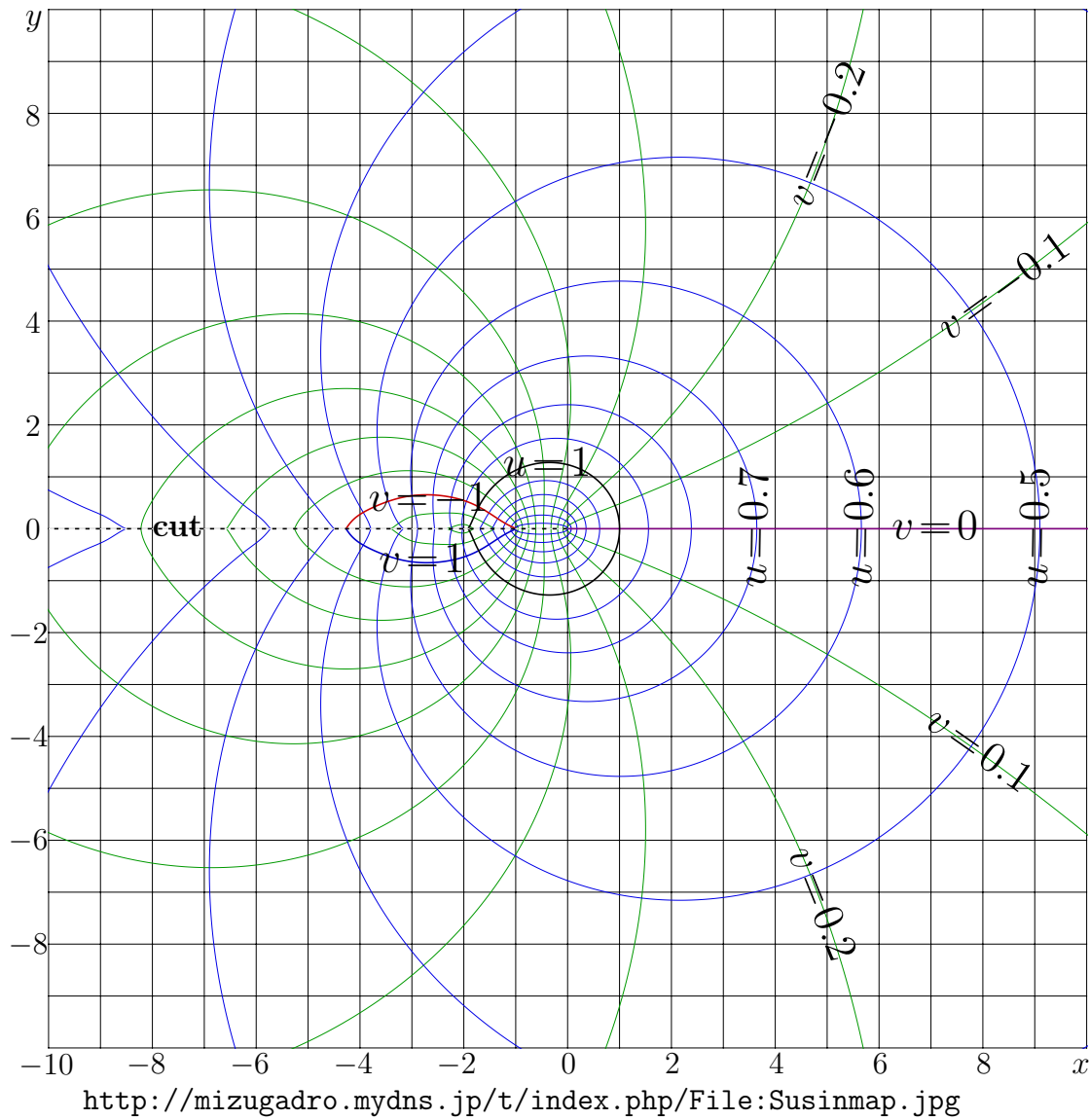


Рис. 13.2: $u+iv = \text{SuSin}(x+iy)$ по формуле (13.8)

решением передаточного уравнения (13.1), и предел в формуле (13.7) от M уже не зависит. Однако от M зависит скорость сходимости при имплементации представления (13.7).

Для суперфункции, удовлетворяющей ещё и дополнительному условию (13.2), требуется обеспечить определенное значение этой функции в нуле, или, что проще, в единице. Поэтому я кладу

$$\text{SuSin}(z) = F(z+x_1) \quad (13.8)$$

где $x_1 \approx 1.4304553465288$ есть решение уравнения

$$F(1+x_1) = 1 \quad (13.9)$$

При этом требуемое значение в нуле получается автоматически, так как $\text{SuSin}(0) = \arcsin(\text{SuSin}(1)) = \arcsin(1) = \pi/2$.

График функции SuSin по формуле (13.8) показан на рисунке 13.1. Комплексная карта этой функции показана на рисунке 13.2. Для вещественного аргумента, функция SuSin определена на положительной части вещественной оси, имеет значение $\pi/2$ и минус бесконечную производную в нуле. Затем, эта функция нудно, медленно и монотонно убывает до нуля на плюс бесконечности. В комплексной плоскости функция SuSin также убывает на бесконечности, но имеет ещё и разрез области голоморфизма вдоль отрицательной части вещественной оси. На рисунке 13.2 этот разрез обозначен символом **cut**.

Синус отличается от других передаточных функций, рассмотренных в этой Книге, тем, что эта функция в стационарной точке растёт медленнее своего аргумента. Соответственно, суперфункция SuSin (рис. 13.1) не возрастает, а убывает. Через первичное представление суперсинуса, нетрудно рассчитать его свойства, и, в частности, асимптотическое разложение в нуле. Я надеюсь, что при надобности, читатели без особых проблем могут вычислить коэффициенты такого разложения. Такое разложение может быть получено обращением разложения в точке $\pi/2$ функции AuSin , рассмотренной в следующей секции.

2 Абельсинус AuSin

Обратная функция от суперсинуса есть абельсинус, пусть она называется $\text{AuSin} = \text{SuSin}^{-1}$. График функции AuSin показан на рисунке 13.3. Эта секция рассказывает, как строится такая функция.

Функция $G = \text{AuSin}$ удовлетворяет уравнению Абеля

$$G(\sin(x)) = G(z) + 1 \quad (13.10)$$

Из свойств суперсинуса следует, что такое решение должно иметь определенные асимптотиче-

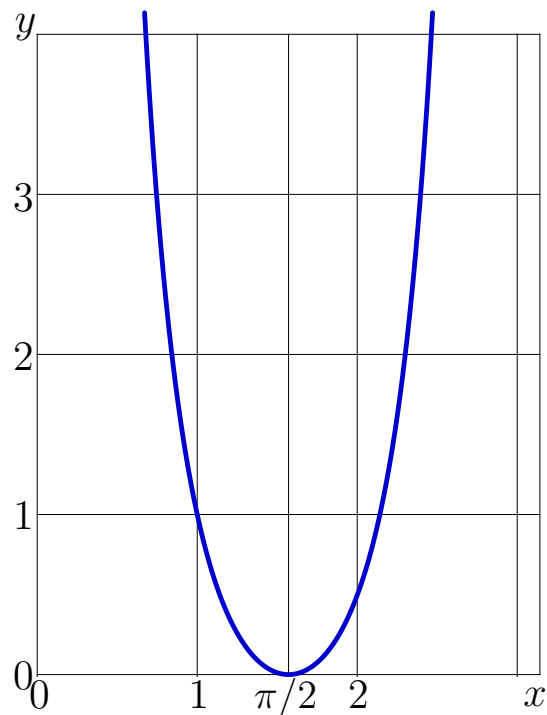


Рис. 13.3: $y = \text{AuSin}(x)$

ские свойства, а именно,

$$G(z) = \frac{2}{z^2} + O(\ln(z)) \quad (13.11)$$

Как и для других абельфункций, решение с требуемыми свойствами можно получить, обращая асимптотическое представление для суперфункции. Однако это же разложение для абельфункции G проще получить независимо, из уравнения Абеля (13.10). Затем, добавление константы x_1 дает абельфункцию

$$\text{AuSin}(z) = G(z) + x_1 \quad (13.12)$$

удовлетворяющую соотношению

$$\text{AuSin}(\pi/2) = 0 \quad (13.13)$$

как это и должно быть для функции, обратной суперсинусу, построенному в предыдущей секции. Остается построить разложение функции $G = F^{-1}$.

Асимптотическую аппроксимацию я ищу в виде разложения

$$G_M(z) = \frac{3}{z^2} + \frac{5}{6} \ln(z) + \sum_{m=1}^M c_m z^{2m} \quad (13.14)$$

Подстановка $g(z) = G_M + O(z^{2M+2})$ в уравнение Абеля (13.10) дает коэффициенты c . В частности,

$$c_1 = \frac{79}{1050} \quad (13.15)$$

$$c_2 = \frac{29}{2625} \quad (13.16)$$

$$c_3 = \frac{91543}{36382500} \quad (13.17)$$

$$c_4 = \frac{18222899}{28378350000} \quad (13.18)$$

Для фиксированного M , функция G вычисляется как предел

$$G(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_M(\sin^k(z)) - k \quad (13.19)$$

Соответственно, $\text{AuSin} = \text{SuSin}^{-1}$ выражается через эту функцию G :

$$\text{AuSin}(z) = G(z) - G(\pi/2) \quad (13.20)$$

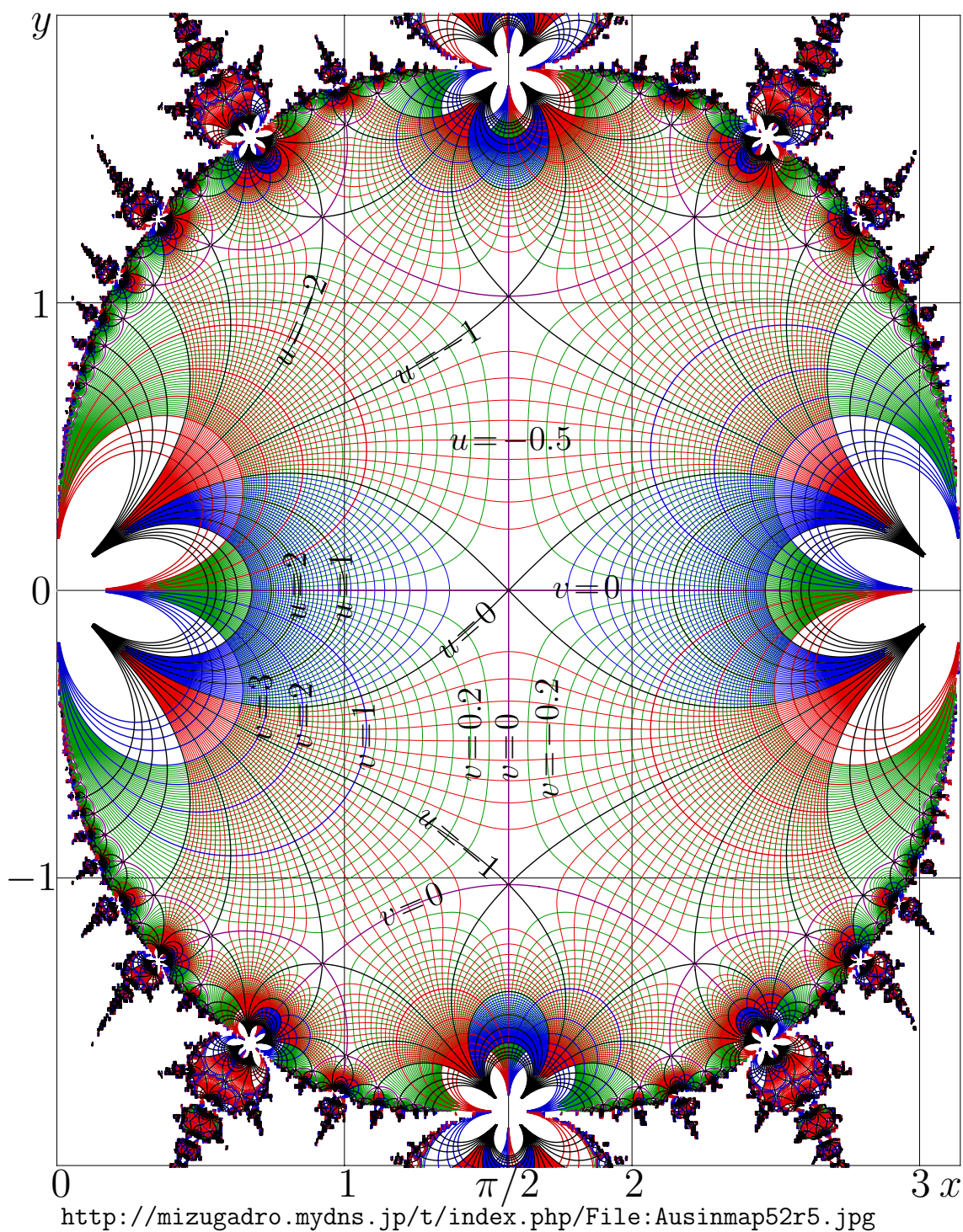


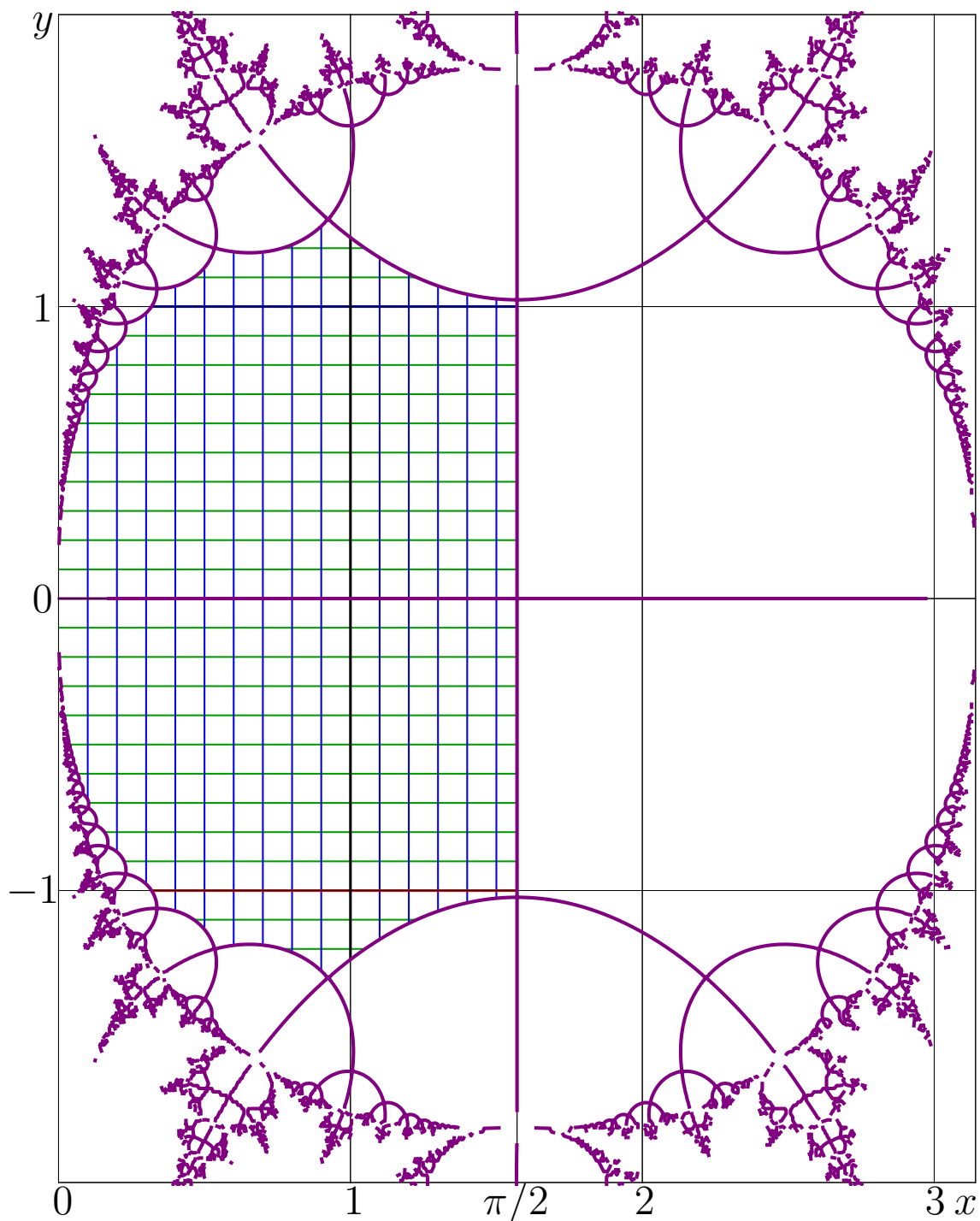
Рис. 13.4: $u+iv = \text{AuSin}(x+iy)$ по формуле (13.20)

Терм $G(\pi/2) \approx 2.089622719729524$ в уравнении (13.20) обеспечивает условие (13.13). Комплексная карта абельсинуса по формуле (13.20) показана на рисунке 13.4. Эта карта симметрична верх-низ, так как $\text{AuSin}(z^*) = \text{AuSin}(z)^*$. Кроме того, карта симметрична относительно отражений от оси $x = \pi/2$; первое же вычисление функции \sin в формуле (13.19) обеспечивает эту симметрию. В центральной части рисунка 13.4 предел (13.19) сходится и регулярным образом определяет голоморфную функцию. На периферии появляются разрезы.

Область применимости соотношения

$$\text{SuSin}\left(\text{AuSin}(z)\right) = z \quad (13.21)$$

ограничена. Аналогичные ограничения имеются и для других обратных функций, в частности, для синуса и арксинуса. Область применимости соотношения (13.21) показана на рисунке 13.5 мелкой прямоугольной сеткой.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Ausinsusinmapt50.jpg>

Рис. 13.5: $u+iv = h(x+iy)$ по формуле (13.22); линии $\Im(\text{AuSin}(x+iy)) = 0$

Технически, рис. 13.5 представляет комплексную карту функции

$$h(z) = \text{SuSin}(\text{AuSin}(z)) \quad (13.22)$$

В левой части карты на фигуре 13.22, вблизи положительной части вещественной оси, функция h есть идентичная функция, $h(z) = z$; линии постоянной вещественной части и линии постоянной мнимой части - прямые. Эти линии и образуют частую сетку, которая визуально воспринимается как штриховка. Заштрихованная таким образом область ограничена линиями $\Im(\text{AuSin}(x+iy)) = 0$; эти линии заимствованы из рисунка 13.4. При численной имплементации, в заштрихованной области соотношение $h(z) = z$ держится с 14ю значащими цифрами; я интерпретирую это как подтверждение адекватности численного представления функций SuSin и AuSin .

Читатели могут построить также карту функции согласия

$$A(z) = -\lg \left(\frac{|h(z) - z|}{|h(z)| + |z|} \right) \quad (13.23)$$

Такое согласие позволяет проверить аккуратность численного представления. Это обычно, что представление для обратной функции от голоморфной функции имеет ограниченную область применимости. Такое ограничение неизбежно при обращении любой сколько-нибудь нетривиальной голоморфной функции.

Для эффективной численной имплементации абельсинуса, полезны и иные разложения. Наиболее простым из них представляется разложение в ряд Тэйлора в точке $\pi/2$. Это разложение имеет такой вид:

$$\text{AuSin} \left(\frac{\pi}{2} + t \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{2n} \quad (13.24)$$

Приближенные значения коэффициентов b разложения (13.24) оценены с помощью контурного интеграла, с использованием первичной аппроксимации через функцию G по формулам (13.14), (13.19), (13.20). Значения этих коэффициентов показаны в таблице 13.2.

Таблица 13.2:

n	b_n
0	0
1	2.29163807440958
2	1.96043852439688
3	1.07862851256147
4	0.59622997993395
5	0.28333997139829
6	0.14193261194548
7	0.06423734271234
8	0.03026687705508
9	0.01351721250427

Ряд в разложении (13.24) сходится при $|t| < \pi/2$. Достаточно взять несколько десятков термов этого разложения, и такая аппроксимация сможет воспроизвести бóльшую часть рисунка 13.4. Я предлагаю читателям построить такую карту (или посмотреть на неё в Приложении).

При учете вполне умеренного количества термов разложения (13.24), численные аппроксимации абельсинуа дают точность, по крайней мере не хуже, чем точность при использовании исходного асимптотического разложения по формулам (13.14), (13.19), (13.20). Разумеется, исходное разложение всё равно требуется для вычисления, аппроксимации коэффициентов вторичных разложений. Оптимизация таких представлений имеет смысл для того, чтобы встраивать их в софтвер, и по мере возможности, улучшать, как и другие “built-in” функции, когда каждая микросекунда при вычислении дает важное изменение наблюдаемого быстродействия. Однако даже примитивные имплементации, используемые в этой Книге, позволяют строить все графики и комплексные карты в реальном времени. Я рассматриваю это как указание на высокую эффективность и важность предлагаемых здесь формул.

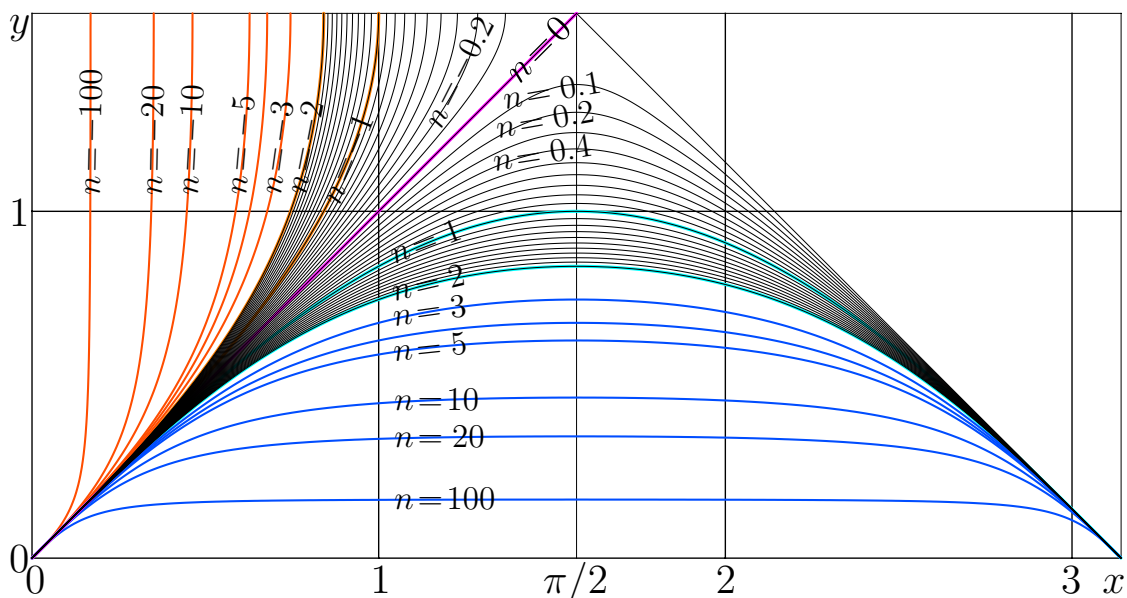
3 Итерации синуса

С функциями SuSin и $\text{AuSin} = \text{SuSin}^{-1}$, определенными в предыдущих секциях, итерации синуса могут быть представлены так:

$$\sin^n(z) = \text{SuSin}\left(n + \text{AuSin}(z)\right) \quad (13.25)$$

Эта формула вполне аналогична представлениям итераций других голоморфных функций через их суперфункции и абельфункции. Как обычно, номер итерации n не имеет надобности быть целым и может быть ажно комплексным; но, в частности, может быть и вещественным. Для нескольких вещественных значений n и для вещественных значений аргумента, итерации синуса по формуле (13.25) представлены на рисунке 13.6.

Для положительных значений номера итерации n , графики $y = \sin^n(x)$ симметричны относительно оси $x = \pi/2$, как это и должно быть из-за представления абельсинуа формулами (13.19) и (13.20). Чем больше n , тем ближе график приближается к вещественной оси.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Sinplo2t100.jpg>

Рис. 13.6: $y = \sin^n(x)$ по формуле (13.25) для различных n

Для отрицательных значений n , график $y = \sin^n(x)$ достигает точки ветвления при $y = \pi/2$ и не может быть продолжен, так как соответствующие итерации принимают комплексные значения. Как обычно, нулевая итерация соответствует тождественной функции, $\sin^0(x) = x$, и это соотношение держится, пока $0 < x < \pi/2$.

Через итерации синуса (13.25), суперсинус можно представить так:

$$\text{SuSin}(z) = \sin^z(\pi/2) \quad (13.26)$$

С точки зрения вычислений, такое представление имеет мало смысла, так как итерации синуса в правой части формулы (13.26) всё равно придется вычислять, используя аппроксимации суперсинуса (и, возможно, даже абельсинуса). Однако, когда нецелые итерации функций будут “зашиваться”, встраиваться в новые версии алгоритмических языков высокого уровня, в софтер, встанет вопрос об удобной мнемонике для названий соответствующих процедур, алгоритмов. Тогда выражение (13.26) можно использовать как подсказку для удачного выбора обозначений. Формула указывает, что функцию \sin применили z раз, причем в качестве начального значения аргумента выбрано число $\pi/2$.

Читатели приглашаются использовать итерации синуса. Я загрузил имплементации суперсинуса и абельсинуса по урлям

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Susin.cin> и

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Ausin.cin>

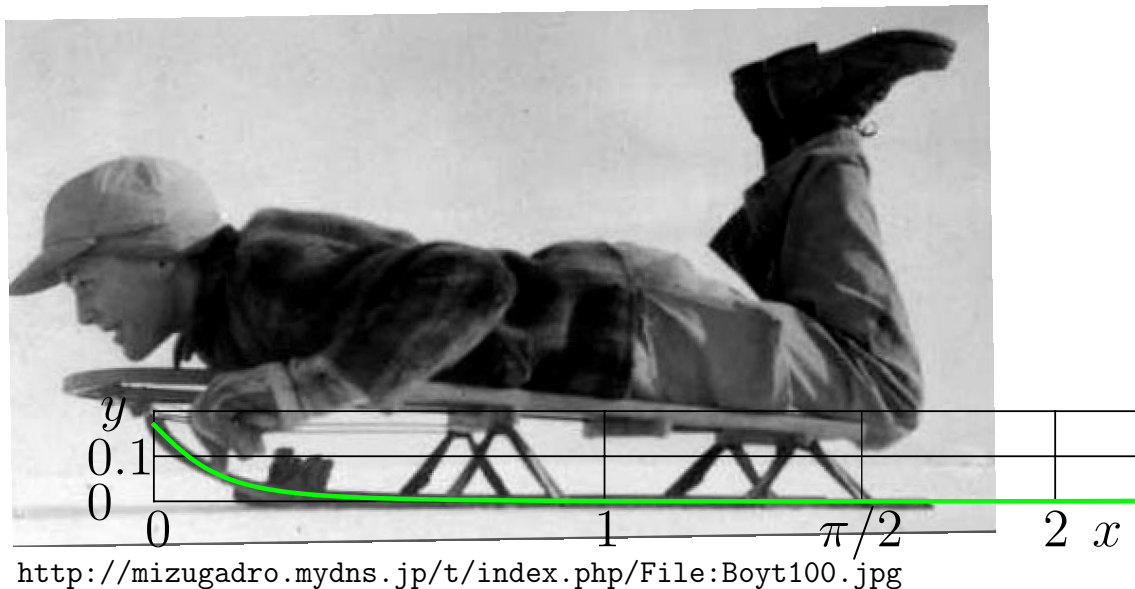


Рис. 13.7: Фитинг формы полоза: $y = \sin^n(\pi/2) - \sin^n(x)$ для $n = 100$

В качестве примера использования итераций синуса, на рисунке 13.7 показана параметризация формы полоза санок формулой

$$y = \sin^n(\pi/2) - \sin^n(x) \quad (13.27)$$

Фото взято из Викимедии [9]. Крива соответствует перевернутой 100й итерации синуса. Фото сдвинуто так, чтобы привести последнюю опору санок в точку с координатами $(\pi/2, 0)$, повернуто так, чтобы в этой точке полз шёл горизонтально, и масштабировано так, чтобы привести передний край полоза в точку с координатой $x = 0$. Тогда номер итерации $n = 100$ является единственным подгоночным параметром такой параметризации.

По аналогии с синусом, так можно строить итерации функций \sinh , \arctan , и многих других. Имеется формализм для построения суперфункции, которая на бесконечности стремится к стационарной точке передаточной функции. Особенно просто такой формализм интерпретируется, когда передаточная вещественно-голоморфна, имеет вещественную стационарную точку и является возрастающей функцией хотя бы в некоторой окрестности этой стационарной точки.

На этом я пока заканчиваю анализ суперфункций, абельфункций и итераций для вещественно-голоморфных функций, имеющих хотя бы одну вещественную стационарную точку. В следующей главе рассмотрена передаточная функция, а именно - натуральная экспонента, у которой вещественных стационарных точек нет.

Глава 14

Натуральная тетрация tet

Здесь рассмотрен случай экспоненциальной передаточной функции, $T = \exp$. Для такой передаточной функции передаточное уравнение

$$f(z+1) = \exp(f(z)) \quad (14.1)$$

Чтобы ограничить множество решений, на искомое решение f налагается условие

$$f(0) = 1 \quad (14.2)$$

Чтобы ещё сузить многообразие решений, я требую, чтобы решение $f(z)$ было голоморфным во всей комплексной плоскости за исключением полупрямой $z < 0$, а также ограниченным по крайней мере в полосе $\Re(z) \leq 1$. Тогда решение f называется тетрацией и обозначается символом tet . Для вещественных значений аргумента, эта функция показана на рисунке 14.1.

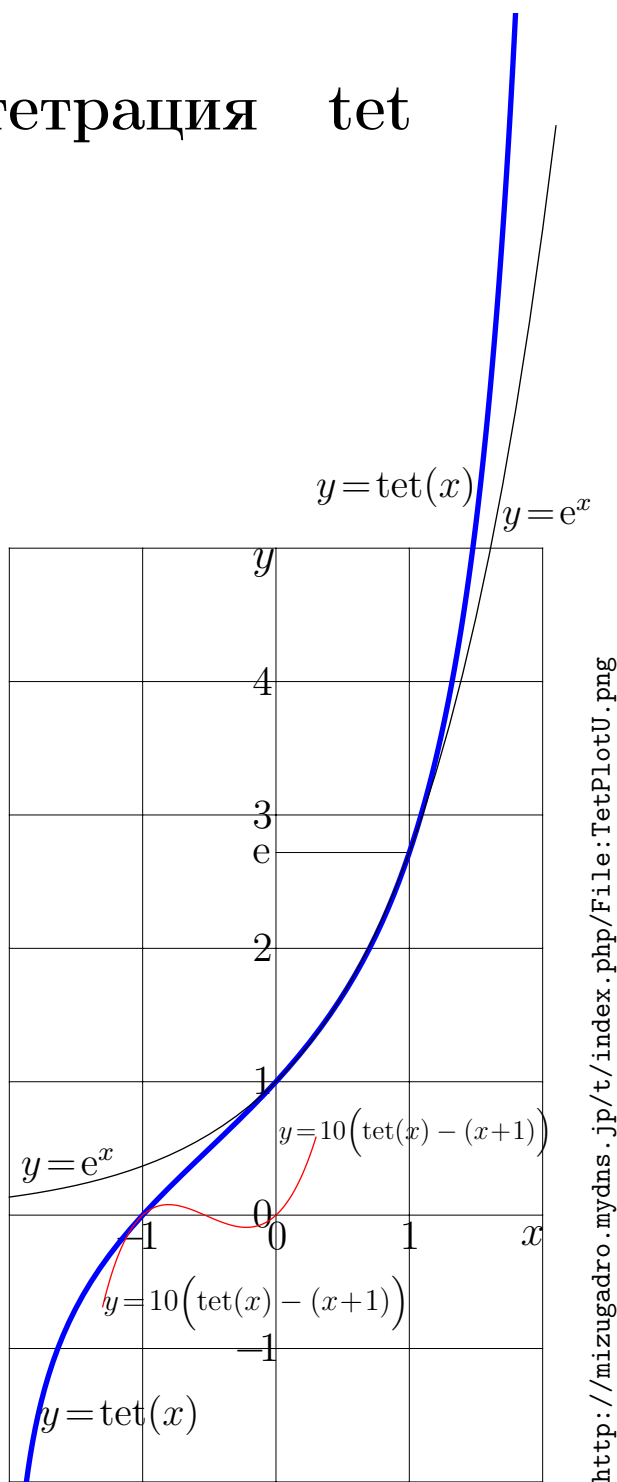


Рис. 14.1: $y = \text{tet}(x)$, $y = \exp(x)$, и $y = 10(\text{tet}(x) - (x+1))$

Надо отличать такую тетрацию от сходных суперфункций для экспоненты по другим основаниям. Поэтому предлагается также термин “натуральная тетрация”, использованный в качестве названия этой главы.

Коллеги спрашивают не только о том, как вычислять суперфункции для разных экзотических случаев (порою предсказывая, что для некоторой конкретной передаточной функции, суперфункцию построить не удастся), но и о том, как я догадался об асимптотическом поведении натуральной тетрации (а также других суперфункций). Такие вопросы задают не для того, чтобы во всех волнующих, шокирующих подробностях проследить сложный и опасный труд по угадыванию асимптотического поведения тетрации, а для того, чтобы похожим образом решать и другие задачи. Поэтому я отношусь к таким вопросам со всей серьезностью.

Чтобы ответить, эту главу пришлось превратить в некоторое подобие детективного романа, когда есть завязка, то есть уравнения (14.1), (14.2), и предлагается ущучить голоморфное решение $f = \text{tet}$, которое научная общественность согласилась бы счесть самой что ни на есть настоящей и натуральной тетрацией. В этой главе я показываю, что выбора у меня, по существу, не было, и что натуральная тетрация получается совершенно естественным и натуральным образом.

1 Экспонента

Прежде чем говорить о решении f уравнений (14.1), (14.2), придется вспомнить свойства экспоненты. Для вещественного аргумента, график экспоненты показан на рисунке 14.1 тонкой кривой. Комплексная карта передаточной функции $T = \exp$ показана на рисунке 14.2. На рисунке 14.3 повторен график экспоненты по основанию e , чтобы сравнить его с экспонентой по основанию $\sqrt{2}$; одна из суперфункций для экспоненты по основанию $\sqrt{2}$ уже рассмотрена в главе 9.

Я надеюсь, что меня простят за то, что я говорю, пишу и рисую про такие элементарные функции. Книга должна выдерживать прямое попадание в руки даже самого необученного академика (Пусть

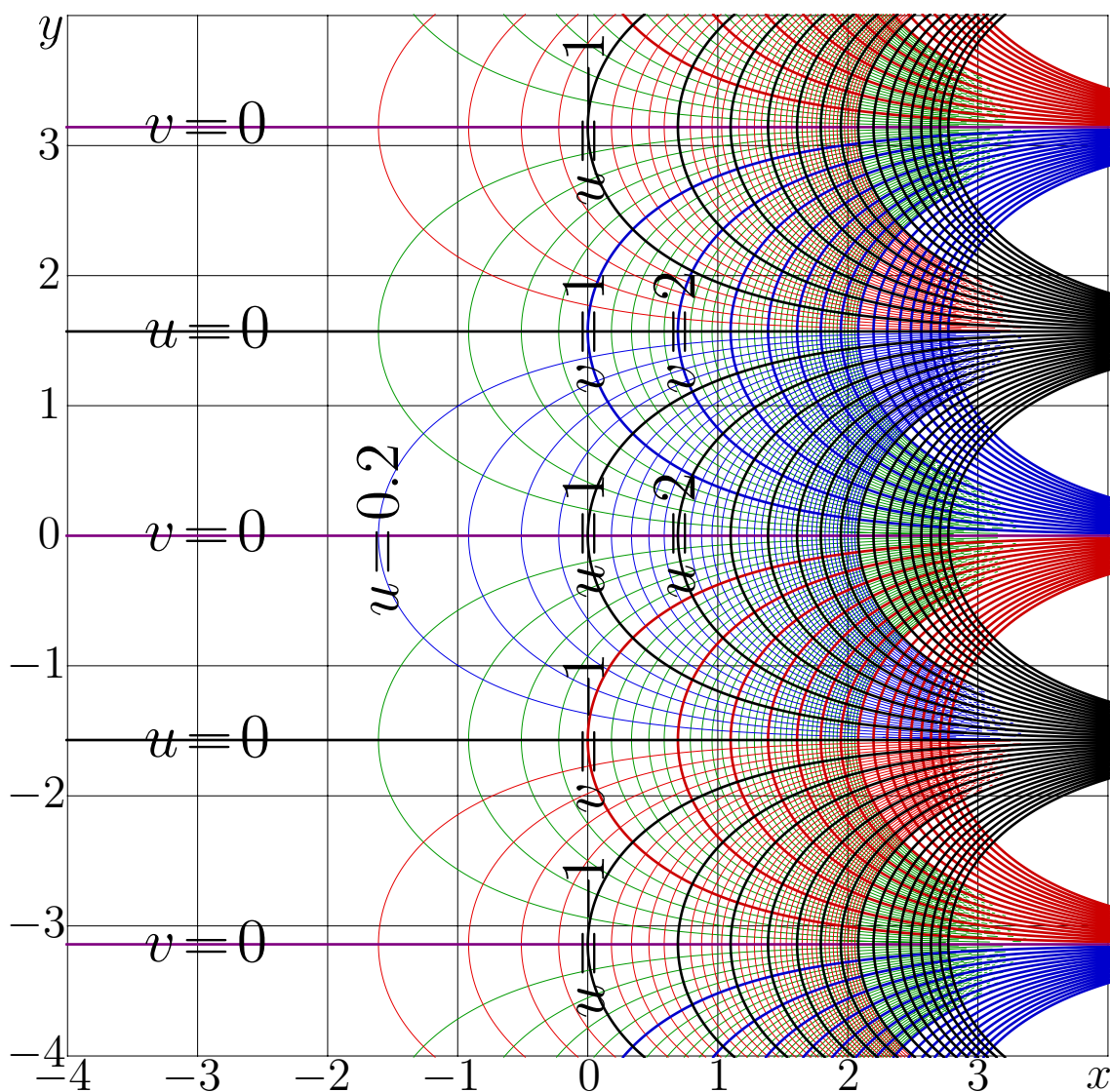


Рис. 14.2: $u+iv = \exp(x+iy)$

А.Каминский не обижается, так как этот оборот не я придумал, а Братья Стругацкие [16]). Дело в том, что экспонента везде гладкая, пока она не итерируется. Или даже пока итерируется, но целое неотрицательное число раз. А вот если смотреть, насколько она гладкая по количеству итераций, то вопрос о гладкости не так прост. (Я прошу Ю.Кузнецову не обижаться, так как поговорку “вода гладкая, пока об неё не ударишься” придумал тоже не я.) В старании писать ясно и понятно, чтобы даже Акира Ширакава понял, в этой главе я начинаю писать от экспоненты.

Для меня, экспонента выступает как суперфункция от операции “умножение на число e ”, приблизительно - на 2.71828182846:

$$T(z) = e z \quad (14.3)$$

Повторение – не мать остроумия, но цель Книги – не рассмешить

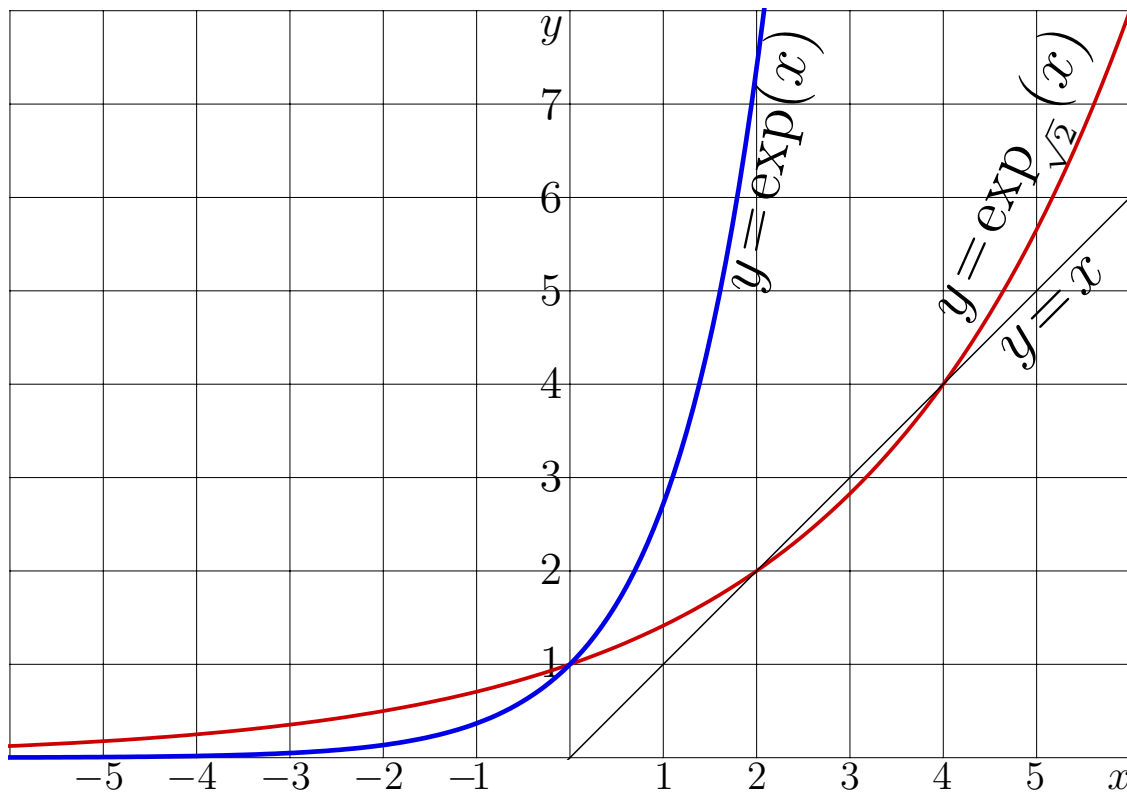


Рис. 14.3: $y = \exp(x)$ и $y = \exp_{\sqrt{2}}(x)$

читателя, а научить его пользоваться суперфункциями. Приходится писать об элементарных вещах, и, в частности, об элементарных функциях; чтобы даже Акира Ширакава не мог сказать, что формализм “слишком сложный”. Поэтому в качестве передаточного уравнения я повторяю формулу из школьного курса алгебры:

$$f(z+1) = e f(z) \quad (14.4)$$

В принципе, решение f этого уравнения можно строить методом регулярной итерации, вблизи стационарной точки $L=0$ передаточной функции T по формуле (14.3). Читателю рекомендуется проделать это в качестве упражнения. Первичное разложение (6.1) обрывается на первом же слагаемом, давая точное решение $f = \exp$.

Для передаточной функции $z \mapsto e z$, запишу и уравнение Абеля:

$$g(e z) = 1 + g(z) \quad (14.5)$$

Это уравнение рассмотрено Генриком Траппманном [75]. Вероятно, Читатель уже догадывается, что в качестве решения Генрик получил натуральный логарифм, $g = \ln$. Читатели приглашаются подумать, какие ещё требования надо присобачить к уравнению (14.5),

чтобы его решение $g = \ln$ стало единственным. Любители и профессионалы строгой математической дедукции могут также подсмотреть ответ у Генрика [75]; я надеюсь, что рукописи не горят, и упомянутая статья будет доступна и в будущем.

Экспоненту можно определить как специальную суперфункцию от передаточной функции “умножение на e ”, а именно, везде голоморфное решение f уравнения (14.4) с периодом $P = 2\pi i$, такое что

$$f(0) = 1 \quad (14.6)$$

Мне не удалось построить иного решения уравнения (14.4), обладающего такими свойствами.

График экспоненты представлен также на рисунке 14.3. (Эта же зависимость показана рисунке 14.1 тонкой кривой.) Полезно сравнить его с графиком экспоненты по основанию $b = \sqrt{2}$, который пересекает прямую $y = x$. Для удобства эта кривая воспроизведена на рисунке 14.3. График для натуральной экспоненты $y = \exp(x)$ прямую $y = x$ не пересекает. У натуральной экспоненты нет вещественных стационарных точек.

Стационарная точка L экспоненты и логарифма по основанию $b = \exp(a)$ есть решение уравнения $L = \log_b(L)$. Это решение может быть выражена через функцию Тани, рассмотренную в главе 4:

$$L = \text{filog}(a) = \frac{\text{Tania}(\ln(a) - 1 - \pi i)}{-a} = \frac{\text{WrightOmega}(\ln(a) - \pi i)}{-a} \quad (14.7)$$

Второе равенство в формуле (14.7) может рассматриваться как определение функции `filog`, рассмотренной также в ТОРИ,

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Filog>.

Более подробно свойства функции `filog` рассмотрены в главе 18.

Как видно из уравнения (14.7), `Tania` является модификацией известной специальной функции `WrightOmega` [12, 98]. Ввиду того, что фиксированная точка L выражается через известные специальные функции, этот параметр известен точно¹. Для основания экспонен-

¹Я прошу не обижаться ту Таню, которая до сих пор считает, что даже π есть число приближенное. В порядке попытки примирения, добавляю: в численных расчетах и, в частности, при генерации рисунков, используются приближенные значения математических констант с аккуратностью порядка 15 значащих цифр.

ты $b=e$, параметр $a=1$, это дает значение

$$\begin{aligned} L &= -\operatorname{Tan}ia(-1-\pi i) \\ &\approx 0.3181315052047641353 + 1.3372357014306894089i \quad (14.8) \end{aligned}$$

Приближение для L с парой значащих цифр можно извлечь также непосредственно из рисунка (5.3), считая пальцем изолинии.

Таким образом, функция $\operatorname{Tan}ia$ используется в этой книге уже дважды: в главе 2, как реалистичная суперфункция для передаточной функции Доуа, описывающей увеличение интенсивности света в усилителе с простой моделью накачки активной среды, и теперь, как способ точного представления фиксированной точки экспоненты. Это одна и та же Таня ². Для удобства склонения имени этой функции в соответствии с обычаями Русского языка, здесь используется также русскоязычная транслитерация Таня в том же значении, так что $\operatorname{Tan}ia=\text{Таня}$.

Экспонента является вещественно-голоморфной функцией, то есть $\exp(z^*) = \exp(z)^*$; поэтому число $L^* \approx 0.1 - 1.3i$ тоже является её стационарной точкой. Можно ожидать, что при больших отрицательных значениях вещественной части аргумента, вещественно-голоморфная суперэкспонента стремится к одному из значений L или L^* . Такая догадка обсуждается в седующей секции.

2 Эвристическая тетрация

После опубликования первой статьи про построение вещественно-голоморфной тетрации [44], многие коллеги задают мне одни и те же вопросы:

“Как вы угадали асимптотическое поведение тетрации на $\pm i\infty$?”

“Как вы угадали начальное приближение fit_3 ?” [76].

Чтобы не уподобляться Рипу Ван Винклю ³, вспоминая всё новые и новые подробности истории, которая надолго вышибла меня из Лазерной Науки, в этой секции я излагаю лишь одну из мотиваций.

² Сергей Решетняк обнаружил и экспериментально доказал, что лучше использовать одну Таню несколькими способами, чем несколько Тань - одним.

³ <http://lib.ru/INPROZ/IRWING/ripvanvinkl.txt> Вашингтон Ирвинг. Рип ван Винкль. Перевод А.С. Бобовича. 14 Jul 2000 19:52:31 GMT

Изначально, мне хотелось использовать какую-нибудь быстро растущую функцию для того, чтобы представлять факториал от числа частиц в Бозе-Эйнштейновском конденсате. Такой факториал возникает при попытке записать первое приближение для многочастичной волновой функции.

Быстро растущая функция предложена в статье Гусманда [39], но для асимптотического анализа она оказалась непригодной ввиду её неголоморфности. Гусманд описал линейное линейное приближение тетрации; это приближение дает две значащих цифры для тетрации, пока вещественная часть аргумента лежит в интервале $[-1, 0]$. Нетрудно написать соответствующее расширение через передаточное уравнение и для остальных точек комплексной плоскости:

$$f(z) = \text{uxp}(z) = \begin{cases} \ln(\text{uxp}(z+1)) & \text{at } \Re(z) \leq -1 \\ z + 1 & \text{at } -1 < \Re(z) \leq 0 \\ \exp(\text{uxp}(z-1)) & \text{at } 0 < \Re(z) \end{cases} \quad (14.9)$$

Эта функция показана на верхней картинке (а) рисунка 14.4 линиями постоянной логамплитуды u и фазы v ,

$$\exp(u+iv) = f(x+iy) \quad (14.10)$$

Такое представление карты отличается от того, которое обычно используется для визуализации комплексных функций этой Книги. Обычно проводятся линии уровня вещественной и линии уровня мнимой частей значений функции. Однако представление карт в том же виде, как они были опубликованы в статье [44], я считаю важным для ответа на вопрос, как я пришёл к эффективному представлению голоморфной тетрации.

На рисунке 14.4, вертикальные линии разреза области аналитичности делят комплексную плоскость на счетное множество почти не перекрывающихся полос. Такое поведение породило вопрос о том, можно ли предложить более голоморфное решение передаточного уравнения. При беглом просмотре работы Гусманда, казалось, что это невозможно, хотя допущение о монотонности производной от решения, использованного для доказательства теорем в работе [39], казалось сомнительным. В целях упростить доказательство несуществования голоморфной тетрации, я начал изучать её свойства, ожи-

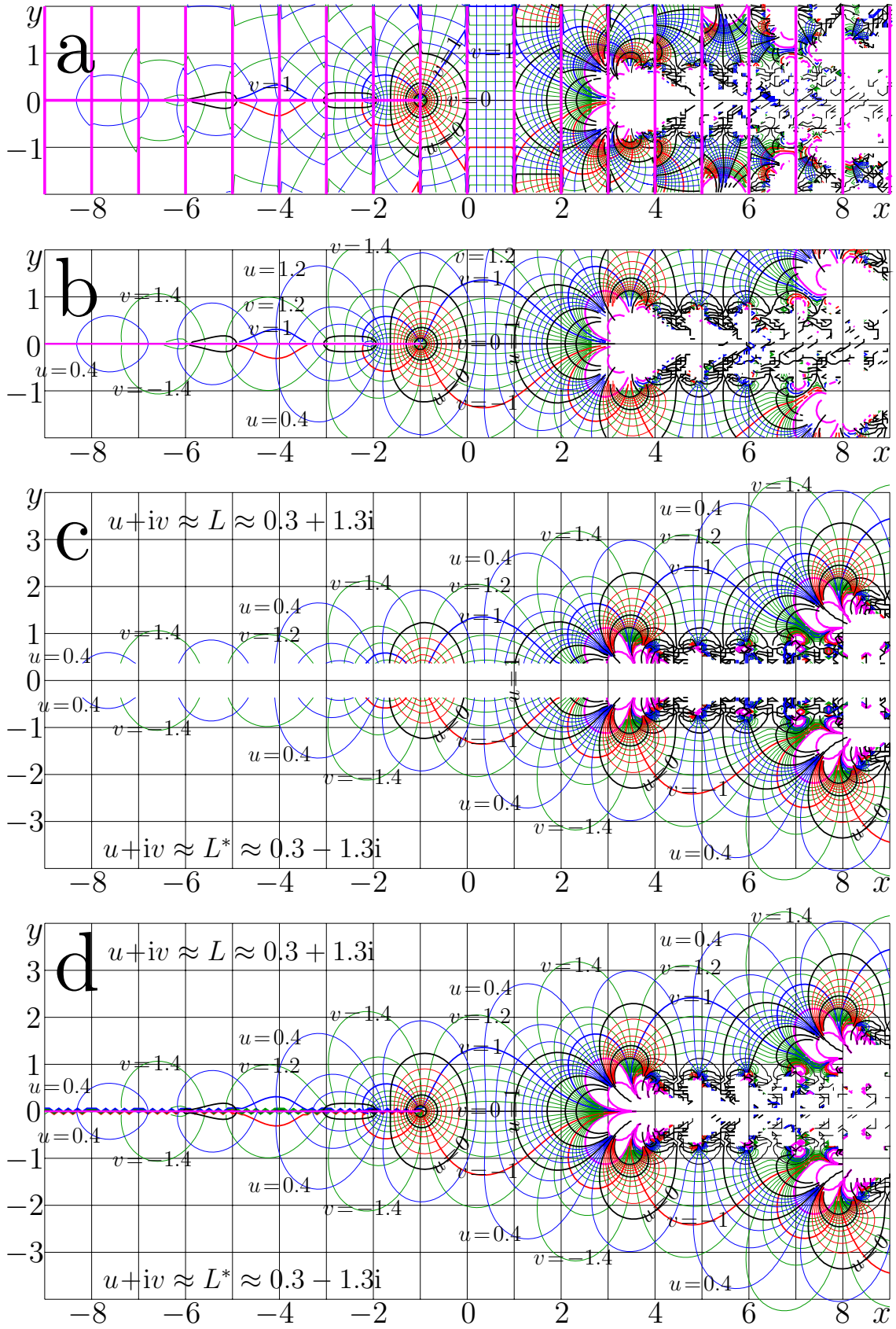


Рис. 14.4: $\exp(u+iv) = f(x+iy)$ для следующих функций: $f = uxr$, (a), $f = \text{Fit}_3$, (b), $f = \text{Fit}_6$, (c), $f = \text{tet}$, (d)

дая на некотором этапе прийти к противоречию и оформить изящное доказательство “от противного”. (Несуществование доказать не удалось; пришлось предположить, наоборот, существование.)

Чтобы доказать несуществование функции, полезно её аппроксимировать и нарисовать. Я рассмотрел несколько элементарных функций, имеющих логарифмическую особенность в точке -2 и принимающих те же значения, что и тетрация, при некоторых целых значениях аргумента. Одной из таких аппроксимаций является

$$\text{fit}_2(z) = \ln(2+z) + (1+z) \left(1 + \frac{z}{2} \exp\left((z-1)s_2(z)\right) \left(e - 2 + \ln \frac{4}{3}\right) - \ln 2 \right) \quad (14.11)$$

где

$$s_2(z) = \exp\left(\exp(z - 2.51)\right) - 0.6 + 0.08(z+1) \quad (14.12)$$

Константы в выражении (14.12) выбраны так, чтобы минимизировать невязку при подстановке $f = \text{fit}_2$ в передаточное уравнение. Эту аппроксимацию можно улучшить, сравнивая (14.12) с аккуратным приближением. Однако, во время “угадывания” свойств тетрации, аккуратная аппроксимация тетрации и даже её определение ещё не существовали; поэтому пришлось минимизировать невязку.

После построения функции fit_2 , оказалось, что линейная комбинация функций $z \mapsto \text{fit}_2(z)$ и $z \mapsto \ln(\text{fit}_2(z+1))$ дает ещё меньшую невязку; так получилась аппроксимация fit_3 :

$$\text{fit}_3(z) = 0.6 \text{fit}_2(z) + 0.4 \ln(\text{fit}_2(z+1)) \quad (14.13)$$

Область аппроксимации можно расширить; пусть

$$\text{Fit}_3(z) = \begin{cases} \ln(\text{Fit}_3(z+1)) & \text{at } \Re(z) \leq -1 \\ \text{fit}_3(z) & \text{at } -1 < \Re(z) \leq 0 \\ \exp(\text{Fit}_3(z-1)) & \text{at } 0 < \Re(z) \end{cases} \quad (14.14)$$

Логамплитуда и фаза этой функции показаны на рисунке 14.4b.

Для сравнения, на рисунке 14.4 показаны ещё две карты с и d. Они представляют, соответственно, асимптотическое приближение $f = \text{Fit}_6$, аккуратное при больших значениях мнимой части аргумента, и тетрацию $f = \text{tet}$, описанную ниже, в секции 4, и являющуюся основной целью этой главы.

$$\text{Fit}_6(z) = \begin{cases} L + \exp(k(z+r)) , & \Re(z) < -8 \\ \exp(\text{fit}_6(z-1)) , & \Re(z) \geq -8 \end{cases} \quad (14.15)$$

Для натуральной тетрации, инкремент $k = L$. Это может рассматриваться как совпадение, которое, впрочем, каждый может проверить с помощью достаточно примитивного асимптотического анализа. Значение константы $r \approx 1.075820830781 - 0.9466419207254i$ является единственным подгоночным параметром такой аппроксимации; это значение может рассматриваться приближенное значение точной фундаментальной математической константы ⁴. Функция $\text{Fit}_6(z)$ аппроксимирует тетрацию $\text{tet}(z)$ при $\Im(z) > 0.4$; функция $\text{Fit}_6(z^*)^*$ аппроксимирует $\text{tet}(z)$ при $\Im(z) < -0.4$; комбинация этих функций показана на карте “с” рисунка 14.4. Вблизи вещественной оси, то есть при $|\Im(z)| < 0.4$, такая аппроксимация ведет себя отвратительно и эта полоса на карте оставлена белой.

В принципе, аппроксимации $f = \text{Fit}_3$ и $f = \text{Fit}_6$ по формулам (14.14) (14.15) достаточны для построения карт и графиков тетрации; вместе, они обеспечивают порядка трех значащих цифр во всей комплексной плоскости. Однако, даже аппроксимация Fit_3 , см. (14.14), позволяет догадаться, что, если голоморфное решение f передаточного уравнения существует, то оно стремится к стационарным точкам L или L^* логарифма, когда мнимая часть аргумента стремится к плюс или минус бесконечности. Эти значения видны в левой верхней и левой нижней частях карт “b”, “c” и “d” на рисунке 14.4. Зная эти свойства и аккуратное представление тетрации, примитивные аппроксимации этой секции можно сильно улучшить; это улучшение описано во Владикавказском Математическом журнале [53].

Таким образом, эта секция поясняет, “как я догадался” о том, как ведет себя тетрация в окрестности мнимой оси. Постулируя эти свойства тетрации, можно построить эффективные и аккуратные алгоритмы для её вычисления. Такие постулаты перечислены в следующей секции.

⁴ Я бы назвал её константой Кнезера. Это одна из констант, требуемых для вычисления рассмотренных им разложений для итераций экспоненты [10]

3 Свойства тетрации

Следуя рекомендациям коллег, друзей и родственников, изложение в этой Книге идет от простого к сложному. Поэтому здесь пока определяется лишь натуральная тетрация. Эта секция продолжает пересказ статьи [44].

После того, как пара верхних карт рисунка 14.4 была построена, основные свойства этой функции стали ясны. Оставалось только постулировать их, как определение натуральной тетрации, и использовать эти свойства для её вычисления. Эти свойства перечислены (повторены) ниже.

Решение F передаточного уравнения (14.1) с дополнительным условием $F(0) = 0$ называется натуральной тетрацией или, для краткости, просто тетрацией, и обозначается символом tet , если выполнены следующие условия.

T1. Функция $F(z)$ вещественно-голоморфна во всей комплексной плоскости за исключением полупрямой $z \leq -2$; то есть $F(z^*) = F(z)^*$. В точке $z = -2$, функция $F(z)$ имеет логарифмическую особенность и, соответственно, точку ветвления.

T2. Функция $F(z)$ ограничена в полосе $|\Re(z)| \leq 1$.

T3. Функция $F(z)$ стремится к стационарной точке L в верхней части комплексной плоскости: для вещественных x имеет место соотношение

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(z + iy) = L \quad (14.16)$$

и для положительных значений y имеет место соотношение

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(z + iy) = L \quad (14.17)$$

T4. В полосе $-1 \leq \Re(z) \leq 2$ выполняется условие

$$\arg(F(z)) < 2 \quad (14.18)$$

Условия T1-T4 выше несколько избыточны. Можно надеяться, что дальнейшее совершенствование аппарата суперфункций поможет решить, которые из этих свойств следует сохранить в определении тетрации, а какие оформить в виде теорем, следующих из укороченного

определения и общих свойств голоморфных функций. Пока, пользуясь декларацией эвристичности, все свойства T1-T4 постулируются как части определения термина “натуральная тетрация”.

Из требований (14.16) и (14.17) и условия вещественности $f(z^*) = f(z)^*$ следует, что

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(z + iy) = L^* \quad (14.19)$$

и для отрицательных значений y имеет место соотношение

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(z + iy) = L^* \quad (14.20)$$

Условия (14.17) и (14.20) используются в следующей секции для построения и вычисления тетрации с помощью интеграла Коши.

4 Интеграл Коши

Для голоморфной функции F , имеет место формула Коши [86]:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} \frac{F(t)}{t-z} dt \quad (14.21)$$

где контур Ω интегрирования принадлежит односвязной области голоморфизма и один раз обходит точку z против часовой стрелки. С помощью уравнения (14.21), передаточное уравнение (14.1) можно свести к интегральному уравнению для значений суперфункции вдоль мнимой оси. Для экспоненты, такое уравнение описано в статье [44] и пересказано ниже.

Физик или математик, пользующийся формулой (14.21), имеет определенную свободу в выборе контура интегрирования. Он подобен инженеру, проектирующему кольцевую дорогу для уединенного гористого полуострова.

Добросовестный инженер постарается учесть расположение портов, селений, заводов, ферм, с тем, чтобы одной дорогой помочь по возможности большому количеству жителей добираться до тех мест, куда они едут. Кроме того, добросовестный инженер постарается избежать болот, крутых осыпей и узких извилистых ущелий, чтобы сделать дорогу быстрой, дешевой и безопасной.

Тщеславный диктатор, уже проявившийся в спорте, войнах, живописи, археологии и ориентологии, и решивший показать себя ещё и в роли крутого инженера, может нарисовать на карте прямоугольник и предложить его в качестве проекта трассы. Такой “проект” потребует много насыпей, выемок и туннелей, которые сильно просядут бюджет и дадут министрам дурной пример расточительства и головотяпства.

К сожалению, в выборе контура интегрирования, предложенном в статье [44], я выступаю скорее как тщеславный диктатор, чем как добросовестный инженер: я выбираю контур интегрирования в виде прямоугольника. Меня оправдывает лишь то, что на основе такого контура получается эффективный алгоритм вычисления тетрации (суперфункции от экспоненты); первые комплексные карты тетрации были построены с таким алгоритмом.

Пусть F является вещественно-голоморфным решением передаточного уравнения $F(z+1) = e^{F(z)}$,

Пусть A - вещественное число, такое большое, что $F(iA) \approx L$ и, значит, $F(-iA) \approx L^*$

Пусть область голоморфизма функции $F(z)$ включает область $-1 \leq \Re(z) \leq 1$, и в этой области $|\arg F(z)| < \pi$.

Такие условия позволяют превратить контурный интеграл в решаемое интегральное уравнение при подходящем выборе контура Ω в формуле Коши (14.21). Пусть контур Ω состоит из четырех сегментов:

- A.** вдоль линии $\Re(t)=1$ от $t = 1-iA$ до $t = 1+iA$.
- B.** от точки $t = 1+iA$ до точки $t = -1+iA$, проходя над точкой z .
- C.** вдоль линии $\Re(t) = -1$ от $t = -1+iA$ до $t = -1-iA$.
- D.** от точки $t = -1-iA$ до точки $t = 1-iA$, проходя под точкой z .

Для контура Ω , интеграл Коши может быть записан так:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{F(1+ip) dp}{1+ip-z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{F(-1+ip) dp}{-1+ip-z} \quad (14.22)$$

$$- \frac{F_{\text{up}}}{2\pi i} \int_{-1-iA}^{1-iA} \frac{dt}{t-z} + \frac{F_{\text{down}}}{2\pi i} \int_{-1-iA}^{-1+iA} \frac{dt}{t-z}$$

где F_{up} и F_{down} суть некоторые средние значения на участках **B** и

Д контура Ω .

С учетом передаточного уравнения 2.7, предполагая, что для требуемой области значений, функция T^{-1} голоморфна, уравнение (14.22) может быть переписано с обычными интегралами:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\exp(F(ip)) dp}{1 + ip - z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\ln(F(ip)) dp}{-1 + ip - z} + K(z) \quad (14.23)$$

где

$$\begin{aligned} K(z) = & F_{\text{up}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1 - iA + z}{1 - iA - z} \right) \\ & + F_{\text{down}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1 - iA - z}{1 - iA + z} \right) \end{aligned} \quad (14.24)$$

Такая запись предполагает, что модуль фазы функции F вдоль мнимой оси не превышает π , так что при интегрировании аргумент логарифма не проходит через отрицательные значения.

Уравнения (14.23), (14.24) всё ещё точные. Разумеется, они становятся приближенными, если мы заменим $F_{\text{up}} \rightarrow L$ и $F_{\text{down}} \rightarrow L^*$. Такая замена замыкает представление для K . Получается решаемое интегральное уравнение для аппроксимации $F_A(iy)$ распределения суперфункции F вдоль мнимой оси, параметризованного переменной y :

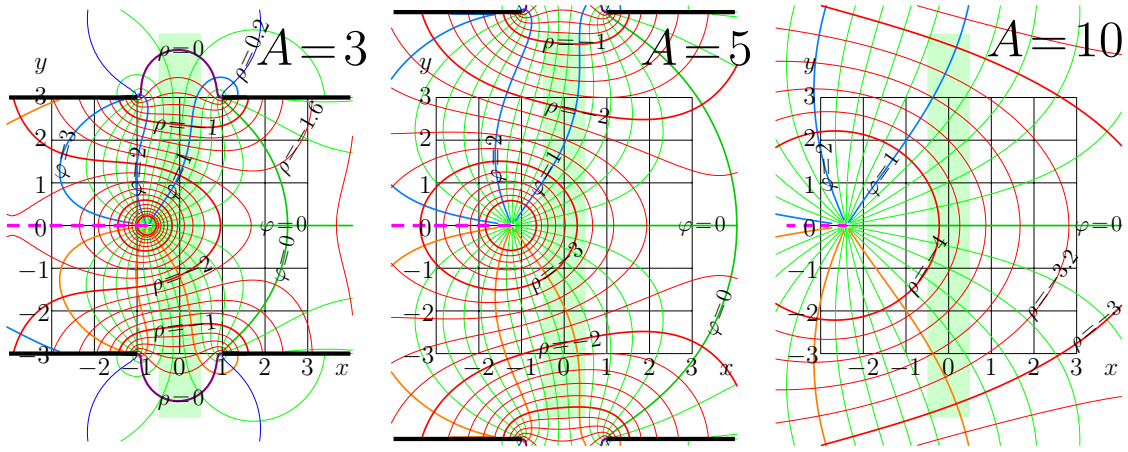
$$F_A(iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\exp(F_A(ip)) dp}{1 + ip - iy} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\ln(F_A(ip)) dp}{-1 + ip - iy} + K_A(iy) \quad (14.25)$$

где

$$K_A(z) = L \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1 - iA + z}{1 + iA - z} \right) + L^* \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1 - iA - z}{1 + iA + z} \right) \quad (14.26)$$

Уравнения (14.25) и (14.26), в отличие от уравнений 14.23 и (14.24), замкнуты; они не содержат неизвестных параметров F_{up} и F_{down} . Это позволяет использовать (14.25) и (14.26) вычисления F_A .

Представление интеграла по верхней и по нижней частям контура в виде функции K_A по формуле (14.26) не тривиально. В частности, при взгляде на выражение (14.26), возникает искушение записать каждый логарифм в виде разности двух логарифмов, чтобы



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Analuxp02t900.jpg>

Рис. 14.5: $\exp(\rho + i\varphi) = K_A(x + iy)$ по формуле (14.26) для $A = 3, 5, 10$

упростить выражения для аргументов логарифма. Однако, для того, чтобы получить надежное представление для тетрации, этого делать не следует, так как в представлении (14.26), разрезы области голоморфизма направлены в стороны от мнимой оси; это позволяет избежать приближения аргумента первичной аппроксимации для тетрации к границам области голоморфизма функции K_A . Для того чтобы представить эту функцию, её карта показана на рисунке 14.5. При больших значениях A , решение F_A уравнения (14.25) дает хорошее приближение для суперфункции $F \approx F_A$;

$$F(z) = \lim_{A \rightarrow \infty} F_A(z) \quad (14.27)$$

Для того, чтобы получить тетрацию tet , надо обеспечить ещё выполнение условия $\text{tet}(0) = 1$. Для этого я кладу

$$\text{tet}(z) = F(x_0 + z) \quad (14.28)$$

где x_0 есть решение уравнения $F(x_0) = 1$. Значение x_0 зависит от начального условия при итерационном решении уравнения 14.23; для начального условия в виде аппроксимации (14.15), x_0 оказывается порядка одной десятой. Это значение зависит ещё от параметра A , и поэтому не является фундаментальной математической константой.

Значение инкремента $k = L$ в аппроксимации (14.15) указывает, что для имплементации complex double, разумное значение константы A должно быть порядка 20. Оказалось, при $A = 24$ невязка чуть

меньше, и это значение было выбрано.⁵

Для численной имплементации уравнения (14.25), интегралы можно заменить на их приближения по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра; тогда уравнение можно решать методом итераций, обновляя значения аппроксимации F_A по одному. Попытка параллельного присвоения новых значений всему массиву F приводит к расходящемуся алгоритму, но при подходящем выборе порядка присвоения (например, сперва четные узлы, а потом нечетные), после нескольких десятков итераций, процедура дает аккуратное приближение для решения.

Решение уравнения (14.25) аппроксимирует значения суперфункции F вдоль мнимой оси. Затем, уравнение (14.23) дает аппроксимацию функции $F(z)$ в полосе

$$-1 < \Re(z) < 1 \quad (14.29)$$

Аккуратность такой аппроксимации для краев этой полосы хуже, чем для центральной части. Поэтому лучше использовать значения из более узкой полосы

$$-\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2} \quad (14.30)$$

пользуясь по мере надобности формулой

$$F(z) = T^n(F(z-n)) \quad (14.31)$$

при подходящем целом значении n , положительном или отрицательном в зависимости от знака $\Re(z)$.

При увеличении параметра A в уравнении (14.22), функция F стремится к решению передаточного уравнения (14.1). Такое решение ещё не обеспечивает условия $F(0) = 1$, но дает ключ к вычислению требуемой функции через уравнение (14.28).

На рисунке 14.5, затенена полоса $|x| < 0.5$, $|y| < 4.5$; это примерно та область, для которой значения функции K_A используются для вычисления суперфункции F при построении последней рисунка 14.4d.

⁵Используя формулу Коши для численных расчетов в первый раз, я не догадался до такой простой оценки и подбирал подходящее значение “методом тыка”, минимизируя невязку численного решения при подстановке в передаточное уравнение. Я последовательно увеличивал значение A до тех пор, пока невязка не стала порядка ошибок округления.

Рисунок 14.5 показывает, что фаза “постоянного” слагаемого (то есть независимого от искомой функции) в правой части уравнения (14.25) не превышает двух и, таким образом, не превышает π . Это обосновывает (верифицирует) использование логарифма в формуле (14.23).

В принципе, $F(z-n)$ могло бы попасть на точку сингулярности или линию разреза функции T или T^{-1} . Это указало бы, что построенная методом интеграла Коши суперфункция также сингулярна. Такое происходит при вещественном аргументе, меньшим или равным минус двум.

В первых расчетах, в качестве начальной пробной функции для итерационного решения уравнения (14.25) использована аппроксимация fit_3 ; потом выяснилось, что итерации с другими пробными функциями дают тот же результат.

С помощью алгоритма, описанного выше, в 2008 году впервые была построена тетрация [44], то есть суперфункция для передаточной функции $T = \exp$. При $A = 24$, использование квадратурной формулы Гаусса-Лежандра с 2048ю узлами дает приближенное решение, которое, при подстановке в передаточное уравнение (2.7), дает невязку порядка 10^{-14} . Похоже, что использование переменных `complex(double)` дает порядка 14 корректных значащих цифр; это указывает на устойчивость алгоритма и дает надежду на его успешное применение для различных передаточных функций.

Описанный выше алгоритм использован при построении первых графиков тетрации по основанию $b > \exp(1/e)$ [87, 88]. В частности, с помощью этого алгоритма построена нижняя карта на рисунке 14.4.

Для того, чтобы поднять статус тетрации до специальной функции, были разработаны также численные аппроксимации, более быстрые, чем вычисление контурного интеграла, и столь же точные (прецизионные, обеспечивающие порядка 14 значащих цифр). Эти аппроксимации рассмотрены в следующих секциях, ниже пересказаны некоторые результаты публикации 2010 года “Тетрация как специальная функция” [52, 53].

5 Разложение Тэйлора в нуле

Было интересно проверить заявление о том, что решение $f = \text{tet}$ уравнений (14.1) и (14.1), имеющее свойства T1-T4, существует и единственно [44]. В соответствии с декларацией Введения, даже строгое математическое доказательство не заменяет численную проверку предлагаемого результата, так же, как численная проверка не заменяет строгое математическое доказательство.

Для серьезной проверки важно, чтобы алгоритм вычисления функции работал быстро. Для убыстрения предложены аппроксимации тетрации через элементарные функции [53, 52]. Одной из таких аппроксимаций является разложение Тэйлора в нуле, оно описано в этой секции.

В принципе, производные тетрации могут вычисляться дифференцированием представления (14.25). Однако более аккуратные значения дает использование интерала Коши с контуром в виде окружности. Для вычисления производных в нуле, радиус этой окружности может быть больше единицы, и погрешность результата уменьшается за счет знаменателя в правой части уравнения (14.21). Так получены коэффициенты в разложении

$$\text{naiv}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^n \quad (14.32)$$

$$\text{tet}(z) = \text{naiv}(z) + \mathcal{O}(z^N) \quad (14.33)$$

Приближенные значения коэффициентов c представлены в первом столбце таблицы 5. Соответствующий степенной ряд сходится при $|z| < 2$, это расстояние от нуля до ближайшей особой точки, то есть до минус двух.

Для численной имплементации выбрано значение $N = 50$. Комплексная карта приближения naiv по формуле (14.32) показана на левой фигуре рисунка 14.6 линиями постоянной вещественной части и линиями постоянной мнимой части, $u + iv = \text{naiv}(x + iy)$. Дополнительные толстые линии указывают уровни $u = \Re(L)$ и $v = \pm \Im(L)$.

Чтобы показать невязку при подстановке аппроксимации $f = \text{naiv}$ в

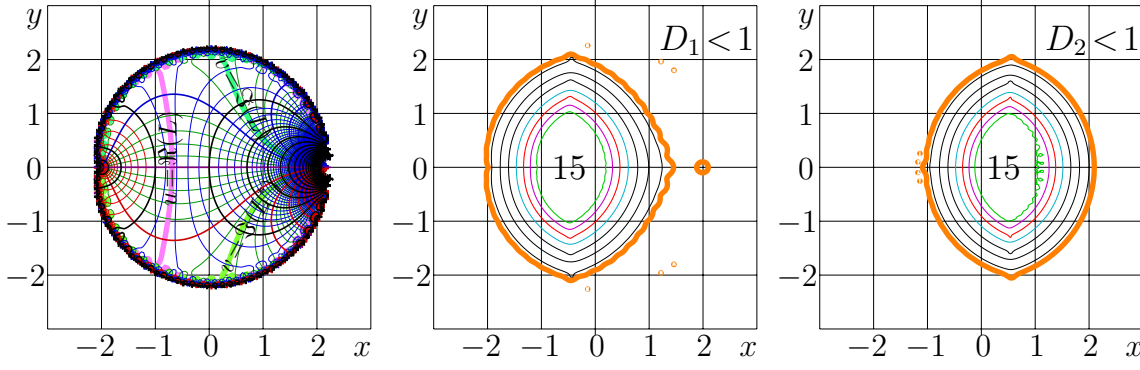


Рис. 14.6: $u + iv = \text{naiv}(x + iy)$ по формуле (14.32), слева; согласия $D_1 = D_1(x + iy)$ и $D_2 = D_2(x + iy)$ по формулам (14.34) и (14.35), центральная и правая карты.

передаточное уравнение (14.1), в центральной и правой частях рисунка 14.6 показаны карты согласий

$$D_{\text{naiv1}}(z) = -\lg \left(\frac{|\ln(\text{naiv}(z+1) - \text{naiv}(z))|}{|\ln(\text{naiv}(z+1))| + |\text{naiv}(z)|} \right) \quad (14.34)$$

$$D_{\text{naiv2}}(z) = -\lg \left(\frac{|\exp(\text{naiv}(z-1) - \text{naiv}(z))|}{|\exp(\text{naiv}(z-1))| + |\text{naiv}(z)|} \right) \quad (14.35)$$

Функции согласия оценивают, сколько значащих цифр можно получить с помощью аппроксимации naiv по формуле (14.32). Проведены уровни $D = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14$. Символ "15" указывает область, где согласие больше четырнадцати. Можно ожидать, что при $|z| < 1$, полином по формуле (14.32) дает порядка 14 значащих цифр. Это близко к максимальной точности, достижимой с переменными "complex double".

Полиномиальная аппроксимация naiv по формуле (14.32) может использоваться для аккуратного и быстрого вычисления тетрации, когда модуль аргумента меньше или порядка единицы. Для эффективной имплементации тетрации это хорошо, но не достаточно. В следующей секции описывается способ расширить область аппроксимации.

6 Улучшенная аппроксимация

Область аккуратной аппроксимации тетрации вблизи нуля может быть расширена, если принять во внимание логарифмическую осо-

Таблица 5. Коэффициенты в разложениях (14.32), (14.36) и (14.40)

n	c_n	s_n	$\Re(t_n)$	$\Im(t_n)$
0	1.000000000000000	0.30685281944005	0.37090658903229	1.33682167078891
1	1.09176735125832	0.59176735125832	0.01830048268799	0.06961107694975
2	0.27148321290170	0.39648321290170	-0.04222107960160	0.02429633404907
3	0.21245324817626	0.17078658150959	-0.01585164381085	-0.01478953595879
4	0.06954037613999	0.08516537613999	0.00264738081895	-0.00657558130520
5	0.04429195209047	0.03804195209047	0.00182759574799	-0.00025319516391
6	0.01473674209639	0.01734090876306	0.00036562994770	0.00028246515810
7	0.00866878181723	0.00755271038865	0.00002689538943	0.00014180498091
8	0.00279647939839	0.00328476064839	-0.00003139436775	0.00003583704949
9	0.00161063129058	0.00139361740170	-0.00001376358453	-0.00000183512708
10	0.00048992723148	0.00058758348148	-0.00000180290980	-0.00000314787679
11	0.00028818107115	0.00024379186661	0.00000026398870	-0.00000092613311
12	0.00008009461254	0.00010043966462	0.00000024961828	-0.00000013664223
13	0.00005029114179	0.00004090111776	0.00000007899707	0.00000003171468
14	0.00001218379034	0.00001654344436	0.00000000637479	0.00000002270476
15	0.00000866553367	0.00000663102846	-0.00000000341142	0.00000000512289
16	0.00000168778232	0.00000264145664	-0.00000000162203	0.00000000031619
17	0.00000149325325	0.00000104446533	-0.00000000038743	-0.00000000027282
18	0.00000019876076	0.00000041068839	-0.00000000001201	-0.00000000013440
19	0.00000026086736	0.00000016048059	0.00000000002570	-0.00000000002543
20	0.00000001470995	0.00000006239367	0.00000000000935	0.00000000000045
21	0.00000004683450	0.00000002412797	0.00000000000170	0.000000000000186
22	-0.00000000154924	0.00000000928797	-0.00000000000005	0.000000000000071
23	0.00000000874151	0.00000000355850	-0.00000000000016	0.000000000000012
24	-0.00000000112579	0.00000000135774	-0.00000000000005	-0.000000000000001
25	0.00000000170796	0.00000000051587	-0.00000000000001	-0.000000000000001

бенность тетрадии. То есть “выключить” сингулярность в точке -2 , раскладывая функцию $\text{tet}(z) - \log(z+2)$ вместо функции $\text{tet}(z)$. Такое разложение дает приближение

$$\text{maclo}(z) = \ln(z+2) + \sum_{n=0}^{N-1} s_n z^n ; \quad (14.36)$$

$$\text{tet}(z) = \text{maclo}(z) + \mathcal{O}(z^N) . \quad (14.37)$$

Ряд в аппроксимации (14.36) сходится при $|z| < 3$, точно воспроизводя логарифмическую точку ветвления и даже кусочек разреза в направлении отрицательной части вещественной оси. Приближенные значения коэффициентов s представлены во втором столбце таблицы 5.

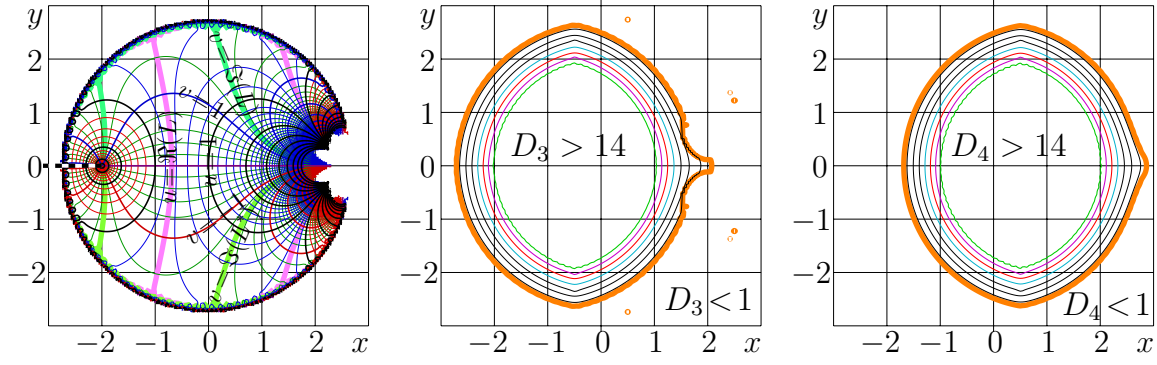


Рис. 14.7: $u+iv = \text{maclo}(x+iy)$ по формуле (14.36) при $N = 101$, слева; согласия D_3 и D_4 по формулам (14.38) и (14.39), центр и справа.

В этой секции (и в численной имплементации), для аппроксимации maclo выбрано значение $N = 101$; комплексная карта такого приближения по формуле (14.36) показана на левой карте рисунка 14.7. Область аппроксимации тетрации функцией maclo шире, чем в случае непосредственного разложения тетрации в нуле. На том же рисунке 14.7 показаны также карты согласий

$$D_3(z) = -\lg \left(\frac{\left| \ln(\text{maclo}(z+1)) - \text{maclo}(z) \right|}{\left| \ln(\text{maclo}(z+1)) \right| + \left| \text{maclo}(z) \right|} \right) \quad (14.38)$$

$$D_4(z) = -\lg \left(\frac{\left| \exp(\text{maclo}(z-1)) - \text{maclo}(z) \right|}{\left| \exp(\text{maclo}(z-1)) \right| + \left| \text{maclo}(z) \right|} \right) \quad (14.39)$$

В центральной части комплексной плоскости, невязки при подстановке $f \rightarrow \text{maclo}$ в уравнение (14.1), имеют порядок величины 10^{-15} . При $|z| < 2$, аппроксимация maclo с сотней слагаемых в сумме дает порядка четырнадцати значащих цифр. Эта аппроксимация использована при имплементации натуральной тетрации.

Левая карта рисунка 14.7 уже показывает, что при увеличении мнимой части аргумента, функция стремится к константе L : линии постоянной вещественной части становятся почти параллельными линиям постоянной мнимой части. Однако, когда модуль аргумента становится больше двух, аккуратность такого приближения быстро ухудшается. Чтобы ещё расширить область аппроксимации тетрации элементарными функциями, в следующей секции рассмотрено разложение натуральной тетрации в точке $3i$.

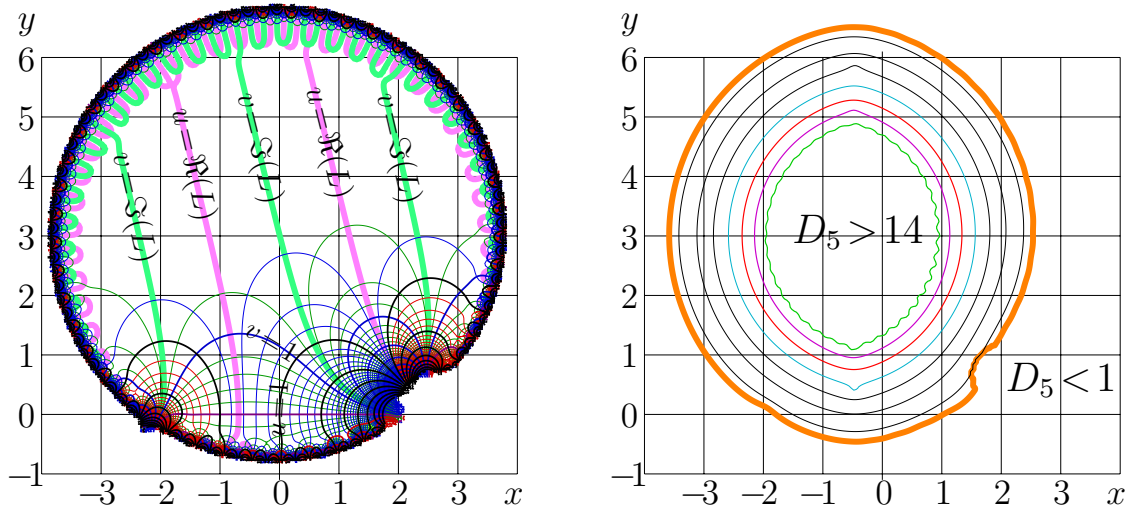


Рис. 14.8: $u+iv = \text{tai}(x+iy)$ по формуле (14.40) при $N = 51$ и согласие D_5 по формуле (14.41).

7 Разложение в точке $3i$

Для эффективного (быстрого и точного) алгоритма вычисления тетрации, достаточно обеспечить хорошие аппроксимации вдоль полосы единичной ширины вдоль мнимой оси. Какое бы большое число N слагаемых в приближении maslo (14.36) мы ни брали, это приближение плохо аппроксимирует тетрацию в точке $3i$. Для меня это было серьезным поводом, чтобы вычислить коэффициенты разложения Тэйлора именно в этой точке. Такое разложение описано в этой секции.

Оборванное разложение Тэйлора функции $\text{tet}(z)$ в точке $z = 3i$ я назвал именем “tai” (TAylor expansion centered at the Imaginary axis):

$$\text{tai}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} t_n (z - 3i)^n \quad (14.40)$$

Аппроксимации коэффициентов t вычислены по формуле Коши; их вещественные и мнимые части представлены в последних двух столбцах таблицы 5. Ряд сходится при $|z - 3i| < \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$. Для имплементации выбрано значение $N = 51$; при этом, когда $|z - 3i| < 2$, аппроксимация tai по формуле (14.40) дает порядка 14 значащих цифр. Комплексная карта этой функции представлена в левой части рисунка 14.8. Правая картинка этого рисунка представляет функ-

цию согласия

$$D_5(z) = -\lg \left(\frac{|\ln(\operatorname{tai}(z+1)) - \operatorname{tai}(z)|}{|\ln(\operatorname{tai}(z+1))| + |\operatorname{tai}(z)|} \right) \quad (14.41)$$

Как и на рисунках 14.6 и 14.7, линии уровня для функции согласия проведены с интервалом в два порядка величины; для значений внутри внутреннего контура, наблюдается согласие с четырнадцатью значащими цифрами.

Приближение tai по формуле (14.40) существенно расширяет область, в которой для натуральной тетрации имеется быстрый и аккуратный алгоритм. При положительных значениях $\Im(z)$, тетрация может быть аппроксимирована в виде

$$\operatorname{tet}(z) \approx \operatorname{tai}(z) \quad (14.42)$$

При отрицательных значениях $\Im(z)$, тетрация может быть аппроксимирована в виде

$$\operatorname{tet}(z) \approx \operatorname{tai}(z^*)^* \quad (14.43)$$

Такое представление вполне достаточно для построения рисунка 14.4d, то есть для вычисления с четырнадцатью знаками значений этой функции в поле карты. (Я предполагаю, что передаточное уравнение (14.1) применяется целое число раз с тем, чтобы вещественная часть аргумента не превышала половину.) Однако такое представление не обеспечивает аккуратной аппроксимации при $|\Im(z)| > 5$.

В принципе, для быстрой и аккуратной имплементации тетрации в комплексной плоскости, можно написать аналогичное разложение Тэйлора в точке $5i$ (или даже $6i$); это позволило бы ещё вдвое расширить область аппроксимации, и продолжать в том же духе вдоль мнимой оси. Однако есть более изящное представление, а именно, асимптотическое разложение тетрации при больших значениях мнимой части аргумента. Это представление рассмотрено в следующей секции.

8 Асимптотическое разложение

Аппроксимации функции tet при больших значениях мнимой части

аргумента получается из асимптотического разложения

$$\text{tet}_{\mathcal{A}}(z) = L + \sum_{n,m} \mathcal{A}_{m,n} \exp(Lnz + \alpha mz) \quad (14.44)$$

где $L \approx 0.31813150520476413 + 1.3372357014306895i$ есть стационарная точка логарифма, $L = \ln(L)$, а \mathcal{A} суть постоянные коэффициенты. Подстановка $f = \text{tet}_{\mathcal{A}}$ в передаточное уравнение (14.1) дает цепочку уравнений для коэффициентов \mathcal{A} . Этих уравнений недостаточно, чтобы определить $\mathcal{A}_{m,0}$, так что такое решение всё ещё имеет счетное множество подгоночных параметров для натуральных значений m . Трудность нахождения этих параметров ещё в 20м веке отмечал Хельмут Кнезер (Helmuth Kneser) [10]. Однако даже небольшое количество слагаемых, принятых во внимание в оборванном ряде (14.44), может использоваться для вычисления тетрации в при достаточно больших значениях мнимой части аргумента.

Чтобы получить аккуратное приближение тетрации для области, которая ещё не перекрыта предыдущими аппроксимациями, достаточно учесть всего несколько слагаемых. Пусть

$$\text{fima}(z) = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n + \beta \varepsilon \exp(2\pi i z), \quad (14.45)$$

где малый параметр

$$\varepsilon = \exp(Lz + Lr) \quad (14.46)$$

Подстановка $f(z) = \text{fima}(z) + O(\varepsilon^{N+1})$ дает коэффициенты

$$a_0 = L \approx 0.31813150520 + 1.33723570143i \quad (14.47)$$

$$a_1 = 1 \quad (14.48)$$

$$a_2 = \frac{1/2}{L-1} \approx -0.1513148971 - 0.2967488367i \quad (14.49)$$

$$a_3 = \frac{a_2 + 1/6}{L^2 - 1} = \frac{2 + L}{6(L-1)(L^2-1)} \approx -0.036976 + 0.098730i \quad (14.50)$$

$$a_4 = \frac{6 + 6L + 5L^2 + L^3}{24(L-1)^3(L+1)(L^2+L+1)} \approx 0.02581 - 0.01738i \quad (14.51)$$

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{24 + 36L + 46L^2 + 40L^3 + 24L^4 + 9L^5 + L^6}{120(L-1)^4(L+1)^2(1+L+2L^2+L^3+L^4)} \\ &\approx -0.0079444196 + 0.00057925018i \end{aligned} \quad (14.52)$$

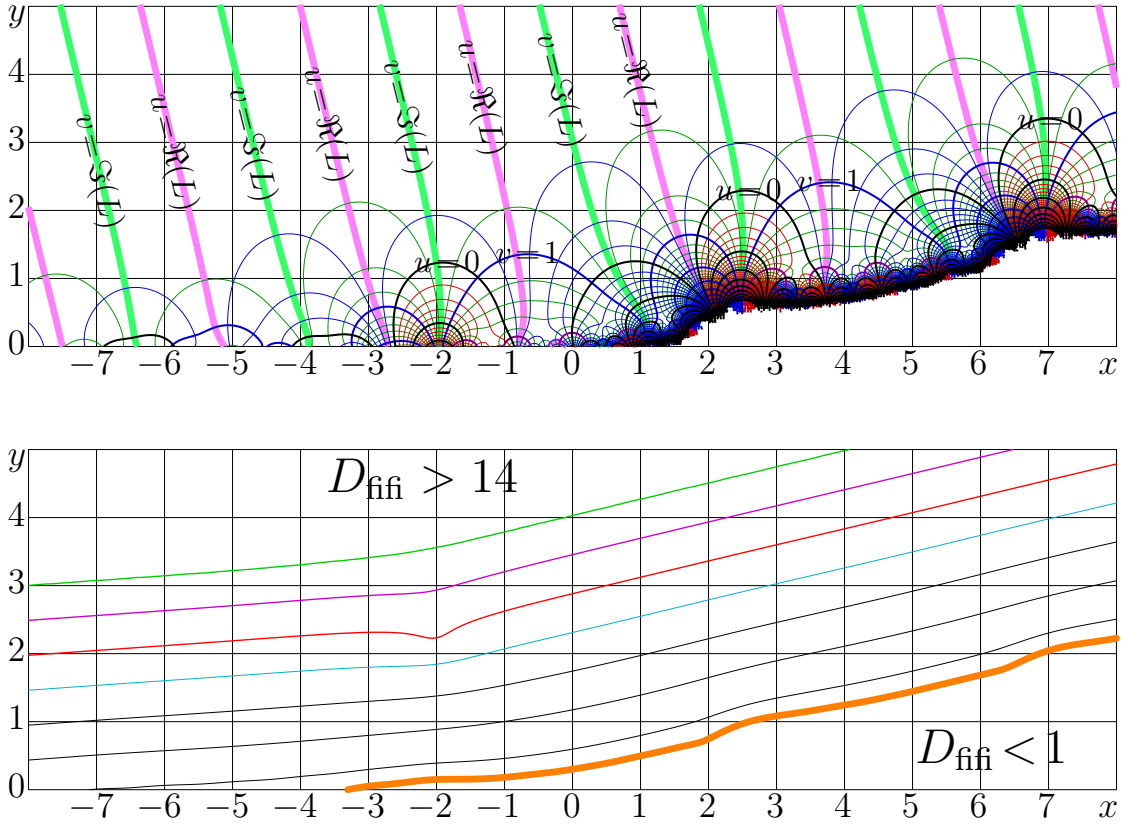


Рис. 14.9: Верхняя карта: $u + iv = \text{fma}(x + iy)$ по формуле (14.45); нижняя карта: согласие D_{ffi} по формуле (14.55)

В принципе, можно учитывать больше слагаемых, но оказывается, уже даже $N = 5$ позволяет, с учетом предыдущих разложений, перекрыть аккуратными аппроксимациями всю комплексную плоскость. При этом R и β в правых частях формул (14.45) и (14.46) остаются “подгоночными” параметрами. Их значения выбираются так, чтобы аппроксимировать тетрацию, вычисляемую чуть более медленным способом через интеграл Коши:

$$r \approx 1.0779614375280 - 0.94654096394782i \quad (14.53)$$

$$\beta \approx 0.12233176 - 0.02366108i \quad (14.54)$$

Комплексная карта функции fma с такими значениями показана на верхней картинке рисунка 14.9; представлена верхняя половина комплексной плоскости. В нижней части, плотность линий столь велика, что картограф всё равно не сумел бы их провести. Для наглядности, на карте добавлены широкие линии уровней $\Re(L)$ и $\Im(L)$.

Пока нет принципиальных ограничений на аккуратность вычисления тетрации через интеграл Коши, этот алгоритм может считаться

точным. Численные расчеты, представленные в этой книге, проведены с переменными “complex double”, и аккуратность вычисления параметра β хуже, чем параметра r . Читатели приглашаются повторить расчеты в переменных “long complex double” и добавить к оценкам для r и β_0 ещё десяток значащих цифр. Эти параметры могут считаться фундаментальными математическими константами.

Для большей аккуратности, количество слагаемых в оборванном разложении (14.44) может быть увеличено, но пока я не могу предложить изящного способа вычисления лидирующих коэффициентов $\mathcal{A}_{m,0}$. Их приходится оценивать из условий $\text{tet}(z^*) = \text{tet}(z)^*$ и $\text{tet}(0) = 1$; то есть использовать значения тетрации вне области аппроксимации этой функции её асимптотическим разложением (14.45). Это обстоятельство отмечается в работе Кнезера [10]; впрочем, там не оцениваются даже первые из этих лидирующих коэффициентов: в прошлом веке ещё не было алгоритма аккуратного вычисления тетрации через интеграл Коши, и у Кнезера не было компьютера, чтобы вычислять константы Кнезера через интеграл Коши. Возможно, в будущем будет предложен более красивый способ вычисления этих констант.

Чтобы показать невязку при подстановке $f = \text{fima}$ в передаточное уравнение (14.1), на рисунке построена карта функции согласия

$$D_{\text{ff}}(z) = -\lg \left(\frac{|\text{fima}(z) - \exp(\text{fima}(z-1))|}{|\text{fima}(z)| + |\exp(\text{fima}(z-1))|} \right) \quad (14.55)$$

Как и на предыдущих картах согласия, линии уровня проведены через два порядка величины, и лишь для уровня $D_{\text{ff}} = 1$ сделано исключение; за этим уровнем, аппроксимация fima даже качественно не воспроизводит поведение натуральной тетрации. В верхней области, над верхней кривой, невязка мала и можно ожидать, что аппроксимация дает по крайней мере 14 значащих цифр, что близко к максимальной аккуратности при использовании переменных complex double.

В окрестности мнимой оси, область применимости аппроксимации fima приближается к точке $3i$. Это дает возможность сравнить аппроксимацию fima с аппроксимацией tai , полученной из разложения Тэйлора в этой точке в предыдущей секции. Такое сравнение рассмотрено в следующей секции.

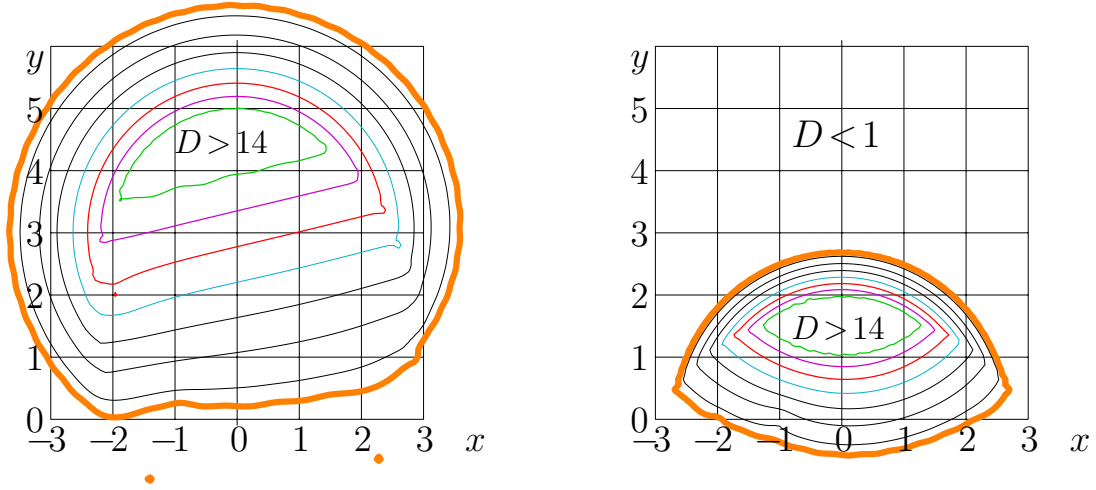


Рис. 14.10: Карта согласия $D = D_6(x+iy)$ по формуле (14.56) и карта согласия $D = D_7(x+iy)$ по формуле (14.57)

9 Сравнение аппроксимаций

На основе представления тетрации через интеграл Коши, были вычислены коэффициенты различных разложений тетрации и её аппроксимации элементарными функциями. Интересно сравнить самосогласованность таких аппроксимаций. В этой секции представлены карты функций согласия, указывающие области, где различные представления тетрации согласуются между собой.

В левой части рисунка 14.10 показана функция согласия между аппроксимацией tai по формуле (14.40) и аппроксимацией fima по формуле (14.45)

$$D_6(z) = -\ln \left(\frac{|\text{tai}(z) - \text{fima}(z)|}{|\text{tai}(z)| + |\text{fima}(z)|} \right) \quad (14.56)$$

В правой части рисунка 14.10 показана функция согласия между аппроксимацией tai (14.40) и аппроксимацией maclo (14.36)

$$D_7(z) = -\ln \left(\frac{|\text{tai}(z) - \text{maclo}(z)|}{|\text{tai}(z)| + |\text{maclo}(z)|} \right) \quad (14.57)$$

Рисунок 14.10 указывает, как выбирать аппроксимацию тетрации в зависимости от мнимой части аргумента при умеренных значениях $|\Re(z)| < 1$. Эту границу следует провести в области, где $D > 14$. Когда $|\Im(z)| \leq 1.5$, пусть используется аппроксимация maclo ; при $1.5 < \Im(z) \leq 4.5$, пусть используется аппроксимация tai , а при ещё больших значениях, пусть используется fima .

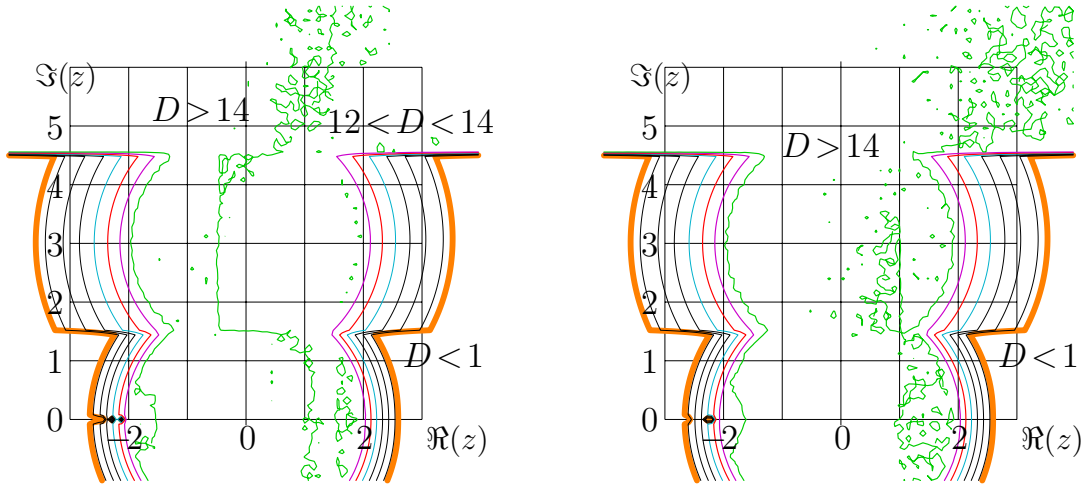


Рис. 14.11: Согласие $D = D_8$ по формуле (14.59), слева; аналогичное согласие для контурного интеграла со сдвинутой на -0.5 базовой областью .

На основе рисунка 14.10, я предлагаю следующую аппроксимацию:

$$\text{fse}(z) = \begin{cases} \text{fima}(z) & , \quad 4.5 < \Im(z) \\ \text{tai}(z) & , \quad 1.5 < \Im(z) \leq 4.5 \\ \text{maclo}(z) & , \quad -1.5 \leq \Im(z) \leq 1.5 \\ \text{tai}(z^*)^* & , \quad -4.5 \leq \Im(z) < -1.5 \\ \text{fima}(z^*)^* & , \quad \Im(z) < -4.5 \end{cases} \quad (14.58)$$

Эту аппроксимацию интересно сравнить с прямой оценкой тетрации через интеграл Коши. В левой части рисунка 14.11 показано согласие

$$D_8(z) = -\lg \left(\frac{|\text{fse}(z) - F_4(z)|}{|\text{fse}(z)| + |F_4(z)|} \right) \quad (14.59)$$

аппроксимации fse с аппроксимацией F_4 тетрации через контурный интеграл.

Рисунок 14.11 выявляет дефекты использованных аппроксимаций. Скачки при $\Im(z) = 1.5$ и при $\Im(z) = 2.5$ вызваны переходом от функции maclo к функции tai и от функции tai к функции fima в комбинации FSE. Скачки при полуцелых значениях $\Re(z)$ вызваны разрывами функции F_4 , которая расширяет начальное приближение, справедливое для $|\Re(z)| < 1$, используя $|\Re(z)| \leq 1/2$ в качестве базового интервала. Ошибки округления приводят к нерегулярной структуре. Внутри полосы $|\Re(z)| < 1.5$, взаимные отклонения этих трех аппроксимаций имеют порядок величины 10^{-14} .

Задача была перекрыть хорошими (быстрыми и аккуратными) аппроксимациями хотя бы полосу $\Re(z) \leq 0.5$; тогда значения во всей комплексной плоскости z могут быть выражены через передаточное уравнение (14.1) в правой части комплексной полуплоскости и через “обращенное” уравнение

$$\ln(\text{tet}(z)) = \text{tet}(z-1) \quad (14.60)$$

Рисунок показывает, что эта цель достигнута; согласие порядка 14 десятичных цифр имеет место в гораздо более широкой области комплексной плоскости. Так сделана “быстрая” аппроксимация тетрации. Эта аппроксимация имеет такую же аккуратность (порядка 14 значащих цифр), как и исходное представление через интеграл Коши; но вычисляется быстрее, чем интеграл Коши.

Когда я заявил, что тетрация считается столь же быстро и столь же аккуратно, как и другие специальные функции, Генрик Траппманн попросил меня сделать ещё один численный тест, а именно, сдвинуть базовую область, в которой вычисляется интеграл Коши. Чтобы вставить мне шпильку, коварный Генрик предложил сдвинуть контурный интеграл вправо, в сторону бóльших значений $\Re(z)$, подальше от логарифмической особенности тетрации в точке -2 . К тому времени, некоторые карты рисунка 14.4 уже были построены; я знал, что такое тетрация, например, от трёх или даже от полутора (см. также рисунок 14.1). Если хорошенько сдвинуть контур вправо, то придется работать с разными листами логарифма. Я посмотрел на рисунки и понял, что есть шанс сесть в лужу, как это делали учителя в советских школах. Они путались в безграмотных “методичках”, дети вставляли им шпильки, потом этим учителям уже неучи в РОНО вставляли длинное перо, а директрисы метали икру, как это показано на рисунке 14.12.



Рис. 14.12: Советская школа

Перспектива оказаться в роли советского учителя (рис. 14.12) мне не улыбалась, поэтому я честно признался, что интеграл Коши - не панацея, и сдвигать контур на несколько единиц вправо отказался. Читатели приглашаются проделать это в качестве поучительного упражнения и поймать момент, когда из-за разреза логарифма формула Коши для вычисления тетрации перестанет работать. Впрочем, я согласился сдвинуть контур интегрирования на $1/2$ влево, и рассчитать *ab initio* значения $\text{tet}(z)$ вдоль вертикальной прямой $\Re(z) = 1/2$. Потом, естественно, с помощью передаточного уравнения и интеграла Коши, вычисление распространяется на всю комплексную плоскость (за исключением луча $z \leq -2$). Относительное отличие значений тетрации, подсчитанное с таким модифицированным алгоритмом, от рассчитанных ранее, оказалось порядка 10^{-14} , как я и ожидал (и в чем хотел удостовериться Генрик). Значения, подсчитанные через такой модифицированный интеграл Коши, подставлены вместо функции F_4 в формулу (14.59), и полученная функция согласия представлена в правой части рисунка 14.11.

Для вычисления параметров для функций, аппроксимирующих тетрацию, требовались коэффициенты разложения Тэйлора. Для них использовались контуры интегрирования с размером, большим единицы, то есть более широким, чем область первичной аппроксимации через интеграл Коши; для вычисления вне области первичной аппроксимации использовано передаточное уравнение. Это обеспечивает определенную стабильность численной процедуры; погрешность приближения оказалась не больше (и, вероятно, даже меньше), чем погрешность исходного приближения. Для расчетов со сдвинутым контуром (см. правую карту на рисунке 14.11), согласие получилось не хуже, а, пожалуй, даже лучше, чем для исходного представления с симметричным расположением контура интегрирования. Это можно объяснить тем, что на карте тетрации (см. рисунок 14.13), вдоль прямой $x = -0.5$ функция изменяется меньше и медленнее, чем вдоль прямой $x = 0$.

Скепсис по поводу выбора контура интегрирования и аналогии с ленивым инженером подтвердились. Изначальный контур интегрирования не оптимален; даже прямоугольный контур можно выбрать лучше (сдвинув его на 0.5 влево). Однако я всё ещё считаю, что простота этого контура оправдывает такой выбор.

После многочисленных тестов описанных выше быстрых аппроксимаций тетрации, была загружена имплементация `fsexp.cin` следующего алгоритма:

$$\text{FSE}(z) = \begin{cases} \text{FIMA}(z) & , \quad 4.5 < \Im(z) \\ \text{TAI}(z) & , \quad 1.5 < \Im(z) \leq 4.5 \\ \text{MACLO}(z) & , \quad -1.5 \leq \Im(z) \leq 1.5 \\ \text{TAI}(z^*)^* & , \quad -4.5 \leq \Im(z) < -1.5 \\ \text{FIMA}(z^*)^* & , \quad \Im(z) < -4.5 \end{cases} \quad (14.61)$$

где

$$\text{FIMA} = \begin{cases} \text{fima}(z) & , \quad \Im(z) > 4 + 0.2379 \Re(z) \\ \exp(\text{FIMA}(z-1)) & , \quad \Im(z) \leq 4 + 0.2379 \Re(z) \end{cases} \quad (14.62)$$

$$\text{TAI} = \begin{cases} \text{tai}(z) & , \quad |\Re(z)| \leq 0.5 \\ \log(\text{TAI}(z+1)) & , \quad \Re(z) < -0.5 \\ \exp(\text{TAI}(z-1)) & , \quad \Re(z) > 0.5 \end{cases} \quad (14.63)$$

$$\text{MACLO} = \begin{cases} \text{tai}(z) & , \quad |\Re(z)| \leq 0.5 \\ \log(\text{MACLO}(z+1)) & , \quad \Re(z) < -0.5 \\ \exp(\text{MACLO}(z-1)) & , \quad \Re(z) > 0.5 \end{cases} \quad (14.64)$$

Эта аппроксимация дает порядка 14ти верных десятичных знаков тетрации `tet` и согласуется с более ранними результатами [44]. Похоже, что эта аппроксимация быстрее и точнее всех аппроксимаций голоморфной тетрации, публиковавшихся до 2010 года.

Большое число слагаемых сохранено в аппроксимациях (14.40) и (14.36) для того, чтобы обеспечить их хорошее перекрытие на рисунках 14.10 и 14.11. При коммерческой имплементации таких алгоритмов, количество слагаемых в аппроксимациях рядов может быть уменьшено без потери точности. В частности, это относится к вычислению тетрации на вещественной оси; достаточно обеспечить хорошую аппроксимацию функции `tet(z)` для $|z| \leq 1/2$, что составляет всего четвертушку от радиуса круга, в котором аппроксимация тетрации функцией `maclo` дает 14 знаков.

Аппроксимации, описанные выше, позволяют быстро строить карты тетрации с высоким разрешением. Одна из таких карт показана на рисунке 14.13. Аккуратность в 14 значащих цифр допускает глубокие зумы такой карты, и, в частности, квази-хаотичного поведения тетрации в окрестности положительной части вещественной

оси, где тетрация растёт очень быстро (и, следовательно, её мнимая часть при отходе от вещественной оси изменяется тоже очень быстро). Читатели приглашаются скачать алгоритм вычисления тетрации `fsexp.cin`, графопостроитель `contour.cin` (с сайта ТОРИ или из Ситизендиума) и построить такие карты по собственному вкусу и усмотрению. Такая карта тетрации использована для обложки этой Книги.

Обратная функция к тетрации является называется арктетрацией. Это абельфункция экспоненты. То есть абельэкспонента. Она рассмотрена в следующей главе.

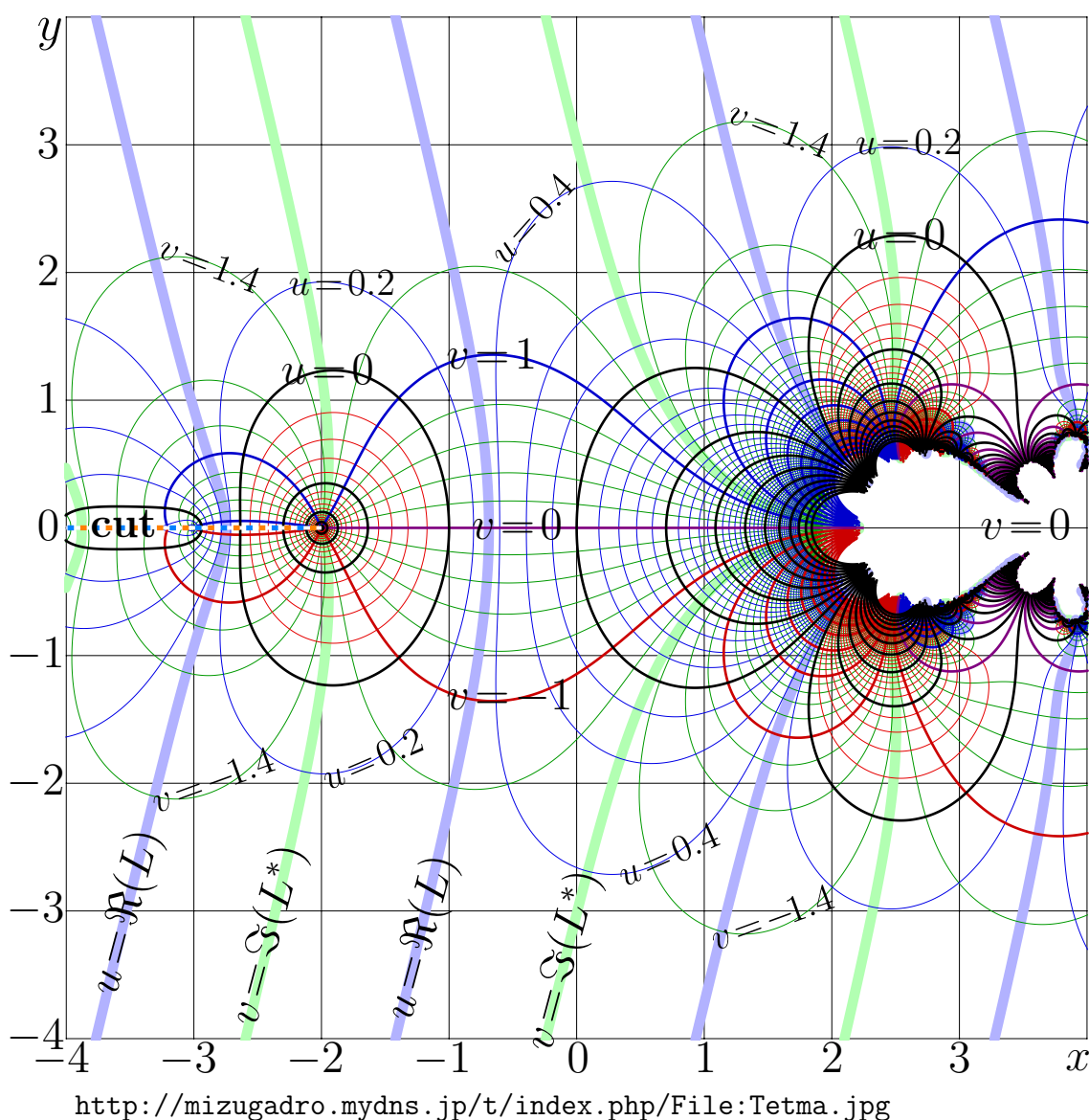


Рис. 14.13: $u+iv = \text{tet}(x+iy)$

Глава 15

Арктетрация

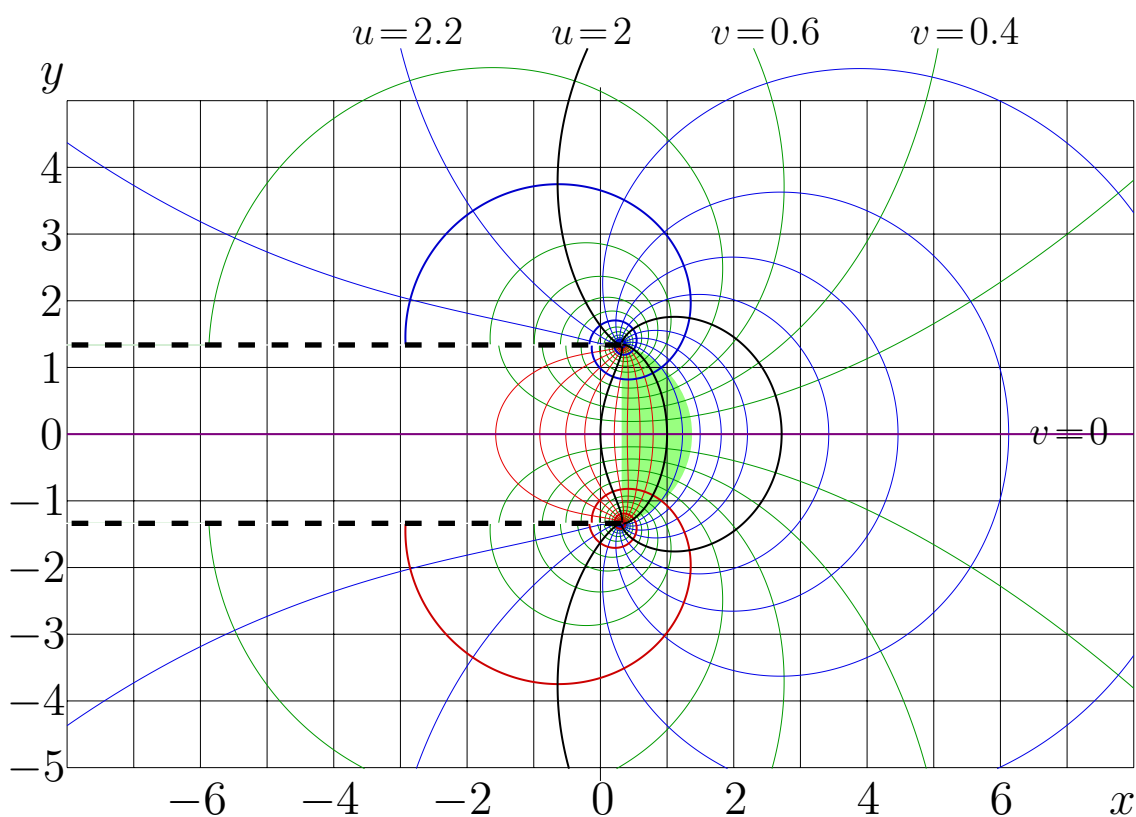


Рис. 15.1: $u+iv = \text{ate}(x+iy)$

Обратная функция к натуральной тетрации обозначается здесь символом ate , так что $\text{ate} = \text{tet}^{-1}$. Комплексная карта арктетрации показана на рисунке 15.1.

Арктетрация удовлетворяет уравнению Абеля

$$\text{ate}(\exp(z)) = \text{ate}(z) + 1 \quad (15.1)$$

и дополнительному условию

$$\text{ate}(1) = 0 \quad (15.2)$$

Свойства этой функции и алгоритм для её аккуратного вычисления рассмотрены в этой главе.

1 Вычисление арктетрации

Арктетрацию можно вычислять, как обратную функцию тетрации, используя метод Ньютона. Как представление тетрации через интеграл Коши, так и её аппроксимации через элементарные функции позволяют выразить tet' . Поэтому $\text{ate}(z)$ можно аппроксимировать как предел последовательности g_n с рекуррентным соотношением

$$g_{n+1} = g_n + \frac{\text{tet}(g_n) - z}{\text{tet}'(g_n)} \quad (15.3)$$

Значительное количество итераций может быть медленным. Кроме того, всё равно встает вопрос о выборе такого начального условия g_0 , при котором линии разреза ровно идут на $-\infty$, параллельно вещественной оси, а не дрыгаются как попало. Такое дрыгание очень даже бывает при использовании метода Ньютона с бестолковым выбором начального элемента последовательности (15.3).

Имеет смысл рассмотреть асимптотические свойства решения уравнения Абеля. Такие свойства можно вывести из асимптотических свойств тетрации. Этот процесс можно механизировать с помощью функции `InverseSeries` софтвера “Mathematica” или её аналогов. Кроме того, асимптотические разложения можно увидеть непосредственно из уравнения Абеля, и сразу потребовать, например, чтобы эта функция имела точки ветвления L и L^* , которые являются по совместительству также и стационарными точками логарифма. Арктетрацию достаточно аппроксимировать, например, в области, обозначенной в виде затененного серпа на рисунке 15.1. Представление для других значений аргумента может быть получено последовательным применением уравнения Абеля (15.1); при этом арктетрация некоторого аргумента выражается через арктетрацию от аргумента из затененной области.

Методом пристального всматривания можно понять, что решение уравнения Абеля (15.1) должно быть сингулярно в стационарных точках логарифма, L и L^* . Зная экспоненциальный доминирующий терм асимптотического разложения тетрации, можно догадаться, что доминирующим термом разложения арктетрации должен быть логарифм. Поэтому естественно строить первое приближение для

абельэкспоненты g , аппроксимируя функцию

$$h(z) = \text{ate}(z) - \frac{\ln(z-L)}{L} - \frac{\ln(z-L^*)}{L^*} \quad (15.4)$$

Функцию h можно разложить в ряд Тэйлора в точке единица. Такое разложение ведет к аппроксимации

$$\text{fsl}(z) = \frac{\ln(z-L)}{L} + \frac{\ln(z-L^*)}{L^*} + \sum_{n=0}^{N-1} u_n (z-1)^n \quad (15.5)$$

$$\text{ate}(z) = \text{fsl}(z) + O(z-1)^N \quad (15.6)$$

Первые тридцать коэффициентов u этого разложения представлены в таблице 15.1.

Таблица 15.1: Коэффициенты u_n в разложении (15.5)

n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	1.41922521550451	10	0.00000003111805	20	0.00000000002293
1	-0.02606629029752	11	0.00000002940887	21	-0.00000000002462
2	0.00173304781808	12	-0.00000001896929	22	0.00000000000666
3	-0.00001952130725	13	0.00000000351784	23	0.00000000000322
4	-0.00006307006450	14	0.00000000204270	24	-0.00000000000354
5	0.00002567895998	15	-0.00000000171995	25	0.00000000000096
6	-0.00000559010027	16	0.00000000039882	26	0.00000000000051
7	-0.00000007279712	17	0.00000000019328	27	-0.00000000000055
8	0.000000065148872	18	-0.00000000019113	28	0.00000000000014
9	-0.00000027698138	19	0.00000000004947	29	0.00000000000009

Комплексная карта аппроксимации fsl по формуле (15.5) при $N=70$ показана в левой части рисунка 15.2 в тех же обозначениях, что и на рисунке 15.1. Центральная часть карты на рисунка 15.2 выглядит как фрагмент карты рисунка 15.1.

Область применимости аппроксимации 15.5 ограничена. Чтобы показать эту область, в центральной и правой части рисунка 15.2 показаны карты функций согласия

$$D_A(z) = -\lg \left(\frac{|\text{fsl}(\exp(z)) - 1 - \text{fsl}(z)|}{|\text{fsl}(\exp(z)) - 1| + |\text{fsl}(z)|} \right) \quad (15.7)$$

$$D_B(z) = -\lg \left(\frac{|\text{fsl}(\ln(z)) + 1 - \text{fsl}(z)|}{|\text{fsl}(\ln(z)) + 1| + |\text{fsl}(z)|} \right) \quad (15.8)$$

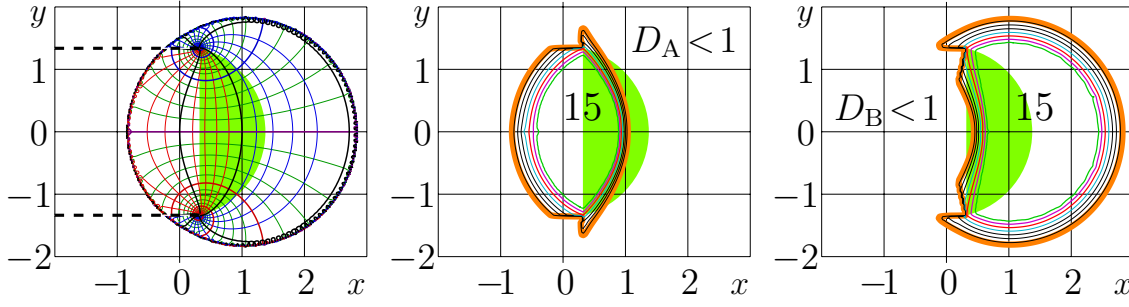


Рис. 15.2: $u+iv = \text{slo}(x+iy)$ по формуле (15.5) при $N = 70$, слева, и согласия $D_A = D_A(x+iy)$, $D_B = D_B(x+iy)$, по формулам (15.7), (15.8)

Внутри внутренних контуров, согласие больше четырнадцати. Эти области отмечены символом 15. Рисунок 15.2 указывает, что при $|z - 1| < 1.4$, аппроксимация $\text{fsl}(z)$ по формуле (15.5) обеспечивает порядка 14 значащих цифр. Аккуратность такого приближения несколько хуже в окрестности точек L и L^* , то есть вблизи сингулярностей, где малое изменение аргумента влечет большое изменение значения, возвращаемого функцией.

На основе приближения fsl , изготовлена численная имплементация функции ate ; уравнение Абеля использовано, чтобы привести аргумент функции в область, заштрихованную на рисунках 15.1 и 15.2. Для численной имплементации FSL, в сумме в формуле (15.5) использовано $N = 128$ слагаемых. Получаемая при этом аккуратность приближается к максимально возможной для арифметики `complex double`. В качестве теста такой имплементации, на рисунке 15.3 представлены результаты численной проверки соотношений

$$\text{ate}(\text{tet}(z)) = z \quad (15.9)$$

$$\text{tet}(\text{ate}(z)) = z \quad (15.10)$$

для “complex double” имплементаций $\text{tet} \approx \text{FSE}$ и $\text{ate} \approx \text{FSL}$. Показаны карты функций согласия

$$D_{\text{at}}(z) = -\ln \left(\frac{|\text{FSL}(\text{FSE}(z)) - z|}{|\text{FSL}(\text{FSE}(z))| + |z|} \right) \quad (15.11)$$

$$D_{\text{ta}}(z) = -\ln \left(\frac{|\text{FSE}(\text{FSL}(z)) - z|}{|\text{FSE}(\text{FSL}(z))| + |z|} \right) \quad (15.12)$$

Как и для многих других обратных функций, область применимости соотношения (15.9) ограничена; ширина полосы, где это соотно-

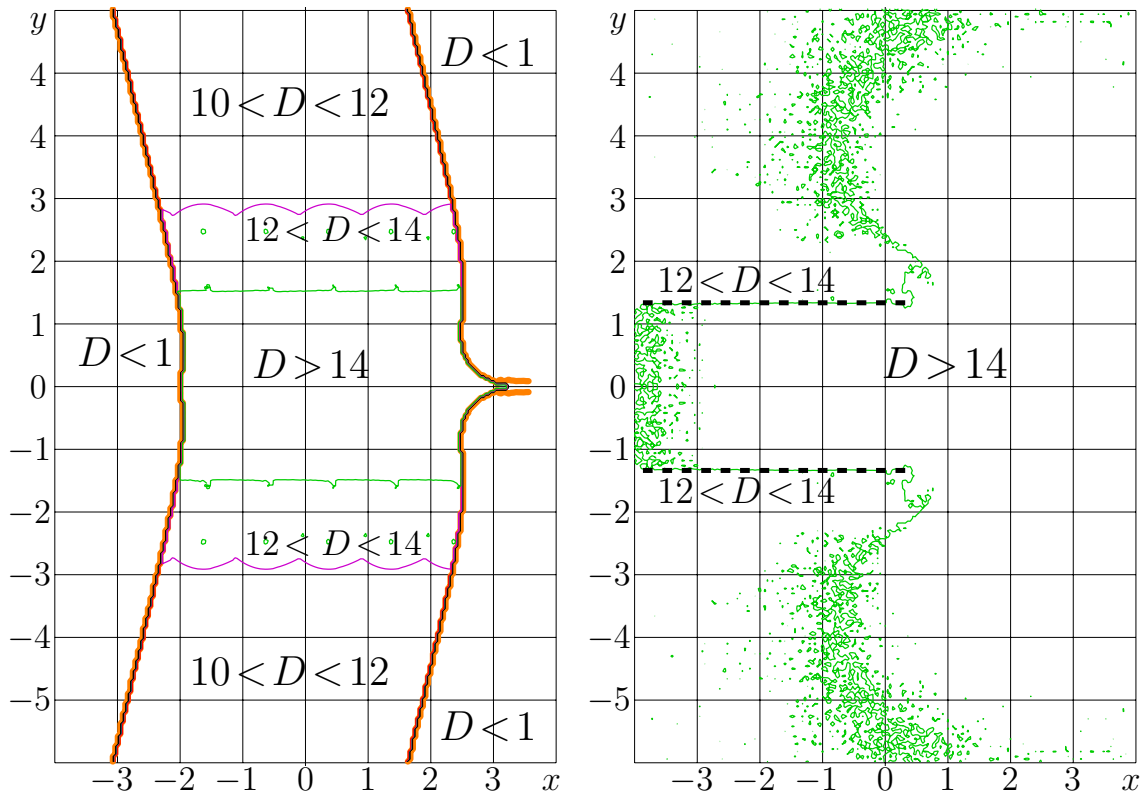


Рис. 15.3: $D = D_{at}(x+iy)$, слева, и $D = D_{ta}(x+iy)$, справа, по формулам (15.11) и (15.12)

шение имеет место, определяется асимптотической периодичностью тетрации в верхней и в нижней частях комплексной плоскости. При этом, вблизи вещественной оси полоса применимости расширяется и имеет “клюв”, который, формально, уходит на плюс бесконечность. Обратное соотношение, то есть (15.10), наоборот, имеет место почти во всей комплексной плоскости.

Численная проверка подтверждает самосогласованность имплементаций тетрации и арктетрации. Для переменных Complex double, при таких имплементациях получается порядка 14 значащих цифр.

2 О названиях

Имплементации тетрации и арктетрации загружены в ТОРИ,

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Fsexp.cin> и

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Fslog.cin>

Названия этих имплементаций обсуждаются в этой секции.

Имена функций FSEXP и FSLOG исторические. Ещё несколько лет

назад некоторые авторы (и, к сожалению, даже я) называли тетрацию термином “superexponential”, хотя тетрация является лишь специальным случаем суперэкспоненты, со специфическим асимптотическим поведением на $\pm i\infty$, и дополнительными условиями. Генрик Траппманн даже хотел к названию функции добавить мое имя; он до последнего момента [63] ждал, что “моя тетрация” [44] окажется не единственной, не настоящей, и тогда имя “tet” можно будет использовать для “настоящей” натуральной тетрации.

После нудной дедукции [63], Генрика удалось убедить, что “моя тетрация” есть самая настоящая и самая натуральная ¹. Другие (менее натуральные) суперэкспоненты по натуральному основанию можно по мере надобности получать преобразованием (2.12).

Для того, чтобы использовать это имя функции, tet, и для других значений основания b , в последующих главах основание указывается в виде правого нижнего индекса; тетрация по основанию b то есть суперфункция от $\exp_b = \{z \mapsto b^z\}$, экспоненты по основанию b , будет записываться в виде tet_b , по аналогии с \exp_b и \log_b .

Имплементация тетрации tet называется FSEXP, аббревиатура от “Fast Super EXPonential”, а имплементация арктетрации ate называ-

¹Слово “натуральный” здесь играет как минимум двумя из своих возможных значений, указывая одновременно на подлинность этой функции и на то, что она по основанию $e \approx 2.71$. Надеюсь, что термин “натуральная тетрация” не вызовет путаницы, какую вызвали во время СССР “натуральные расписки”. Такие расписки организаторы финансовой пирамиды выдавали вкладчикам. Следователи, прокуроры, судьи и народные заседатели думали, что это юридический термин, использовали его, но не хотели демонстрировать своё невежество и никого не спрашивали о значении этого термина. Потом адвокат всё-таки спросила потерпевшего, что он имеет в виду, употребляя этот термин. После серии вопросов удалось выяснить, что так в криминальной среде называется нотариально заверенный документ, удостоверяющий, что деньги за автомобиль, который жулики обещали потерпевшим, уже получены. Дело чуть не лопнуло из-за того, что первый эшелон вкладчиков пирамиды составили работники прокуратуры, а второй - работники милиции, и участники первых слоев пирамиды обещанные им машины получили, и не хотели с ними расставаться, а захлебываться пирамида начала только после того, как тысячи “натуральных расписок” были проданы безграмотным шахтерам. Организаторы не признавали себя виновными и настаивали на том, что если бы им позволили и дальше торговать “натуральными расписками” на заводах, распространяя их среди рабочих (а потом - в колхозах, продавая “натуральные расписки” крестьянам), то шахтеры тоже получили бы обещанные автомобили. Впрочем, к чести советских судей, в конце концов махинация с “натуральными расписками” была квалифицирована как натуральное жульничество, мошенничество, и организаторам пришлось “натурально” садиться в тюрьму или откупаться, уж как у кого получилось. Это вот такое длинное получилось объяснение термина “натуральный”.

ется FSLOG, что есть аббревиатура от “Fast Super Logarithm”. Эти имена неудачные, хотя и уже исторические. Сейчас имена FSEXP и FSLOG уже встроены во многие программы, в том числе и на нескольких “виках”. Я опасаясь создать путаницу и пока не берусь их переименовывать. Потому как лучше одна плохая система обозначений, чем две “хороших”.

Следует отметить, что имя FSLOG (Fast Super Logarithm) ещё более идиотское, чем FSEXP, так как оно создает впечатление, что это суперфункция от логарифма, что далеко не так. Суперфункцией от логарифма является $z \mapsto \text{tet}(-z)$, а вовсе не “суперлогарифм”. Впрочем, я надеюсь, что можно сделать ещё более быстрые имплементации этих функций, и назвать эти имплементации теми же именами, что и сами функции, то есть `tet` и `ate`.

Я далек от евгенических идей рафинировать как человеческую породу, так и систему обозначений, и поэтому до сих пор пользуюсь рутинами, обозначенными идентификаторами FSEXP и FSLOG. Это позволяет, например, ставить вопрос о том, насколько приближенное значение, выдаваемое рутиной, отличается от точного. Когда функции `tet` и `ate` будут встроены в алгоритмические языки, то будет легко обозначать разницу между значениями функций, оцененных с помощью имплементаций `tet` и FSEXP; то же относится и к имплементациям арктетрации, FSLOG и `ate`.

Разобравшись с терминологией, можно использовать построенные выше инструменты, “туллы” (tools) для того, чтобы итерировать натуральную экспоненту. Этому посвящена следующая секция.

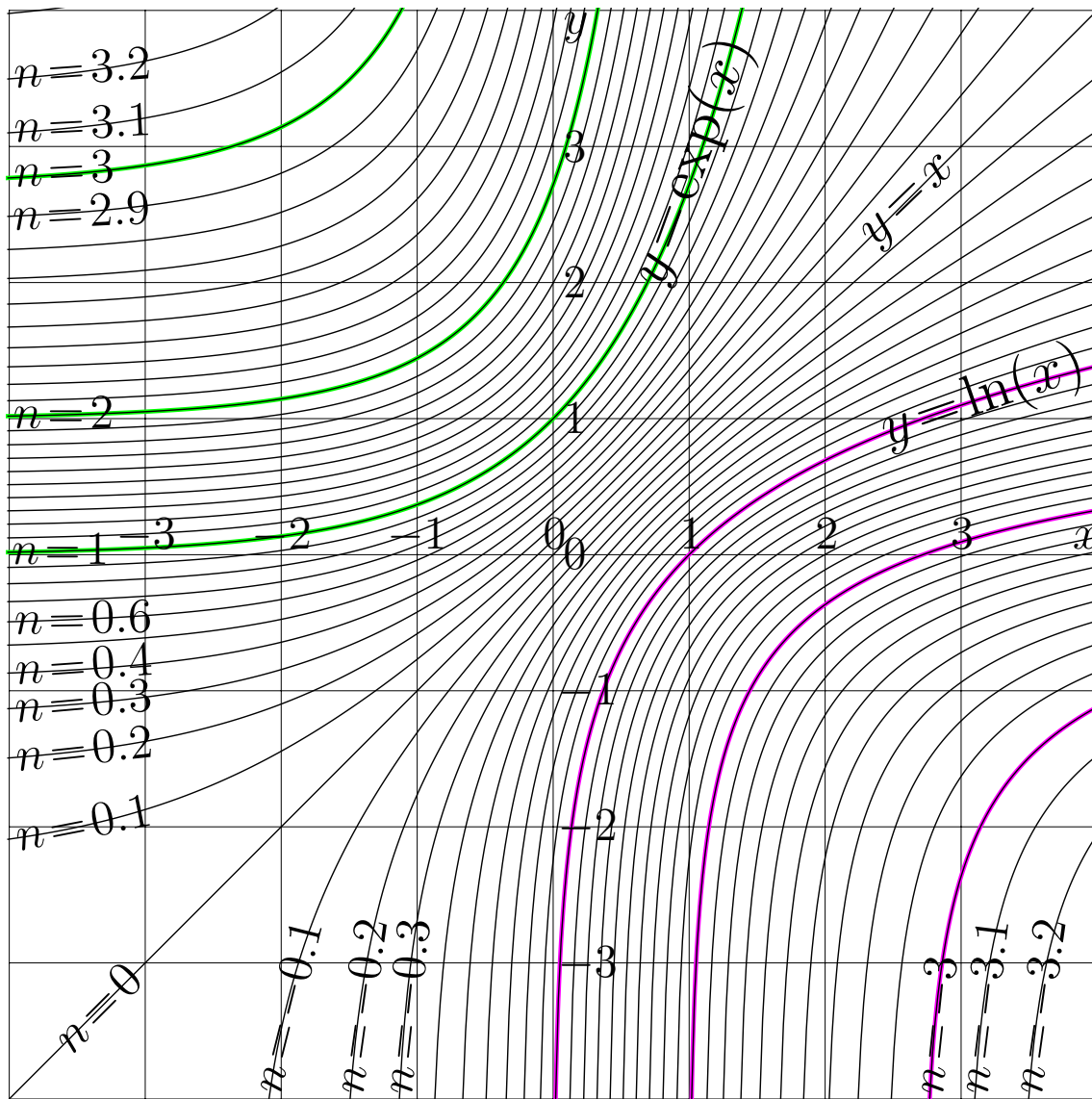
3 Итерации Экспоненты

Тетрация и арктетрация, как суперфункция от экспоненты и её абель-функция, позволяют определить нецелые итерации экспоненты

$$\exp^n(z) = \text{tet}(n + \text{ate}(z)) \quad (15.13)$$

Число n итераций не имеет надобности быть целым (хотя по прихоти Читателя может оказаться и целым).

Для вещественных значений аргумента, итерации по формуле (15.13) показаны на рисунке 15.4, $y = \exp^n(x)$. Случаи целых значений n



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:ExpIte4T.jpg>

Рис. 15.4: $y = \exp^n(x)$ по формуле (15.13) для различных n

(кроме $n = 0$) выделены толстыми линиями. Эти линии соответствуют $y = \exp(\exp(\exp(x)))$, $y = \exp(\exp(x))$, $y = \exp(x)$, $y = \ln(x)$, $y = \ln(\ln(x))$, $y = \ln(\ln(\ln(x)))$.

Карты различных итераций экспоненты показаны на рисунке 15.5. Дюжина изображений представляет

$$u + iv = \exp^n(x + iy) \quad (15.14)$$

линиями $u = \text{const}$ и линиями $v = \text{const}$ в плоскости x, y для различных значений номера итерации n ; это значение напечатано крупным фонтом в левом верхнем углу каждой карты. Карты симметричны верх-низ (при отражении от вещественной оси, лишь мнимая часть значения функции меняет знак), поэтому представлены лишь верхние половинки карт, выше вещественной оси.

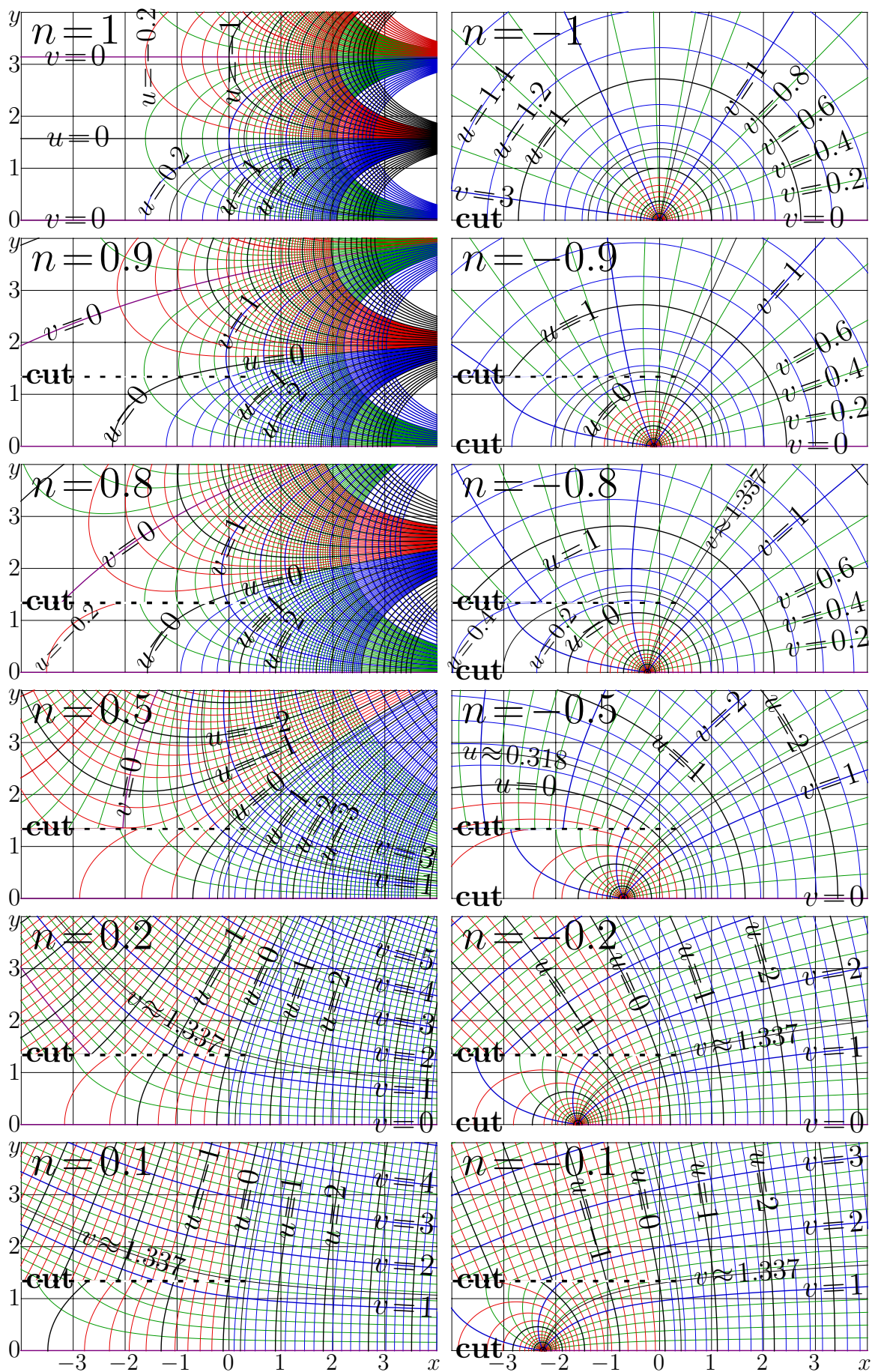


Рис. 15.5: $u+iv = \exp^n(x+iy)$ по формуле (15.14) для различных n

В верхней части рисунка 15.5, карты соответствуют $n = 1$ и $n = -1$; это карты экспоненты и логарифма. Карта экспоненты - это просто кусок карты рисунка 14.2. Экспонента голоморфна во всей комплексной плоскости. Однако логарифм имеет в нуле особую точку и разрез. Этот разрез на рисунке 15.5 обозначен символом **cut**.

Остальные строчки рисунка 15.5 показывают нецелые итерации. Эти итерации имеют дополнительные разрезы вдоль линий $y = \pm \Im(L)$. Здесь $L \approx 0.31813150520476413 + 1.3372357014306895i$ есть стационарная точка логарифма, решение уравнения $L = \ln(L)$.

Толстые линии на рисунке 15.5 соответствуют целым значениям u или v . Тонкие линии проведены с интервалом 0.2; кроме того, добавлены тонкие линии $u = \Re(L)$ и $v = \pm \Im(L)$. Эти линии пересекаются в точке, соответствующей значению L .

Рисунок 15.5 показывает плавный (голоморфный) переход от экспоненты (левая верхняя карта) к логарифму (правая верхняя карта). По мере того, как номер итерации n постепенно уменьшается от единицы до нуля, сетка, образованная линиями $u = \text{const}$ и линиями $v = \text{const}$ поворачивается вокруг стационарной точки L , и становится однородной прямоугольной штриховкой при $n = 0$. При этом значении, разрезы вдоль линий $\pm \Im(L)$ исчезают, но они появляются вновь при дальнейшем уменьшении n , как только n становится меньше нуля. Кроме того, ещё одна точка ветвления приходит с минус бесконечности и перемещается вдоль вещественной оси, приходя в ноль, когда n принимает значение минус единица. При таком целом значении комплексные точки ветвления L и L^* исчезают.

Карты для нецелых итераций, подобные показанным на рисунке 15.5, можно строить и для других голоморфных функций, достаточно декларировать нужную функцию “передаточной функцией” и сделать для неё суперфункцию и абельфункцию.

В частности, можно строить карты и нецелых итераций функций, рассмотренных в этой Книге. Читатели приглашаются скачать имплементации соответствующих суперфункций и абельфункций. Для построения комплексных карт можно использовать графопостроитель `conto.cin`, доступный на многих виках.

4 Уроки натуральной тетрации

На основе представления тетрации через интеграл Коши, как решения интегрального уравнения (14.22), можно выразить также и производные этой функции; дифференцирование подинтегральных выражений в правой части (14.22) не вызывает затруднений. Именно так вычислены производные тетрации для чисто вещественных и чисто мнимых значений аргумента в таблицах 1 и 2 работы [44]. Однако, для численного поиска возможных внутренних противоречий упомянутой конъекции о существовании и единственности, было желательно изготовить ещё более аккуратные и эффективные представления для функции и её производных, которые бы позволяли вычислять тетрацию столь же быстро, как в современных алгоритмических языках вычисляются специальные функции. Фактически, цель была придать тетрации статус специальной функции. Детали такого представления описаны во Владикавказском Математическом Журнале [52]. После российского вторжения в Украину в 2014 году, российские научные журналы, и, в частности, Владикавказский журнал, навряд ли кто станет читать. Поэтому в этой Книге собраны основные формулы, использованные для такого представления, и графики для этих представлений. С такими представлениями, суперфункциями и, в частности, тетрацией, можно пользоваться и не читая оригинальные статьи.

Комплексная карта тетрации tet представлена на рисунке 14.13, а её поведение вдоль вещественной оси показано на рисунке 14.1. Свойства (14.16)-(14.20) были сперва наблюдаемы у различных аппроксимаций тетрации с помощью элементарных функций, а потом постулированы. При аппроксимации, воспроизводилось поведение тетрации вблизи целых значениях аргумента, то есть

$$\text{tet}(-2 + \varepsilon) = \log(\varepsilon) + \text{const} + O(\varepsilon) \quad (15.15)$$

$$\text{tet}(-1) = 0 \quad (15.16)$$

$$\text{tet}(0) = 1 \quad (15.17)$$

$$\text{tet}(1) = e \quad (15.18)$$

$$\text{tet}(2) = e^2 \quad (15.19)$$

Минимизировалась невязка при подстановке фитирующей функции

в передаточное уравнение (14.1) для комплексных значений аргумента. Когда алгоритм вычисления натуральной тетрации через интеграл Коши уже известен [44], и предложены эффективные аппроксимации через элементарные функции [52], примитивная аппроксимация fit_2 по формуле (14.11) может вызвать улыбку, но такое эвристическое фитирование отвечает на вопрос, который мне задавали коллеги: “*How did you guess?*”. (Как ты догадался?).

После того, как свойства, похожие на (14.16)-(14.20), были обнаружены у нескольких различных фитирующих функций, эти свойства были сформулированы как определение тетрации, то есть попросту постулированы. Целью таких постулатов было доказательство несуществования тетрации. Такое доказательство было бы интересно найти, так как доказательство, предложенное Хошмандом (М. Hooshmand) [39], опирается на сомнительное допущение (постулат) о монотонности производной от тетрации.

Я искал внутренние противоречия допущения, что голоморфная тетрация, обладающая перечисленными выше свойствами, существует. При этом многие свойства натуральной тетрации были выявлены, и был изготовлен алгоритм, позволяющий быстро вычислять её с 14 значащими цифрами [52]; но несуществование доказать не удалось. Провалились также попытки построить иную функцию, удовлетворяющую определению выше. Тогда существование и единственность такой функции пришлось оформить как конжекцию [44].

Имеются определенные успехи в доказательстве единственности соответствующей функции Абеля [63], но простое и четкое доказательство существования и единственности тетрации ещё предстоит выработать. Здесь такое доказательство не представлено. В соответствии с целью, сформулированной во Введении, здесь свойства тетрации скорее объясняются, чем доказываются.

Тетрация и арктетрация расширяют арсенал функций, доступных для научных исследований. В частности, нецелые итерации могут расти быстрее любого полинома, но медленнее любой экспоненты. Такое свойство может быть полезно при автоматическом фитировании, когда заранее не известно, похожа ли аппроксимируемая функция на экспоненту или логарифм; представление дает

непрерывное многообразие промежуточных функций, включая случай тождественной функции (ни одной итерации экспоненты). Это же относится и к итерациям многих других специальных функций.

5 Ещё апология

В любой деятельности, время от времени человеку требуется подтверждение, верификация того, что то, что он делает - важно и нужно. Чтение и написание Книги не являются исключениями. (Иначе получается “И запоминайте заранее то, что вы поймете потом” ²). Такая промежуточная верификация, апология представлена в этой секции. Фактически это заключение по главе о натуральной тетрации.

Следуя Аксимам ТОРИ, я ставлю преимущественно практические задачи. С точки зрения практики, важно не само доказательство, а уверенность в том (надежда на то), что заявленные свойства, допущения, аксиомы не приведут к противоречиям, и предлагаемые построения не вывалятся из категории “Наука” по первой же Аксиме ТОРИ, получив пустое множество в качестве области применения. Попытки опровергнуть конжекции, сформулированные в этой главе, могут рассматриваться как сильное указание, что в течение длительного времени (ну, скажем, большого по сравнению с длительностью человеческой жизни) такие конжекции не будут опровергнуты.

В качестве оправдания укажу, что даже уважаемые школьные учителя математики постулируют аксиомы Эвклида, вместо того, чтобы вывести, доказать их на основе свойств координатной плоскости. (И иногда при этом садятся в лужу, как это показано на рисунке 14.12.) Таким образом, Читатели, любящие доказательства, могут начать с вывода аксиом Эвклида. Это нетрудно сделать, хотя сперва придется аккуратно определить функции \sin и \cos , координатную плоскость, теорему Пифагора, а из неё - всё остальное, включая теоремы о параллельных прямых, о “равенстве” треугольников и всё такое прочее.

Обычно, для научного исследования, какие-то постулаты всё-таки

²<http://geo.web.ru/bards/Kim/part59.htm> Пепши Длинный Чулок. Песня Томми и Анники.

принимать приходится, хотя чистые математики могут счесть их недостаточно обоснованными, см. рисунок 15.6. Чтобы помочь опровергать мои результаты, я загружаю генераторы рисунков Книги в категории

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Category:BookPlot>

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Category:BookMap>

Увидев, как естественно и натурально получается натуральная тетрация, я построил похожие карты и для других оснований b , в частности, для $b = 10$, $b = 2$ и $b = 1.5$, но ничего особенно нового, чего трудно было бы предположить, поиграв с натуральной тетрацией, не обнаружил. Однако Генрик Траппманн попросил меня уменьшить основание b ещё чуток, до $b = \sqrt{2}$, и спросил, могу ли я вычислять таким же интегралом Коши, тетрацию по основанию $b = \sqrt{2}$. Я подумал и сказал, что таким же методом не могу. Генрик стал смеяться, но я заявил, что если он так любит корень из двух, то я сделаю тетрацию и по основанию $b = \sqrt{2}$ тоже. И сделал [50]. Основа использованного для этого формализма, то есть регулярная итерация, описана в главе 8. Применение этого формализма именно для тетрации по основанию $\sqrt{2}$ описано в следующей главе.



Рис. 15.6: Два математика едут на конференцию по суперфункциям и обсуждают чёрную овцу, которую они увидели из окна поезда: *Ваше допущение, уважаемый коллега, представляется мне не только не очевидным, но и совершенно не обоснованным. Всё, что мы можем заключить из этого наблюдения - что в этой стране существует по крайней мере одна овца или по крайней мере один барашек, и что по крайней мере правая сторона этого существа - черная.*

Глава 16

Тетрация по основанию $b = \sqrt{2}$

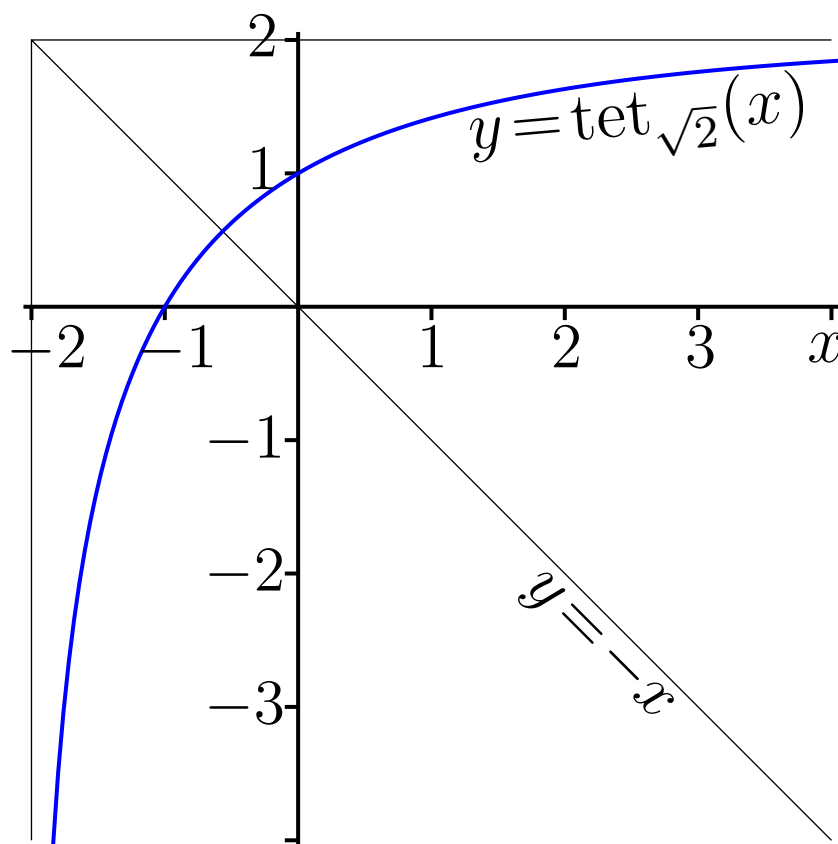


Рис. 16.1: $y = \text{tet}_{\sqrt{2}}(x)$

В главе 13 определена и вычислена натуральная тетрация. То есть тетрация по основанию $b = e \approx 2.71$. Для того, чтобы говорить о тетрации по иным основаниям, определение тетрации надо обобщить. Такое обобщение предлагается в этой главе. Следуя принципу “от простого - к сложному”, здесь используется специфическое значение основания $b = \sqrt{2}$. Для этого значения, график тетрации показан на рисунке 16.1. Именно для этого значения основания, график тетрации выглядит красиво и симметрично. Ниже я показываю, что это впечатление обманчиво и эта симметрия лишь приближенная.

1 Определение

Тетрацией по вещественному основанию $b > 1$ называется функция $f = \text{tet}_b$, обладающая следующими свойствами:

$$f(z+1) = b^{f(z)} \quad (16.1)$$

по крайней мере для значений $\Re(z) > -2$; функция f ограничена по крайней мере в полосе $|\Im(z)| \leq 1$; кроме того, подразумевается, вещественная голоморфность такой тетрации и специфическое (общее для всех оснований b) значение в нуле:

$$f(z^*) = f(z)^* \quad (16.2)$$

$$f(0) = 1 \quad (16.3)$$

Уравнение (16.1) имеет форму передаточного уравнения. При этом $T = \exp_b$ выступает в роли передаточной функции. Читатели приглашаются проследить, что натуральная тетрация $\text{tet} = \text{tet}_e$, рассмотренная в главе 14, под такое определение тоже попадает. В других главах рассмотрена тетрация по другим разным основаниям. Но в этой главе в качестве примера рассмотрен случай $b = \sqrt{2}$. Экспонента именно по этому основанию показана на рисунках 9.1 и 9.2. Именно для этого основания в главе 9 построена растущая суперэкспонента $\text{SuExp}_{\sqrt{2},u}$, её график показан на рисунке 9.4.

Теперь для этого же основания $b = \sqrt{2}$ строится другая суперэкспонента, тетрация. График тетрации на рисунке 16.1 существенно отличается от графика растущей суперэкспоненты $F = \text{SuExp}_{\sqrt{2},z}$, показанного на рисунке 9.4.

2 Пусть $b = \sqrt{2}$

В качестве примера вычисления тетрации tet_b для $1 < b < \exp(1/e)$, в этой главе рассмотрен случай $b = \sqrt{2}$. График такой функции показан на рисунке 16.1. Описанное ниже построение аналогично построению растущей суперэкспоненты по такому же основанию, представленному в главе 9. Многие формулы и рисунки этой секции взяты из публикации [50].

Стационарные точки экспоненты по основанию $b = \sqrt{2}$ рассмотрены в Главе 9, см. рис. 9.1. В той главе суперэкспонента $F_5 = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ построена на стационарной точке $L = 4$. Вдоль вещественной оси, такая суперэкспонента монотонно и неограниченно растет от четырех до бесконечности. Для той суперэкспоненты, уравнение $F_5(z) = 1$ не имеет вещественных решений, и она не является тетрацией. Для того, чтобы построить тетрацию по такому основанию, следует использовать стационарную точку $L = 2$. Соответствующая суперфункция Φ раскладывается так:

$$f(z) = 2 + \varepsilon + \sum_{m=2}^{M-1} v_m \varepsilon^m \quad (16.4)$$

$$\Phi(z) = f(z) + O(\varepsilon^n) \quad (16.5)$$

где

$$\varepsilon = \exp(kz) \quad (16.6)$$

а инкремент k и коэффициенты v являются константами. Подстановка асимптотического разложения $F = \Phi$ в передаточное уравнение

$$F(z+1) = \exp\left(\ln\left(\sqrt{2}\right) F(z)\right) \quad (16.7)$$

дает соотношение для инкремента k

$$k = \ln(\ln(2)) \approx -0.3665129205816643 \quad (16.8)$$

и цепочку уравнений для коэффициентов v ; в частности,

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\ln(2)/4}{\ln(2)-1} \approx -0.56472283831773236365 \\ v_3 &= \frac{\ln(2)^2(2+\ln(2))/24}{(\ln(2)-1)(\ln(2)^2-1)} \approx 0.33817758685118329988 \end{aligned} \quad (16.9)$$

Значения коэффициентов v предлагаются в таблице 16.1.

При фиксированном числе M термов в правой части уравнения (16.4), функция f может рассматриваться как аппроксимация суперфункции экспоненты со специфической асимптотикой, а именно, которая, возрастая, стремится к стационарной точке 2. Такая суперфункция может быть определена как предел

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(f(z+n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_b^n(f(z+n)) \quad (16.10)$$

Ввиду того, что f является асимптотическим решением предаточного уравнения (16.7) и его “эквивалента”

$$F(z) = \log_b(F(z+1)) \quad (16.11)$$

функция F по формуле (16.10) не зависит от числа M слагаемых в правой части уравнения (16.4). Но при больших M , предел в правой части уравнения (16.10) сходится быстрее.

Для того, чтобы выполнить условие (16.3), тетрацию по основанию $b = \sqrt{2}$, то есть $f = \text{tet}_{\sqrt{2}}$ можно определить так:

$$\text{tet}_{\sqrt{2}}(z) = F(x_1 + z) \quad (16.12)$$

где $x_1 \approx 1.25155147882219$ есть решение уравнения $F(x_1) = 1$. Читатели приглашаются проверить, что такая тетрация удовлетворяет требованиям, сформулированным в начале главы. Для вещественных значений аргумента, график этой тетрации показан на рисунке 16.1. Комплексная карта тетрации по основанию $b = \sqrt{2}$ представлена на рисунке 16.2.

Тетрация, построенная по формуле обладает следующими свойствами. Функция периодична, её период P чисто мнимый,

$$P = P(\text{tet}_{\sqrt{2}}) = -\frac{2\pi i}{\ln^2(2)} = -\frac{2\pi i}{\ln(\ln(2))} \approx 17.14314817935485 i \quad (16.13)$$

Напоминаю, что дважды логарифм $\ln^2(2) = \ln(\ln(2))$, но никак не $\ln(2)^2$, в соответствии с декларированными обозначениями ¹.

Как и было заявлено, тетрация $\text{tet}_{\sqrt{2}}(z)$ голоморфна в полосе $|\Re(z)| \leq 1$. Область голоморфизма даже существенно шире этой полосы. Тетрация голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением счетного множества точек ветвления и соответствующих разрезов

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 2, \Im(z) = n\Im(P), n \in \mathbb{N}\} \quad (16.14)$$

¹Как уже отмечалось, операции взятия логарифма и “верхний индекс 2” не коммутируют, примерно так же, как не коммутируют координата и импульс в Квантовой Механике или как оператор “царская” не коммутирует с глаголом “to vodka”. Если Читатель хоть раз употреблял водку царскую и выжил, то, вероятно, этот читатель сумел отличить её от “царской водки”, и, таким образом, имеет некоторое представление о некоммутирующих операторах.

Таблица 16.1: Коэффициенты v и V в разложениях (16.4), (16.18)

n	v_n	V_n
1	1.0000000000000000	1.0000000000000000
2	-0.5647228383177324	0.5647228383177324
3	0.3381775868511833	0.2996461813840881
4	-0.2103313021386278	0.1559323904892543
5	0.1344548790521098	0.0803518797481544
6	-0.0877843886012191	0.0411584960662439
7	0.0582880930830947	0.0209985209544120
8	-0.0392407117837278	0.0106825803202636
9	0.0267232860342981	0.0054228810223159
10	-0.0183765205976376	0.0027482526618683
11	0.0127420898467766	0.0013909151872678
12	-0.0088986329515697	0.0007031815862125
13	0.0062531995639749	0.0003551700677648
14	-0.0044181328624397	0.0001792537427482
15	0.0031365295362696	0.0000904088765718
16	-0.0022361213774487	0.0000455725430285
17	0.0016001999145218	0.0000229602263218
18	-0.0011489818761273	0.0000115627707503
19	0.0008274921384317	0.0000058201696570
20	-0.0005975832172069	0.0000029289688393

Вне этих разрезов, тетрация стремится к стационарным точкам логарифма, к двум или к четырем, при увеличении или при уменьшении вещественной части аргумента. Для вещественных y ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{tet}_{\sqrt{2}}(x+iy) = 2 \quad (16.15)$$

и для $y \neq \Im(T)n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{tet}_{\sqrt{2}}(x+iy) = 4 \quad (16.16)$$

Для вещественных значений аргумента, $\text{tet}_{\sqrt{2}}(x)$ определена при $x > -2$. В точке -2 , функция имеет логарифмическую особенность, как и тетрации по другим основаниям. При бóльших значениях аргумента, функция растёт от минус бесконечности, проходит, как и тетрации по другим основаниям, через точки $(-1, 0)$ и $(0, 1)$, и дальше растёт, приближаясь к своему предельному значению 2 на $+\infty$.

Есть несколько причин, по которым основание $b = \sqrt{2}$ особенно интересно. Именно при таком основании обе стационарные точки логарифма,

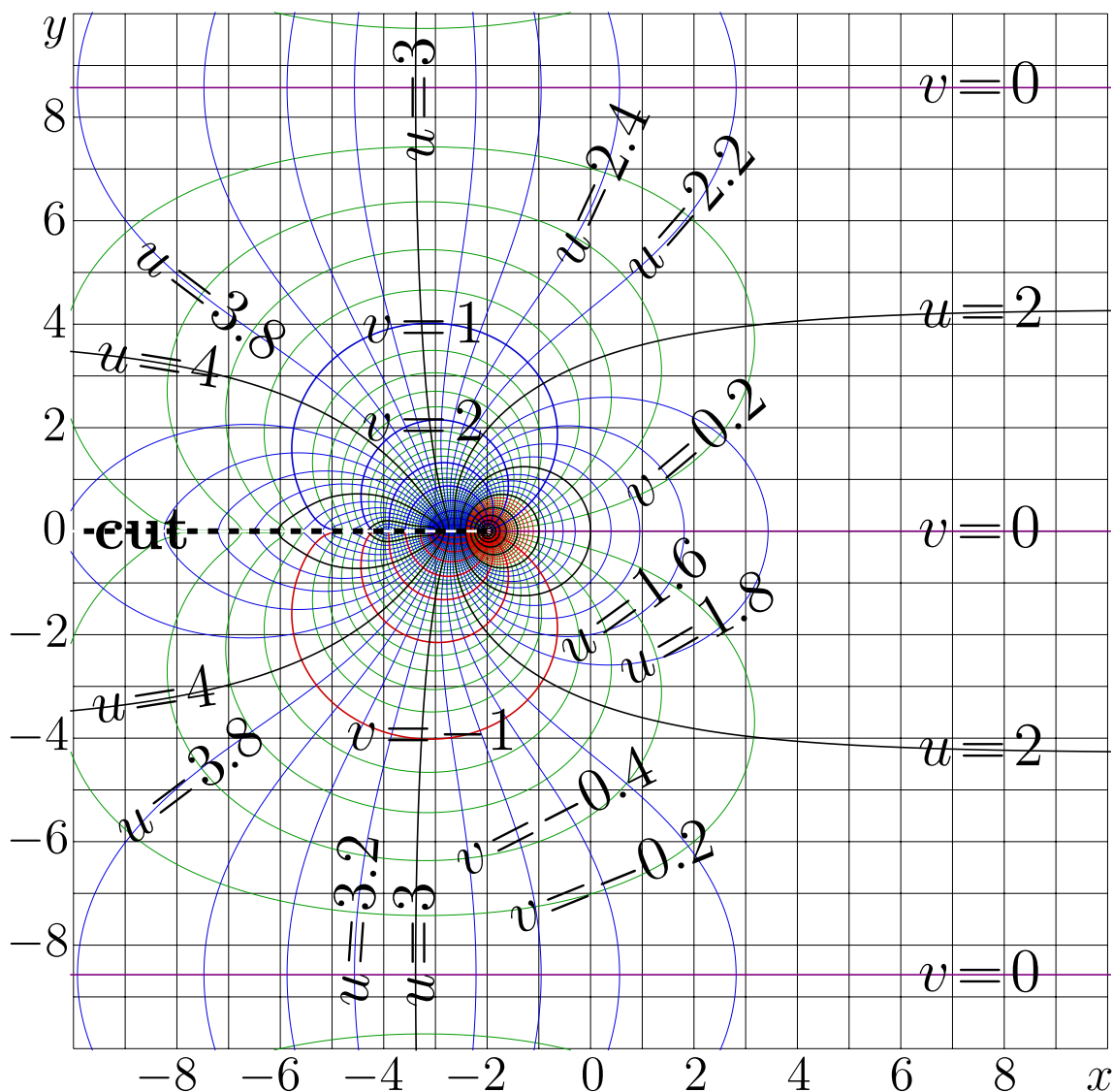


Рис. 16.2: $u+iv = \text{tet}_{\sqrt{2}}(x+iy)$

рифма выражаются целыми числами. Кроме того, именно при таком основании, график функции на рисунке 16.1 кажется симметричным относительно отражения $x \leftrightarrow -y$. Чтобы подчеркнуть такую иллюзию, на рисунке 16.1 проведена дополнительная прямая $y = -x$. Эта иллюзия будет более подробно обсуждаться ниже, так как для её анализа нужна обратная функция, то есть арктетрация. Комплексная карта арктетрации по основанию $b = \sqrt{2}$ показана на рисунке 16.3. Её построение описано в следующей секции.

3 Арктетрация по основанию $b = \sqrt{2}$

Для обратной функции от тетрации, используется название арктетрация, по аналогии с арксинусом, арккосинусом и аркбесселем; ми-

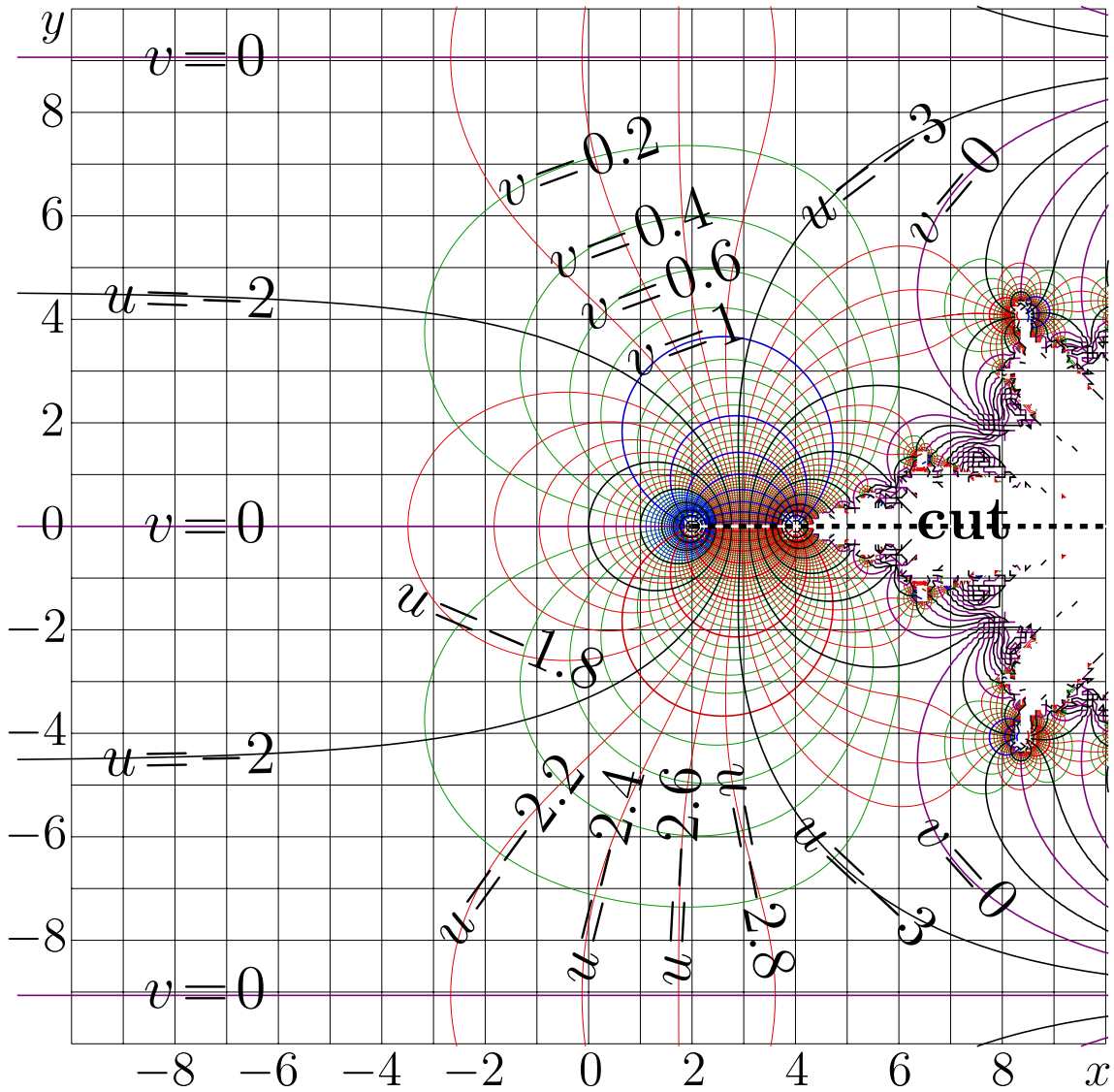


Рис. 16.3: $u+iv = \text{ate}_{\sqrt{2}}(x+iy)$

нус первая итерация тетрации обозначается символом ate ; основание, как и у тетрации или логарифма, указывается в виде нижнего индекса, то есть $\text{ate}_b = \text{tet}_b^{-1}$. Арктетрация является абельфункцией экспоненты и удовлетворяет уравнению Абеля; для $b = \sqrt{2}$, это уравнение можно записать так:

$$G\left(\left(\sqrt{2}\right)^z\right) = G(z) + 1 \quad (16.17)$$

Одним из решений этого уравнения является арктетрация, $G = \text{ate}_{\sqrt{2}}$. Чтобы сократить запись основания, в некоторых формулах этой главы, вместо $\sqrt{2}$, я пишу b , имея в виду, что $b = \sqrt{2}$. Комплексная карта арктетрации показана на рисунке 16.3. В этой секции я рассказываю, как вычисляется эта функция.

Как и другие абельфункции и суперфункции, арктетрацию по осно-

ванию $\sqrt{2}$ можно вычислять через её асимптотическое разложение, используя, по мере надобности, уравнение Абеля, чтобы привести аргумент в область, где асимптотическое разложение обеспечивает хорошую аппроксимацию. Как и для других абельфункций, для построения асимптотического разложения арктетрации $\text{ate}_{\sqrt{2}}$ есть два пути. Во-первых, можно обратить асимптотическое разложение тетрации. Во-вторых, можно “методом пристального всматривания” угадать общий вид разложения соответствующей абельэкспоненты и сделать из неё арктетрацию, добавляя к значению абельэкспоненты соответствующую константу, чтобы обеспечить выполнение условия $\text{ate}_{\sqrt{2}}(1)=0$.

Каждым из способов, отмеченных выше, можно прийти к асимптотическому разложению решения G уравнения Абеля. Пусть

$$g(z) = \frac{1}{k} \log \left(\sum_{n=1}^M V_n \cdot (z-2)^n \right). \quad (16.18)$$

где V суть постоянные коэффициенты. Константа $k = \ln^2(2)$ та же самая, что и в разложении (16.4)-(16.6), см. уравнение (16.8). Тогда решение G уравнения Абеля можно представить асимптотически в виде

$$G(z) = g(z) + O(z-2)^{M+1} \quad (16.19)$$

Подстановка такого представления в уравнение Абеля дает цепочку уравнений для коэффициентов V ; в частности,

$$V_1 = 1 \quad (16.20)$$

$$V_2 = -v_2 = \frac{1}{4} \frac{\ln(2)}{1-\ln(2)} \approx 0.56472283831773236365 \quad (16.21)$$

$$V_3 = \frac{\ln(2)^2}{24} \frac{1+2\ln(2)}{(1-\ln(2))^2(1+\ln(2))} \approx 0.29964618138408807683 \quad (16.22)$$

Приближенные значения коэффициентов V представлены во втором (правом) столбце таблицы 16.1

С помощью асимптотического разложения (16.18), решение G уравнения Абеля можно выразить как предел

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\exp_{\sqrt{2}}^n(z)\right) - n \quad (16.23)$$

Здесь, под знаком предела, функция $T = \exp_{\sqrt{2}}$ итерируется n раз.

Я надеюсь, выражение “под знаком предела”, как и выражение “под знаком интеграла” или более свойственное русскому языку выражение “под мухой” будет понято не буквально (см. рисунок 16.4), а в соответствии со здравым смыслом. Если последние два выражения можно заменить синонимами “интегранд” и, соответственно, “в состоянии алкогольного опьянения”, то для того, что пишут после знака \lim , нет устойчивого обозначения.² Поэтому мне приходится писать “под знаком предела”, в надежде, что читатель разберется, где право, где низ и где предел.



Рис. 16.4: Девочка под мухой

Для того, чтобы сделать арктетрацию, $\text{ate}_{\sqrt{2}}$, следует учесть не только асимптотические свойства тетрации по такому основанию, но и её значение в единице. Попросту, к значению функции надо добавить соответствующую константу, то есть

$$\text{ate}_{\sqrt{2}}(z) = G(z) - G(1) \approx G(z) - 1.25155147882219 \quad (16.24)$$

с тем, чтобы выполнялось условие $\text{ate}_{\sqrt{2}}(1) = 0$. В работе [50], такая арктетрация обозначена символом $F_{2,1}^{-1}$; константа 2 в индексе указывает на стационарную точку передаточной функции, в которой строится регулярная итерация, а константа 1 указывает на значение суперфункции в нуле. Как обычно, верхний индекс -1 указывает минус первую итерацию функции, то есть обратную функцию.

На комплексной карте арктетрации на рисунке 16.3 видна её периодичность. Эта периодичность следует из выражения такой арктетрации через предел (16.23). Период P определяется периодом экспоненты по основанию $\sqrt{2}$, то есть

$$P = P(\text{ate}_{\sqrt{2}}) = \frac{4\pi i}{\ln(2)} \approx 18.129440567308775239 i \quad (16.25)$$

²Я бы предложил термин “лимитант” или даже “лимитчик”, но пока такие термины трудно назвать устоявшимися. К тому же, в странах с рабовладельческим строем и паспортной системой прописок (и приписок), термин “лимитчик” может иметь иной смысл и обозначать подданного, которому в обмен на специальные услуги, милостью начальства разрешили осуществить его (или её) конституционное право выбора места проживания.

На рисунке 16.3, изолинии воспроизводятся при трансляциях вдоль оси ординат на $\Im(P)$. Кроме того, ввиду вещественного голоморфизма арктетрации, карта симметрична по отношению к отражениям относительно оси абсцисс. Таким образом, кроме оси абсцисс, имеется счетное множество горизонтальных линий уровня, где мнимая часть арктетрации равна нулю; две такие линии $y = \pm\Im(P)/2 \approx \pm 9.068$ уместаются на карте, показанной на рисунке. Сингулярности (точки ветвления) и соответствующие разрезы арктетрации по основанию $\sqrt{2}$ тоже воспроизводятся при таких трансляциях.

Область значений z , в которой выполнено тождество

$$\text{tet}_{\sqrt{2}}(\text{ate}_{\sqrt{2}}(z)) = z \quad (16.26)$$

показана на рисунке 16.5. Рисунок представляет собой комплексную карту функции в левой части уравнения (16.26), и, в области применимости этого уравнения, уровни постоянной вещественной части функции и уровни постоянной мнимой её части параллельны координатным осям. Однако, в силу периодичности функции $\text{ate}_{\sqrt{2}}$, соотношение (16.26) не может выполняться для всей комплексной плоскости. Это общее правило: если голоморфная функция принимает какое-либо значение хотя бы в паре различных значений аргумента, то обратная функция не может угадать, которое из возможных значений возвращать, и область “обратности” этой функции ограничена. Для того, чтобы лучше указать границы области применимости соотношения (16.26), на той же карте рисунка 16.5 проведены ещё линии уровня

$$\Im\left(\exp_{\sqrt{2}}^n(x+iy)\right) = \pm \frac{|P|}{2} = \pm \frac{2\pi}{\ln(2)} \quad (16.27)$$

для целых n от нуля до четырех включительно. Такие линии ограничивают границы области применимости соотношения (16.26).

Свойства арктетрации по основанию $\sqrt{2}$ позволяет анализировать иллюзию симметрии графика на рисунке 16.1, график $y = \text{tet}_{\sqrt{2}}(x)$ выглядит симметричным по отношению к отражению относительно прямой $y = -x$. Такая приближенная симметрия означает, что для $x > -2$, имеет место соотношение

$$\text{tet}_{\sqrt{2}}(x) \approx -\text{ate}_{\sqrt{2}}(-x) \quad (16.28)$$

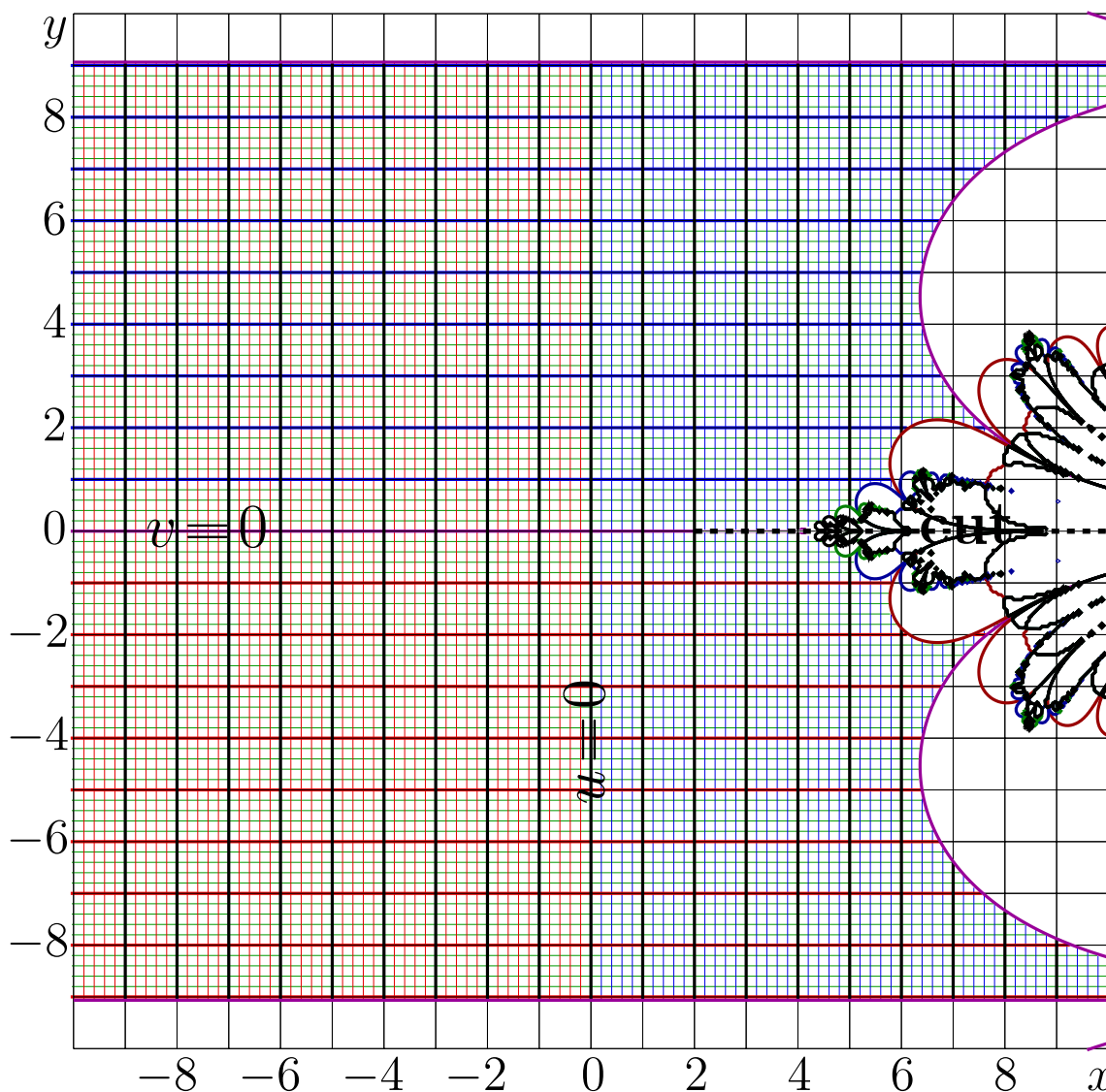


Рис. 16.5: $u+iv = \text{tet}_{\sqrt{2}}(\text{ate}_{\sqrt{2}}(x+iy))$

Точное равенство в этом соотношении не имеет места (кроме нескольких специальных точек), так как период функции в левой части формулы (16.13) $P \approx 17.143i$, а период функции в правой части формулы (16.25) $P \approx 18.129i$, то есть почти на i длиннее. Две голоморфные функции с несовместимой периодичностью не могут точно совпадать на отрезке конечной длины.

В 2009-2010 годах, приближенная симметрия графика на рисунке 16.1 вызвала дискуссию. Чтобы убедить упертых оппонентов, нам с Генриком пришлось представить иные доказательства того, что симметрия (16.28) лишь приближенная.³ Я не повторяю здесь длин-

³ Для тех, кто про мнимую единицу и свойства голоморфных функций знает лишь понаслышке (если вообще), Генрик и я придумали каждый по одному независимому доказательству, эти доказательства вообще не используют формализм теории функций комплексного переменного. Оба доказательства представлены в работе [50].

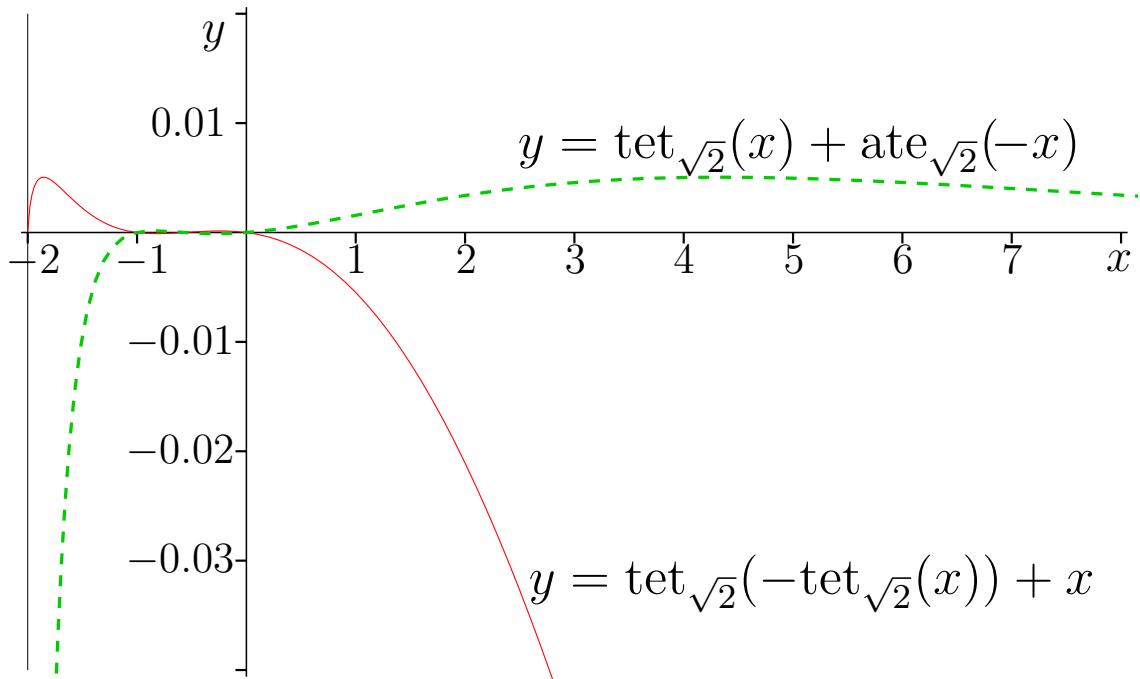


Рис. 16.6: Приближенный характер “симметрии” (16.28) рисунка 16.1: $y = \text{devi}(x)$ по формуле (16.29)

ный и тернистый исторический путь к формализму суперфункций, но приведу график, на котором показано отклонение

$$\text{devi}(x) = \text{tet}_{\sqrt{2}}(x) + \text{ate}_{\sqrt{2}}(-x) \quad (16.29)$$

характеризующее приближенность соотношения (16.28). График $y = \text{devi}(x)$ показан на рисунке 16.6. Отклонение оказалась порядка 10^{-3} , то есть “симметрия” (16.28) держится всего лишь с тремя значащими цифрами. При сильном зумине отклонение $\text{tet}_{\sqrt{2}}(x)$ от $-\text{ate}_{\sqrt{2}}(-x)$ можно было бы увидеть даже на рисунке 16.1. Для сравнения, на рисунке 16.6 сплошной кривой показана также зависимость

$$y = \text{tet}_{\sqrt{2}}(-\text{tet}_{\sqrt{2}}(x)) + x \quad (16.30)$$

При точной симметрии, эта кривая тоже легла бы на ось абсцисс.

Схожесть функций $y = \text{tet}_{\sqrt{2}}(x)$ и $y = -\text{ate}_{\sqrt{2}}(-x)$ для вещественных x может показаться случайной, хотя для этого есть серьезные предпосылки. Все тетрации по основанию $b > 1$ имеют логарифмическую особенность точке -2 , их графики имеет вертикальную асимптоту $x = -2$. Кроме того, графики для всех тетраций проходят через точки $(-1, 0)$ и $(0, -1)$. Кроме того, при $b < \exp(1/e)$, эти графики имеют горизонтальную асимптоту, соответствующую экспонен-

циальному стремлению тетрации к наименьшей из вещественных стационарных точек экспоненты. То, что эта асимптота оказалась на уровне $y = 2$, есть следствие выбора основания $b = \sqrt{2}$, использованного в статье [50] и в этой Книге для иллюстрации свойств тетрации при $1 < b < \exp(1/e)$.

Читателям в качестве упражнения предлагается построить ещё хотя бы одну голоморфную функцию, график которой проходил бы через точки $(-1, 0)$ и $(-0, 1)$, и экспоненциально приближался к вертикальной асимптоте $x = -2$ и горизонтальной асимптоте $y = 2$. И посмотреть, насколько график такой функции похож на график тетрации по основанию $b = \sqrt{2}$. Такие упражнения чрезвычайно полезны при анализе результатов наблюдений или численных экспериментов. Во многих случаях, удачный выбор голоморфной функции с требуемыми (наблюдёнными в экспериментах) свойствами существенно уменьшает количество параметров в модели и, соответственно, улучшает её предсказательную способность.

В этой секции описано построение арктетрации. По крайней мере в окрестности полупрямой $z < 2$ имеет место соотношение (16.26), и в этой области тетрация и арктетрация могут использоваться для нецелого итерирования экспоненты. Это итерирование рассмотрено в следующей секции.

4 Снова итерирую экспоненту по основанию $\sqrt{2}$

Итерации экспоненты по основанию $\sqrt{2}$ рассматривались в главе 9 для больших значений вещественной части аргумента. Здесь итерации этой экспоненты рассмотрены для малых и отрицательных значений аргумента. Я покажу, что такие итерации похожи, но не эквивалентны.

“Регулярная итерация” функции регулярна в окрестности стационарной точки, на которой она строится. Но эта итерация обычно не регулярна в других стационарных точках этой функции.

Итерации экспоненты по основанию $\sqrt{2}$ можно строить на основе неограниченно растущей суперфункции $F = \text{SuExp}_{\sqrt{2},4}$ по формулам

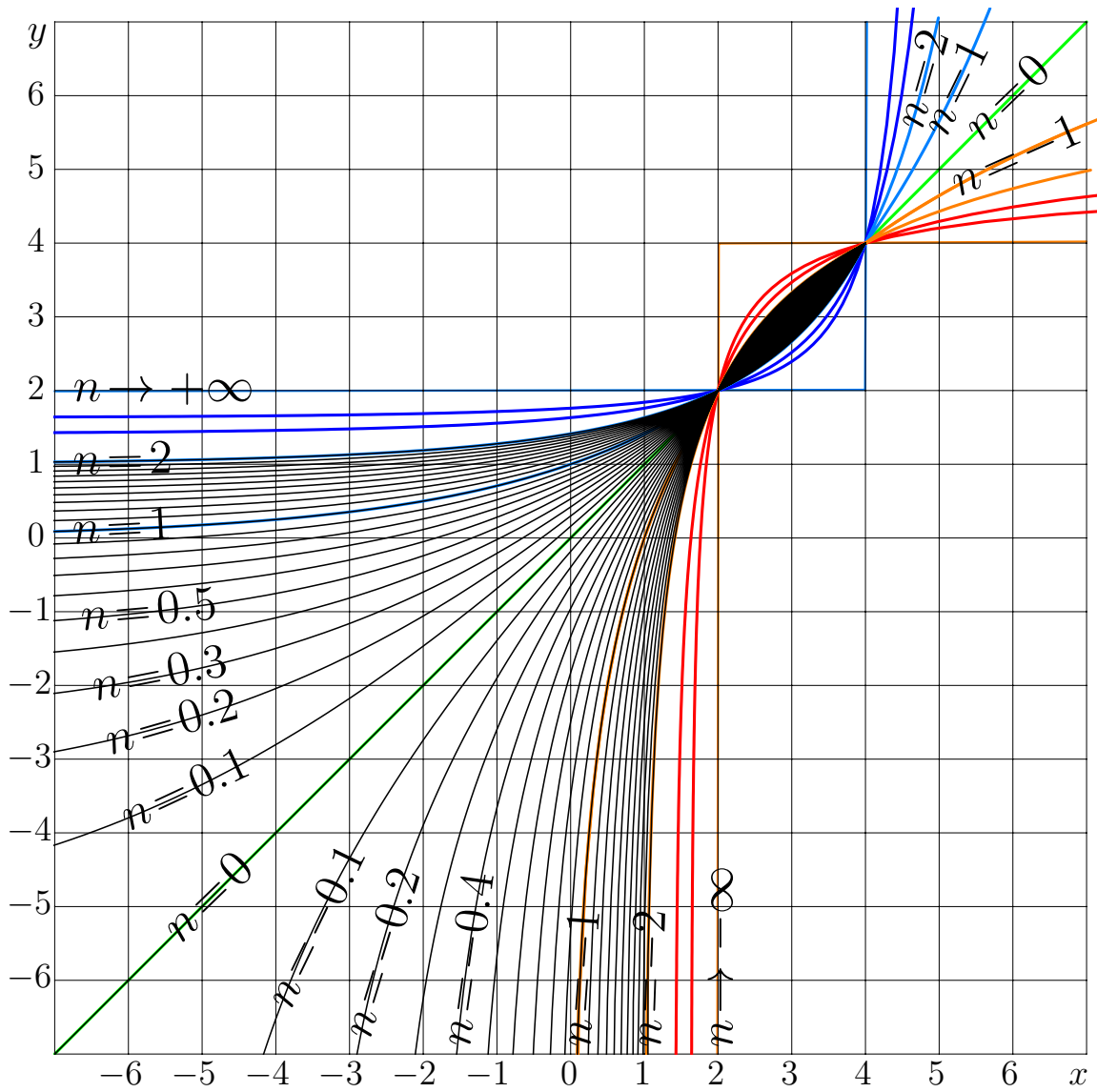


Рис. 16.7: $y = \exp_{\sqrt{2},n}^n(x)$ для различных n

(9.11),(9.12),(9.13). Такие итерации показаны на рисунке 9.8.

Однако итерации экспоненты по такому основанию можно строить также на основе тетрации, описанной в этой главе,

$$\exp_{\sqrt{2},d}^n(z) = \text{tet}_{\sqrt{2}}(n + \text{ate}_{\sqrt{2}}(z)) \quad (16.31)$$

где символы “,d” в индексе указывают, что для построения суперэкспоненты (тетрации) использована меньшая из вещественных стационарных точек экспоненты. Такие итерации экспоненты представлены на рисунке 16.7.

На рисунке 16.7 показаны итерации $\exp_{\sqrt{2},d}^n$ по формуле (16.31) как функции вещественного аргумента для различных значений номера итерации n . Эти графики аналогичны графикам рисунка 9.8, где

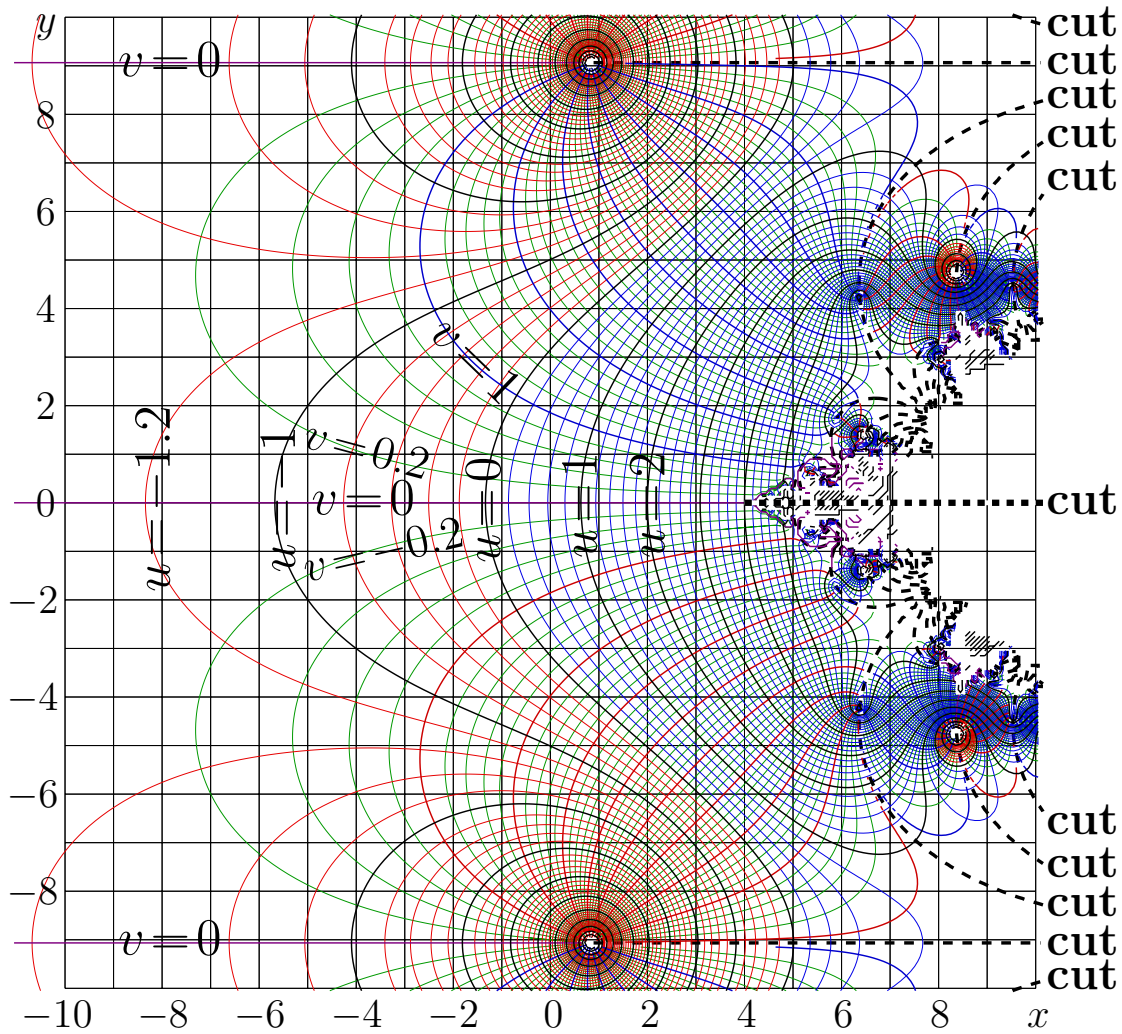


Рис. 16.8: $u+iv = \exp_{\sqrt{2},d}^{1/2}(x+iy)$

показаны итерации, построенные на стационарной точке 4. По крайней мере толстые кривые, соответствующие целым значениям n , на этих картинках одни и те же (и они действительно строятся по тем же формулам).

Графики на рисунках 16.7 и 9.8 похожи, и даже для нецелых итераций, линии, построенные на стационарной точке 4, кажутся продолжениями линий для итераций, построенных на стационарной точке 2, то есть на основе тетрации и арктетрации по основанию $\sqrt{2}$. В области $2 < x < 4$, где оба представления имеют смысл, кривые для обоих таких представлений кажутся совпадающими. Я строил эти кривые на одном и том же графике, и зуммировал как только мог, но мне не удалось увидеть отличие. Такое совпадение казалось странными, контр-интуитивным и интересным. Две различные голоморфные функции не могут тождественно совпадать на отрезке

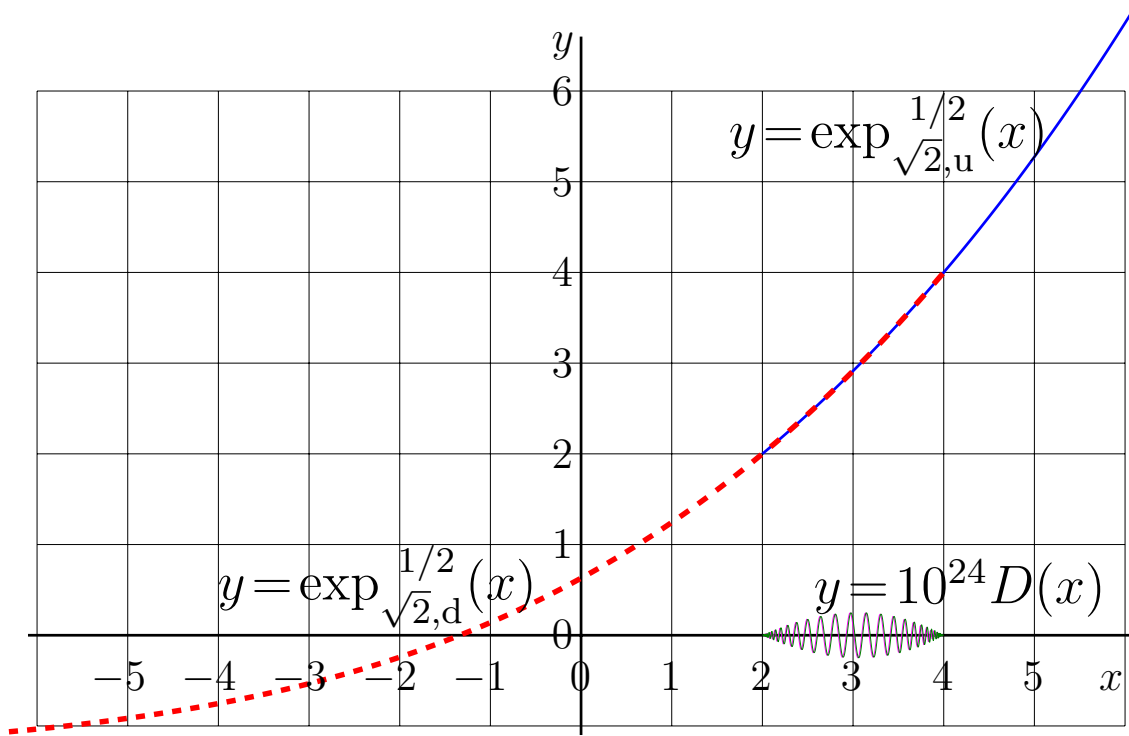


Рис. 16.9: Сравнение половинных итераций экспоненты по основанию $\sqrt{2}$, построенных на стационарной точке 2 (пунктир) и на стационарной точке 4 (сolidная кривая). В интервале от двух до четырех показана разница между этими двумя функциями по формуле (16.32), умноженная на фактор 10^{24} .

конечной длины. Если они совпали на отрезке, то они должны совпадать и во всей связной области голоморфизма.

В качестве примера я рассмотрел половинную итерацию. Для верхней стационарной точки, карта половинной итерации экспоненты по основанию $\sqrt{2}$ показана на рисунке 9.9. Для нижней стационарной точки, такая карта показана на рисунке 16.8. Эти карты далеко не тождественны. В частности, лишь вторая из этих функций периодична (с периодом $4\pi i / \ln(2) \approx 18.12944 i$). При этом, в окрестности отрезка $(2,4)$ на вещественной оси, эти карты похожи. Настолько же похожи графики этих половинных итераций для вещественного аргумента; эти графики сравниваются на рисунке 16.9.

Я был в недоумении по поводу одинакового поведения половинных итераций вдоль отрезка $(2,4)$ и различного поведения этих функций в комплексной плоскости. Я склонялся к мысли о том, что я допустил ошибку, поскольку я верю в результаты ТФКП (Теория Функций Комплексного Переменного), а ещё больше - в аксиомы арифметики, на которых строится матан и, в частности, ТФКП.

Мне было трудно себе представить, что я нащупал след некоего гипотетического *Числа Мизугадро*⁴, для которого проявляется внутренняя противоречивость аксиом арифметики. В качестве рабочей гипотезы я предположил, что точности расчетов с переменными complex double недостаточно, чтобы увидеть различие между функциями $\exp_{\sqrt{2},d}^{1/2}$ по формуле (16.31) и $\exp_{\sqrt{2},u}^{1/2}$ по формуле (9.23). Я начал считать итерации с сотней значащих цифр, точные формулы такое позволяют. Отличие оказалось в 25м знаке. Это отличие можно выразить функцией

$$D(x) = \exp_{\sqrt{2},u}^{1/2}(x) - \exp_{\sqrt{2},d}^{1/2}(x) \quad (16.32)$$

Это отличие показано в нижней части рисунка 16.9. Чтобы график функции D не сливался с осью абсцисс, значения этой функции пришлось масштабировать на 24 порядка величины.

Для значений $|z| < 2$, функцию $D(z)$ можно аппроксимировать семипараметрическим фитом

$$\tilde{D}(z) = 2.48 \cdot 10^{-25} (z-2)(4-z) \left(1 + 0.120(z-3) + 0.006(z-3)^2 \right) \times \\ \sin \left(.747 - .068(z-3) + 0.007(z-3)^2 + p_4 \ln(4-z) + p_2 \ln(z-2) \right) \quad (16.33)$$

где $p_4 = 2\pi / \ln(2 \ln(2)) \approx 19.23614904204285$

и $p_2 = -2\pi / \ln^2(2) \approx 17.14314817935485$

соответствуют периодам суперфункций от $\exp_{\sqrt{2}}$, построенным на стационарных точках 4 и 2, см. формулы (9.7), (9.8) и (16.13). Такой фит неплох: по крайней мере, на рисунке 16.9, даже при зумине на 24 порядка величины, кривые для D и \tilde{D} почти сливаются. Вероятно, фит 16.33 можно ещё улучшить; читателям предлагается сделать это в качестве самостоятельного упражнения.

После построения графиков на рисунке (16.9), я осознал, что это первый случай в моей практике, когда точности “double” оказалось недостаточно для того, чтобы нарисовать красивые (“camera-ready”) рисунки для научной статьи. Случай поучительный: никакая точность численных расчетов не может считаться достаточным основанием для математических конжекций; уповать приходится на доказательства, здравый смысл и, конечно, аксиомы ТОРИ.

⁴http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/mizugadro.shtml Число Мизугадро

В защиту графических процедур, использующих переменные “double” и “complex double” (работающих с точностью порядка 15и значащих цифр), упомяну софтвер “Maple-10”. Среди графических опций этого софта, мне не удалось найти графики с точностью лучше, чем “float”, то есть примерно с семью десятичными значащими цифрами. Использование этого софтвера для серьезного асимптотического анализа и численной проверки получающихся разложений может приводить к конфузиям. Примеры того, какая ерунда при этом может получаться вместо графиков даже сравнительно простых функций, предложены в рисунках к поэме “Maple and tea” ⁵. К сожалению, мне пока не удалось перевести эту поэму на русский язык. Если Россия не прекратит свое существование в течение ближайших лет (многие авторы, уже который год, предсказывают распад РФ “в следующем году” с завидным постоянством), а Мапле не исправится в последующих версиях, перевод этой поэмы на русский язык может представлять интерес и составить предмет будущего исследования.

Итерация функции, регулярная в какой-либо её стационарной точке, может быть сингулярной в другой стационарной точке. При этом, для вещественных значений аргумента, такие различные итерации могут быть весьма похожи. На начало 21 века, даже самые прецизионные измерения не дают точности в 24 значащих цифры. В этом смысле, для многих физических приложений суперфункций и нецелых итераций, может быть не очень существенным, на какой из стационарных точек построена итерация. Разумеется, в каждом случае практического использования нецелых итераций голоморфной функции, желательно проверить, что используется именно та итерация, которая соответствует физически-осмысленному решению, или что разница между итерациями, построенными на разных стационарных точках, не превышает погрешности измерений. (Тогда можно ожидать, что паромы не будут тонуть, наскочив на рифы, реакторы не будут взрываться, а премьер-министрам не придется публично каяться и уходить в отставку перед лицом толпы разгневанных сограждан.)

⁵http://en.wikisource.org/wiki/Maple_and_Tea,
http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/maple.shtml Maple and tea

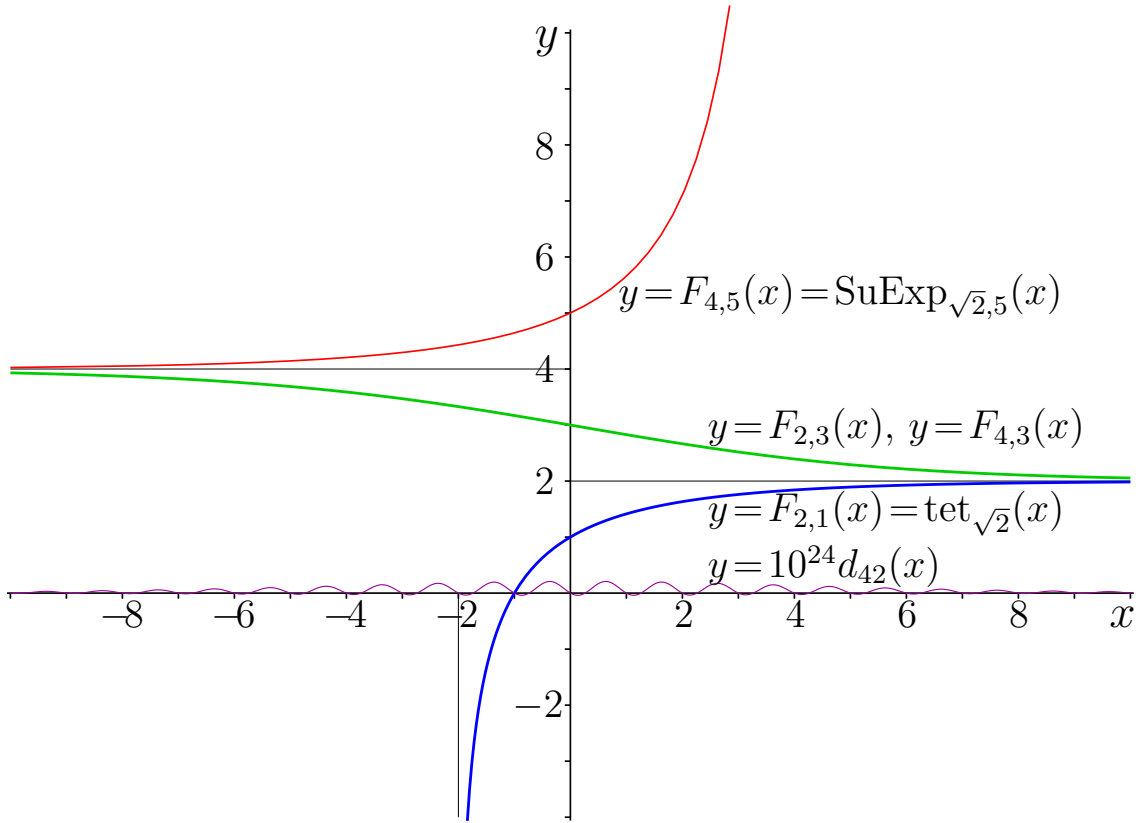


Рис. 16.10: Четыре суперэкспоненты по основанию $\sqrt{2}$

Таким образом, для каждой передаточной функции, может существовать несколько осмысленных суперфункций. Выбор наиболее подходящей из них должен осуществляться на основе дополнительных соображений, специфичных для каждого приложения. Для случая экспоненциальной передаточной функции $\exp_{\sqrt{2}}$, четыре наиболее физичных суперфункции представлены на рисунке 16.10 и рассмотрены в следующей секции.

5 Четыре суперэкспоненты по основанию $\sqrt{2}$

На основе предыдущего рассмотрения, можно выделить четыре вещественно-голоморфные суперфункции от функции $\exp_{\sqrt{2}}$. Эти суперфункции показаны на рисунке 16.10 и обсуждаются ниже.

Функция $F_{2,1} = \text{tet}_{\sqrt{2}}$ есть тетрация по основанию $\sqrt{2}$, та же, что и на рисунке 16.1. Её свойства рассмотрены в этой главе в предыдущих параграфах. Это суперфункция экспоненты по основанию $\sqrt{2}$, построенная на стационарной точке 2. В нуле эта функция принимает значение единица.

Функция $F_{4,5} = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ относится к формуле (9.13), с помощью этой функции и соответствующей абельэкспоненты $F_{4,5}^{-1} = \text{AuExp}_{\sqrt{2},5}$ строятся итерации экспоненты по основанию $\sqrt{2}$, неограниченно растущие вдоль вещественной оси. Стационарная точка 4 использована в качестве асимптотического значения на минус бесконечности. С помощью трансляции вдоль вещественной оси, обеспечено условие $F_{4,5}(0) = 5$.

Функция $F_{2,3}$ есть тетрация со сдвинутым аргументом,

$$F_{2,3}(z) = \text{tet}_{\sqrt{2}}(z + z_{2,3}) \quad (16.34)$$

$$z_{2,3} = \text{ate}_{\sqrt{2}}(3 + i0) \approx -3.3834692659172254 + 8.5715740896774228i$$

Функция $F_{4,3}$ есть растущая суперэкспонента со сдвинутым аргументом,

$$F_{4,3}(z) = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}(z + z_{4,3}) \quad (16.35)$$

$$z_{4,3} = \text{AuExp}_{\sqrt{2},5}(3 + i0) \approx 3.015784890490347 + 9.618074521021425i$$

Вдоль вещественной оси, функции $F_{2,3}$ и $F_{4,3}$ убывают от четырех на минус бесконечности до двух на плюс бесконечности. На рисунке 16.10, график функции $F_{2,3}$, сливается с графиком функции $F_{4,3}$. Отклонение не только меньше толщины линий, но и существенно меньше размеров молекул и атомов, из которых сделана эта Книга (или экран монитора, если вы читаете эту Книгу на компьютере). Чтобы все-таки показать отклонение

$$d_{42}(z) = F_{4,3}(z) - F_{2,3}(z) \quad (16.36)$$

на рисунке 16.10 тонкой кривой построен график $y = 10^{24}d_{42}(x)$; значения функции пришлось масштабировать на 24 порядка величины. Такая схожесть имеется только в окрестности вещественной оси. Эти функции имеют различные периоды, одна из них имеет сингулярности, и поэтому они при всём желании не могут совпадать тождественно даже для вещественных значений аргумента.

Сходство функций $F_{4,3}$ и $F_{2,3}$ обуславливает сходство итераций экспоненты по основанию $\sqrt{2}$, показанных на рисунках 9.8, 9.9, 16.7 и

16.8 ; половинные итерации сравниваются также на рисунке 16.9. Можно ожидать, что в течение 21 века, точность измерений физических величин возрастет до 24 и более значащих цифр. Тогда разница между суперфункциями (или соответствующими нецелыми итерациями) наблюдаемых передаточных функций будет иметь прямое применение в измерительной технике. Пока, то есть в начале 21 века, можно ожидать, что для некоторых (или даже многих) измеренных передаточных функций с парой вещественных стационарных точек, любую из этих точек можно использовать для построения физически-осмысленных итераций, и погрешность измерений не позволит увидеть, что лишь одна из таких итераций является “настоящей”.

6 Комплексные итерации

Когда черновик этой Книги был написан (и одобрен Редактором), я обнаружил, что в Книге нет ни одной карты комплексной итерации. Я восполняю такой пробел в этой секции. Здесь я рассказываю про i тые итерации. Поскольку буква i набрана прямым шрифтом, Читатель может догадаться, что имеется в виду не переменная, а известная константа, корень из минус единицы.

На рисунках 16.11 и 16.12 представлены карты функций

$$\exp_{\sqrt{2},d}^i(z) = \text{tet}_{\sqrt{2}}\left(i + \text{ate}_{\sqrt{2}}(z)\right) \quad (16.37)$$

и

$$\exp_{\sqrt{2},u}^i(z) = \text{SuExp}_{\sqrt{2},5}\left(i + \text{AuExp}_{\sqrt{2},5}(z)\right) \quad (16.38)$$

Функция $\exp_{\sqrt{2},d}^i$ по формуле (16.37) построена из тетрации и арктетрации рассмотренных в этой главе. Функция $\exp_{\sqrt{2},u}^i$ по формуле (16.38) построена из растущей суперэкспоненты и соответствующей абельэкспоненты по такому же основанию, эти функции рассмотрены в главе 9. Эти пары функций близки в окрестности отрезка $(2, 4)$, но сильно отличаются вдали от этого отрезка. Как и следовало ожидать, i тые итерации, показанные на рисунках 16.11 и 16.12, тоже схожи в окрестности указанного отрезка, и тоже сильно отличаются вдали от начала координат.

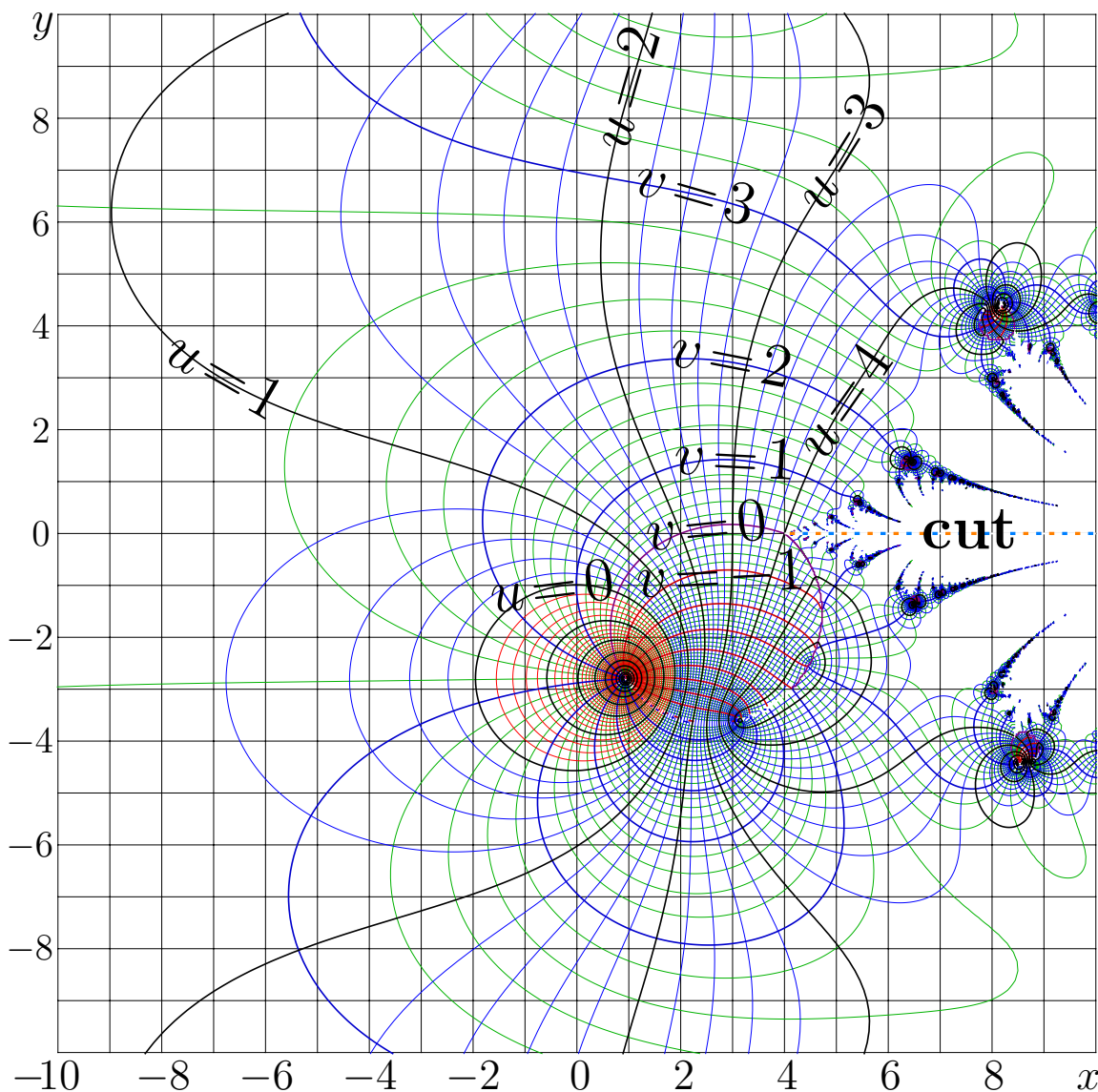


Рис. 16.11: $u+iv = \exp_{\sqrt{2}, d}^i(x+iy)$ по формуле (16.37)

Как и в случае вещественных итераций, каждая из предложенных комплексных итераций может быть вполне аргументированно квалифицирована как “настоящая”. Выбор наиболее настоящей из них аналогичен случаю сказки Джорджа Орвелла (George Orwell) “Скотский Хутор” (Animal’s farm ⁶); герои сказки декларируют, что “все животные равны”, но скоро обнаруживают, что некоторые из них равнее других. (All animals are equal, but some of them are more equal than others). С итерациями имеет место похожий случай. Когда дополнительный критерий для суперфункции, абельфункции или нецелой итерации исходной передаточной функции предложен, и он позволяет выбрать “правильную” формулу, то можно деклари-

⁶http://msxnet.org/orwell/print/animal_farm.pdf George Orwell. Animal Farm. 1945

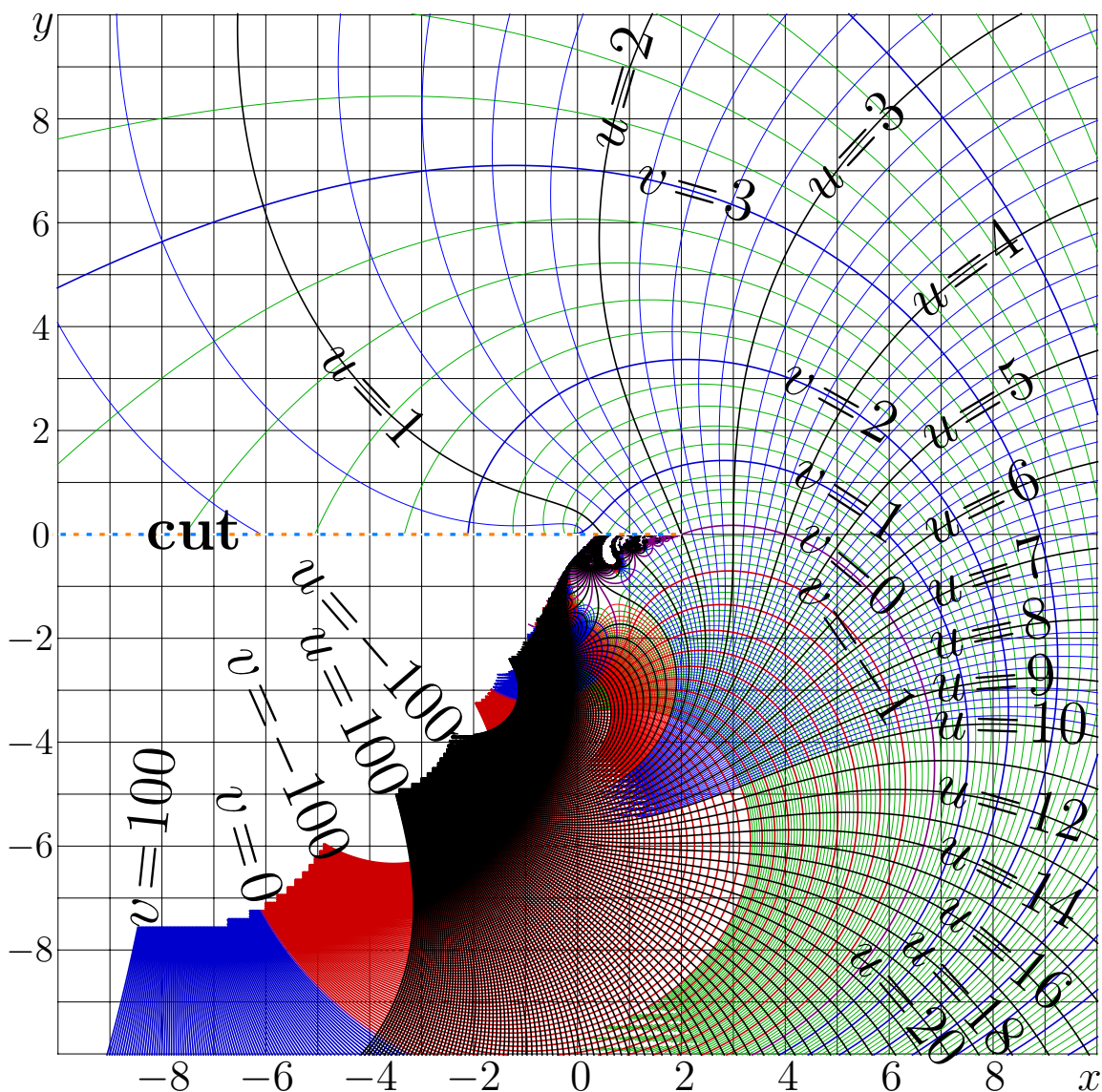


Рис. 16.12: $u+iv = \exp_{\sqrt{2},u}^i(x+iy)$ по формуле (16.38)

ровать, что одна из итераций (16.37), (16.38) “более настоящая”, чем другая.

Выбор “самой что ни на есть настоящей” итерации какой-либо передаточной функции должен производиться на основе физической интерпретации таких формул, то есть исходя из возможных приложений. В главе 9 рассмотрена неограниченно растущая (при вещественных значениях аргумента) суперэкспонента, а не тетрация. Такой выбор объясняется тем, что такая суперэкспонента дает итерации, более похожие на итерации других функций, представленных в начале книги. А вовсе не тем, что я считаю функцию $\text{SuExp}_{\sqrt{2},5}$ сколько-нибудь более “настоящей” суперэкспонентой, чем тетрацию $\text{tet}_{\sqrt{2}}$, рассмотренную в этой главе.

Пока мне трудно придумать физическую интерпретацию невещественных итераций голоморфных функций. Но, как упомянутый в главе 12 Портной (который шьет портки с произвольным количеством штанин), я считаю нужным включить в Книгу хотя бы один пример комплексной итерации. То есть хотя бы одно численное подтверждение моему заявлению, что в формулах номер итерации не имеет надобности быть вещественным.

Вещественность номера итерации (а иногда даже и целость этого номера) может быть важна для приложений формулы в физических или иных исследованиях. С другой стороны, желательно, чтобы математический аппарат охватывал область значений несколько шире, чем та, для которых сегодня есть очевидное применение. Как только кому-либо потребуется комплексные, или, в частном случае, чисто мнимые итерации - в этой Книге для таких итераций уже есть формализм.

7 Воспроизводимость

Читатели приглашаются повторить расчеты, представленные в этой главе. Это можно сделать и для других передаточных функций; например, для экспоненты по основанию b от единицы до $\exp(1/e)$. Предлагается найти, построить, идентифицировать такую передаточную функцию, для которой регулярные итерации, построенные на различных стационарных точках, существенно отличались бы.

В качестве примера могу посоветовать поэкспериментировать с полиномиальной передаточной функцией. Я примерно представляю себе, что должно получиться в ответе. Если при этом вдруг возникнут какие-либо сложности, то я готов прийти на помощь.

Построение и исследование тетрадии, представленные в этой главе, естественным образом обобщаются для других значений основания b натуральной тетрадии, по крайней мере для $1 < b < \exp(1/e)$. Такое обобщение рассмотрено в следующей главе.

Глава 17

Тетрация по основанию $b > 1$

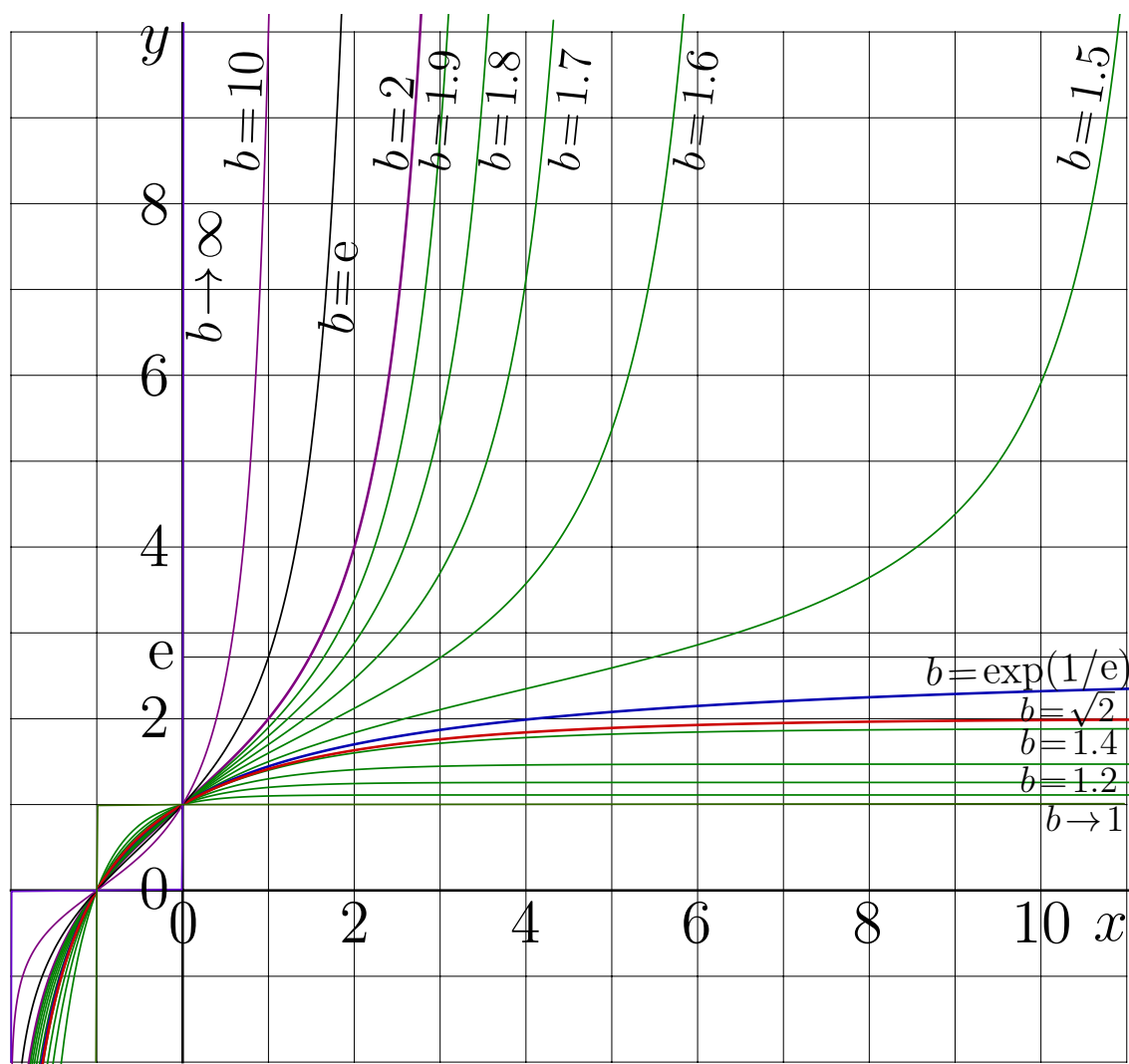
В предыдущих главах рассмотрены различные методы построения суперфункций от передаточных функций, когда эти функции имеют вещественные или комплексные стационарные точки. В частности, рассмотрены примеры экспоненциальной передаточной функции для оснований $b = \sqrt{2} \approx 1.44$, $b = \exp(1/e) \approx 1.46$ и $b = e \approx 2.71$. Читатели приглашаются использовать предложенные здесь методы и для других функций, и, в частности, для экспоненты по различным основаниям. Лучше начинать со случаев, когда основание вещественно, положительно и превышает единицу. При этом экспонента является возрастающей функцией вдоль всей вещественной оси, и интерпретация суперэкспоненты и абельэкспоненты особенно наглядна.

1 Аппроксимация тетрации вблизи нуля

В случае основания $1 < b \leq \exp(1/e)$, тетрация может вычисляться с помощью разложения вблизи стационарной точки. Для основания $b > 1/\exp(1/e)$, может использоваться представление тетрации через интеграл Коши. Таким образом, вся область $b > 1$ оказывается перекрыта эффективными алгоритмами вычисления tet_b .

Для вещественных значений аргумента, график $y = \text{tet}_b(x)$ представлен на рисунке 17.1 как функция x при различных вещественных значениях параметра $b > 1$. Аналогичные графики для арктетрации показаны на рисунке 17.2.

Рисунок 17.1 для тетрации и рисунок 17.2 для арктетрации генери-



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Tetreal10bx10d.png>

<http://en.citizendium.org/wiki/File:Tetreal10bx10d.png>

Рис. 17.1: $y = \text{tet}_b(x)$ для различных значений b

руются с помощью аппроксимаций. Для значений $b < 3$, используется аппроксимация fit1, оределенная выражениями

$$d = \ln(b)$$

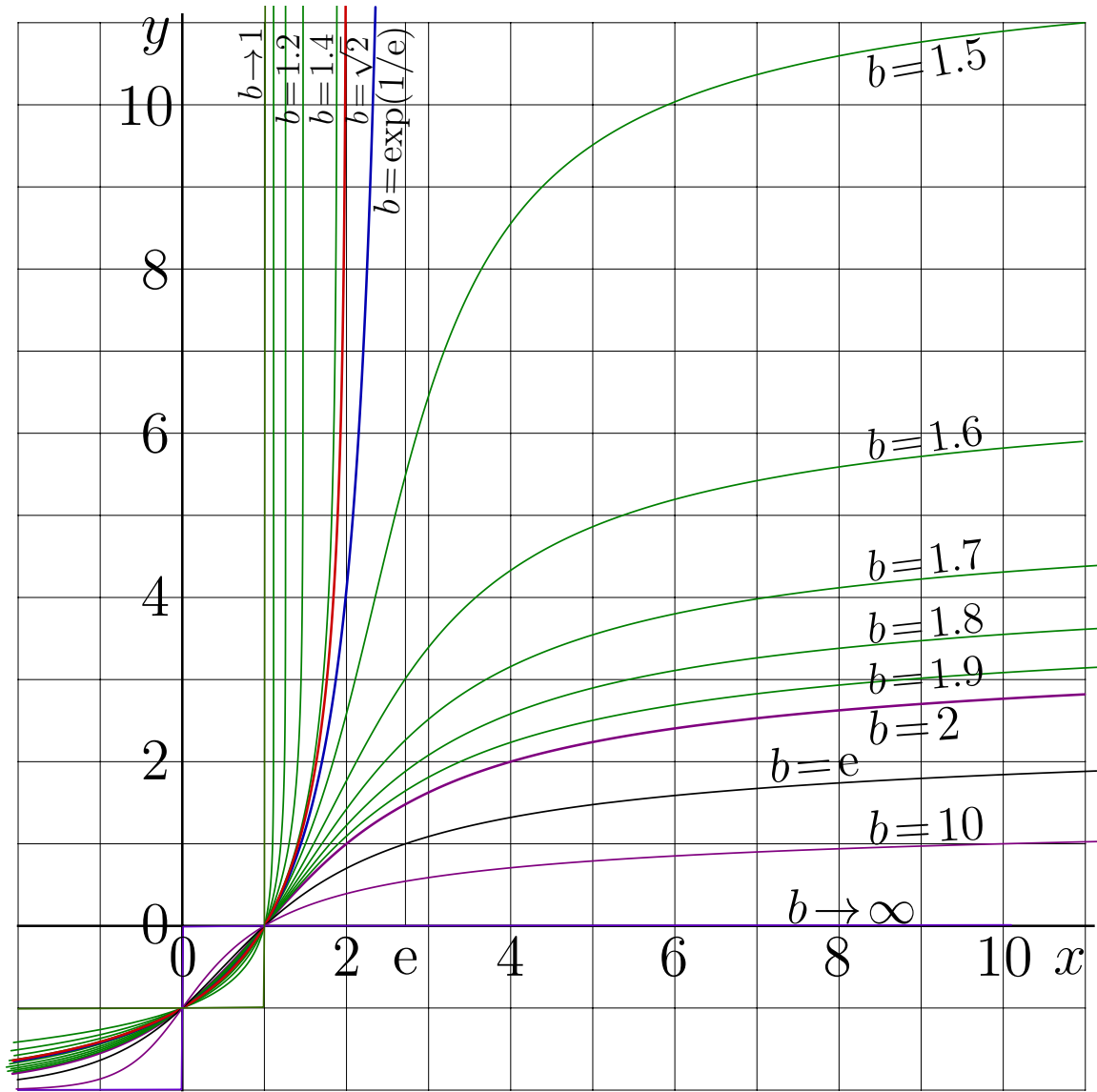
$$q = \sqrt{d}$$

$$c_0 = -1.0018 + \frac{0.1512848482(1+33.0471529885q-3.51771875598d)q}{1+3.2255053261256337q} + \frac{\ln(2)-\frac{1}{2}}{d}$$

$$c_1 = 1.1 - 2.608785958462561(1 - 0.6663562294911147q)q - \frac{\ln(2)-\frac{5}{8}}{d}$$

$$c_2 = -0.96 + 3.0912038297987596 \frac{(1+0.60213980487853d)q}{1+4.24046755648d} + \frac{\ln(2)-\frac{2}{3}}{d}$$

$$c_3 = 1.2 - 10.44604984418533 \frac{(1+0.213756892843q+0.369327525447d)q}{1+4.9571563666q+7.702332166d} - \frac{\ln(2)-\frac{131}{192}}{d}$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Ater01.png>

Рис. 17.2: $y = a te_b(x)$ для различных значений b

$$\begin{aligned} \text{fit}_b(z) = & (1 + c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + c_3 z^4)(z+1) \\ & + \ln(z+2) - \frac{\ln(2)}{d}(1+z) \end{aligned} \quad (17.1)$$

Чтобы получить аппроксимацию (17.1), выражение

$$\frac{\text{tet}_b(z) - \ln(z+2) + \ln(2)/\ln(b)}{1+z} \quad (17.2)$$

разложено в ряд Тэйлора по степеням z при различных значениях $a = \ln(b)$. Коэффициенты этого разложения аппроксимированы как функции параметра a . Затем тетрация выражена через это разложение. Разложение оборвано, учтено всего несколько термов. Однако, для $|z| \leq 1/2$, это приближение дает несколько значащих

цифр для значения $\text{tet}_b(z)$. Такое представление использовано для $|\Re(z)| \leq 1/2$; для иных значений z , используется представление через передаточное уравнение

$$\text{tet}_b(z) = b^{\text{tet}_b(z-1)} \quad (17.3)$$

или

$$\text{tet}_b(z) = \log_b(\text{tet}_b(z+1)) \quad (17.4)$$

в зависимости от знака $\Re(z)$. Так можно вычислять тетрацию с несколькими знаками для умеренных значений $|\Im(z)|$ и $|\Im(b)|$. У меня пока нет столь же простой аппроксимации для больших значений $|\Im(b)|$, хотя представление через интеграл Коши легко обобщается на случай комплексных значений основания b . В частности, такая аппроксимация годится для вещественных значений основания $b < 5$, давая порядка четырех значащих цифр. Это вполне достаточно для того, чтобы дефекты аппроксимации не были видны даже при сильном зумине рисунка 17.1. Однако для $b = 10$ аппроксимация несколько хуже, и для этого значения использовано первичное представление тетрации через интеграл Коши.

Из рисунка 17.1 можно проследить поведение тетрации вещественного аргумента при различных значениях основания $b > 1$.

В интервале значений $-2 \leq x \leq -1$, тетрация $y = \text{tet}_b(x)$ имеет отрицательные значения и растет с увеличением b .

В интервале значений $-1 \leq x \leq 0$, тетрация $y = \text{tet}_b(x)$ имеет положительные значения и убывает с увеличением b .

При $x > 0$, тетрация $y = \text{tet}_b(x)$ имеет положительные значения и растет с увеличением b .

В предельном случае $b \rightarrow 1$, график тетрации $y = \text{tet}_b(x)$ приближается к асимптотам $x = -1$ и $y = 1$.

В предельном случае $b \rightarrow \infty$, график тетрации $y = \text{tet}_b(x)$ приближается к асимптотам $x = -2$ и $x = 0$, а также к отрезку $-2 < x < 0$ на оси абсцисс.

При всех $b > 1$, тетрация $\text{tet}_b(x)$ является монотонно возрастающей функцией, и график $y = \text{tet}_b(x)$ проходит через точки $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, b)$.

Когда $b = \exp(1/e)$, асимптотой становится линия $y = \text{flog}(1/e) = e$. Эта линия отмечена на графике в дополнение к ректангулярной сетке, соответствующей целочисленным значениям абсциссы или ординаты.

При $1 < b \leq \exp(1/e)$, с ростом x график $y = \text{tet}_b(x)$ приближается к горизонтальной асимптоте $y = \text{flog}(\ln(b))$.

Функция flog и её имплементация представлены в ТОРИ,

<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Filog>

Некоторые свойства этой функции обсуждаются в следующей главе.

В принципе, аналогичным образом можно строить аппроксимацию для арктетрации (абельэкспоненты) ate_b . Не стремясь объять необъятное, для построения графика арктетрации вещественного аргумента, я отразил от прямой $y = x$ графики рисунка 17.1. Так построен рисунок 17.2.

При $x > -2$, имеет место соотношение

$$\text{ate}_b(\text{tet}_b(x)) = x \quad (17.5)$$

Кроме того, для $b > \exp(1/e)$ и по крайней мере для вещественных x имеет место соотношение

$$\text{tet}_b(\text{ate}_b(x)) = x \quad (17.6)$$

Это же соотношение имеет место и при $1 < b \leq \exp(1/e)$, $x < \text{flog}(\ln(b))$.

В широкой области значений b и z , итерации экспоненты $\exp_b(z) = b^z$ могут быть представлены через тетрацию и арктетрацию

$$\exp_b^n(z) = \text{tet}_b(n + \text{ate}_b(z)) \quad (17.7)$$

Как обычно, в таком представлении число n итерций не имеет необходимости быть целым; достаточно, чтобы аргумент z попадал в область голоморфизма функции ate_b . Тогда, при $b > \exp(1/e)$, значение $n + \text{ate}_b(z)$ попадет в область голоморфизма тетрации tet_b .

2 Различные основания экспоненты и итерации

В этой секции сравниваются итерации экспоненты. Эти итерации рассмотрены в предыдущих секциях; здесь предлагается обзор пред-

ставленных ранее результатов.

Итерации экспоненты по основаниям $b = e$, $b = \exp(1/e)$ и $b = \sqrt{2}$ представлены на рисунке 17.3 как функции вещественного аргумента для различного номера n итерации. Кривые проведены для $n = -2, -1, -0.9, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.5, 0.9, 1, 2$.

На верхней картинке рисунка 17.3 представлен случай $b = e$; то есть показаны итерации обычной, натуральной экспоненты. Соответствующие итерации вычисляются через натуральную тетрацию tet и натуральную арктетрацию ate :

$$y = \exp^n(x) = \text{tet}\left(n + \text{ate}(x)\right) \quad (17.8)$$

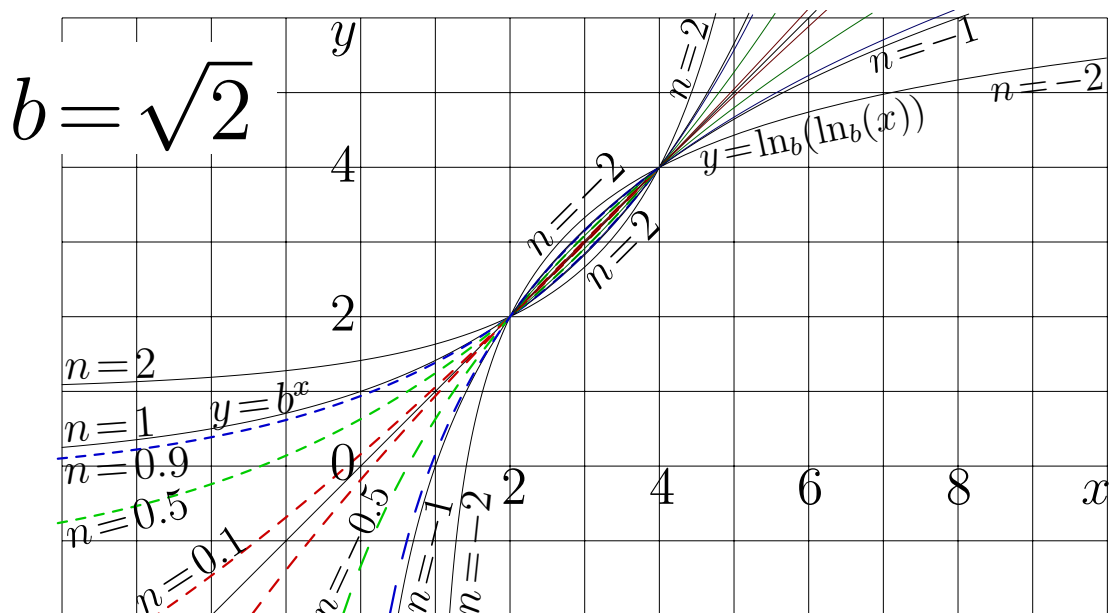
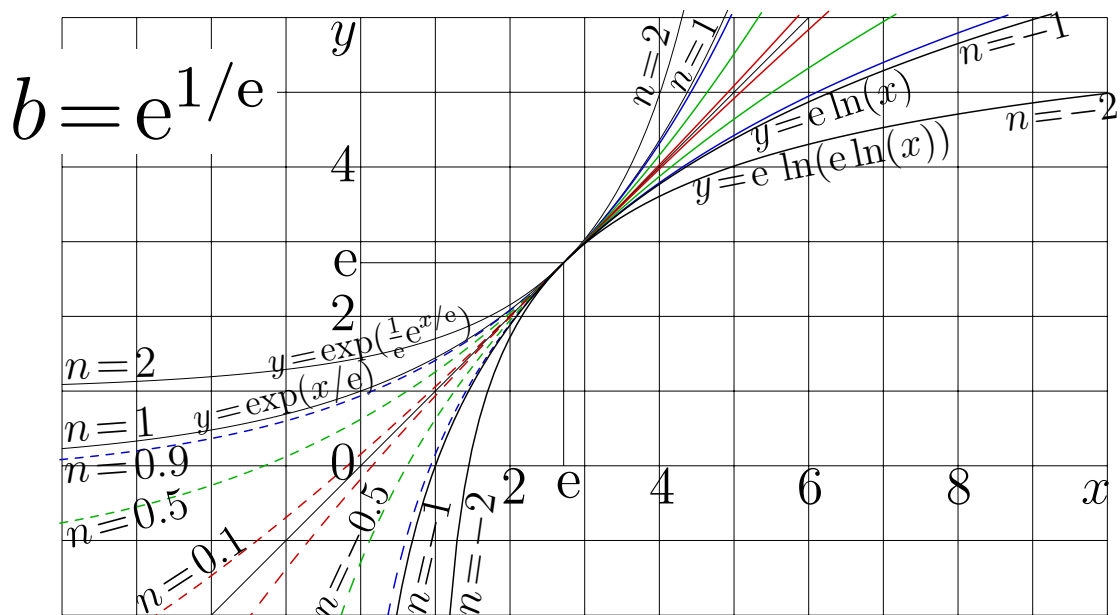
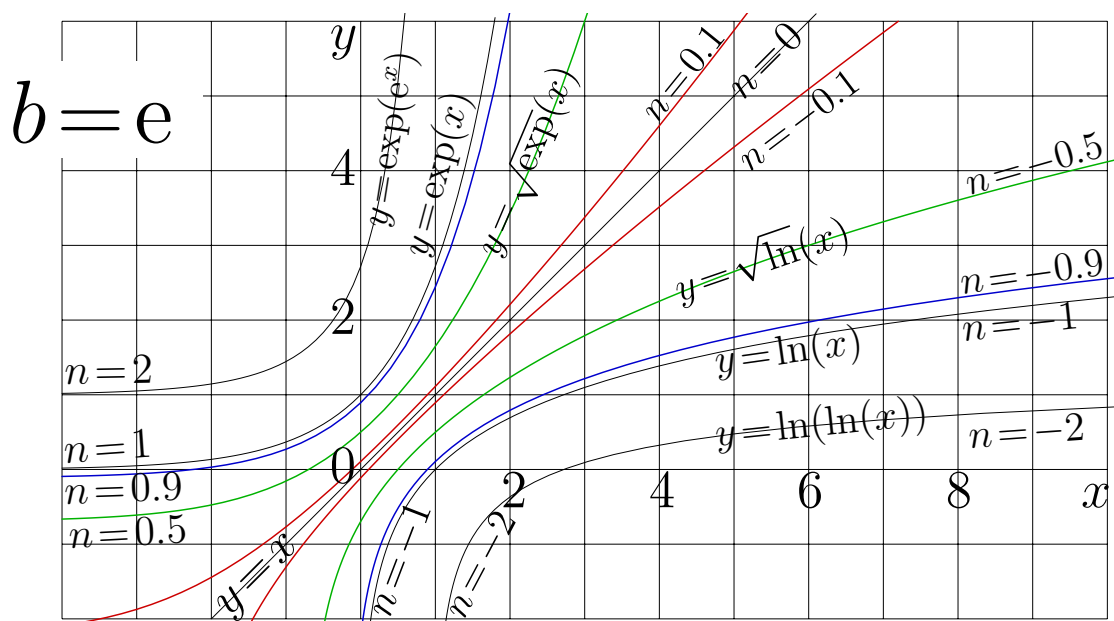
Схожие графики можно построить и для иных значений основания $b > \exp(1/e)$. Для такого основания, итерации, даже не целые, являются вещественно-голоморфными функциями по крайней мере в некоторой окрестности вещественной оси. Одна и та же голоморфная функция может использоваться как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента. Стационарные точки натуральной экспоненты лежат достаточно далеко от вещественной оси, и, в некоторой окрестности вещественной оси, итерации экспоненты являются столь же гладкими, как и сама экспонента.

По мере уменьшения основания b , ширина полосы голоморфизма вдоль вещественной оси уменьшается, и при $b = \exp(1/e)$ кривые для различных итераций сжимаются в пучок крив, проходящих через стационарную точку e . Этот случай представлен на центральной картинке рисунка 17.3. При этом нецелые итерации для значений аргумента, меньших e , уже не являются голоморфными продолжениями итераций, построенных для значений, больших e . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, кривые, для итераций, построенных через тетрацию и арктетрацию, показаны пунктиром. В левой части графика пунктиром показаны кривые

$$y = \exp_{b,1}^n(x) = \text{tet}_b\left(n + \text{ate}_b(x)\right) \quad (17.9)$$

а сплошные кривые соответствуют формуле

$$y = \exp_{b,3}^n(x) = \text{SuExp}_{b,3}\left(n + \text{AuExp}_{b,3}(x)\right) \quad (17.10)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:E1e14z600.jpg>

Рис. 17.3: $y = \exp_b^n(x)$ для различных n при $b = e$, $b = \exp(1/e)$, $b = \sqrt{2}$

Тетрация tet_b по основанию $b = \eta = \exp(1/e)$ определена формулой (11.24), а арктетрация по этому основанию определена формулой (11.28). Соответственно, растущая абельэкспонента определяется формулой (11.29) при $\text{AuExp}_{b,3} = G_3$. Растущая суперэкспонента определена формулой (11.29) при $\text{AuExp}_{b,3} = G_3$.

При значениях основания $1 < b < \exp(1/e)$, экспонента имеет две вещественные стационарные точки (см. фигуры 9.1, 11.1). Каждая из этих стационарных точек может использоваться для построения регулярной итерации. Однако нецелая итерация, построенная на одной из этих регулярных точек, не регулярна в другой стационарной точке. Здесь в качестве примера выбрано значение $b = \sqrt{2}$. Итерации показаны в нижней картинке рисунка 17.3. Пунктиром проведены линии

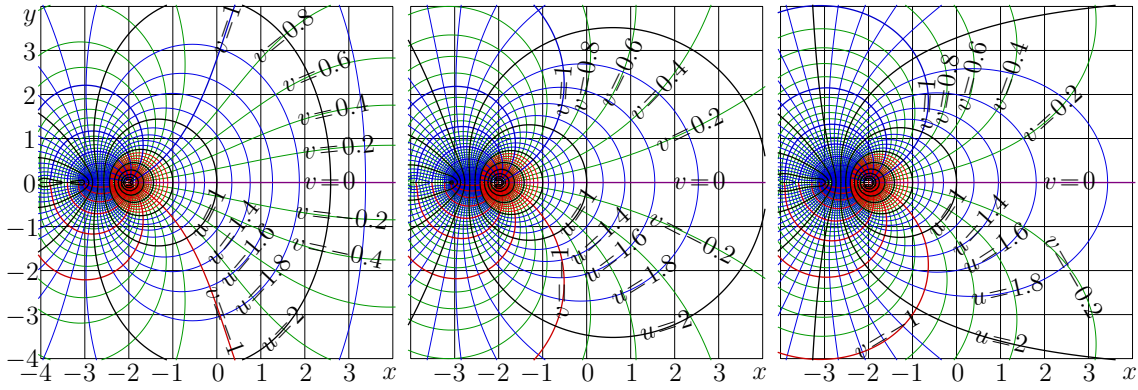
$$y = \exp_{b,d}^n(x) = \text{tet}_b\left(n + \text{ate}_b(x)\right) \quad (17.11)$$

а сплошные кривые соответствуют формуле

$$y = \exp_{b,u}^n(x) = \text{SuExp}_{b,5}\left(n + \text{AuExp}_{b,5}(x)\right) \quad (17.12)$$

Для нецелых значений номера n итерации, стационарная точка 2 или 4 ограничивает область голоморфизма каждой из итерации. На отрезке от 2 до 4, каждая из итераций голоморфна, и различие между итерациями мало, порядка 10^{-24} , см.рис. 16.9. Ввиду такой малости, пунктирные кривые на нижней картинке рисунка 17.3 кажутся совпадающими с соответствующими сплошными линиями.

Аналогичная иллюзия имеет место для центральной картинки рисунка 17.3; пунктирные кривые кажутся продолжениями сплошных. Таким образом, пример экспоненты указывает, что для построения суперфункций и нецелых итераций следует выбрать, указать асимптотическое поведение искомой функции в комплексной плоскости; иначе могут существовать различные решения, и каждое из них можно аргументированно обосновывать как “настоящую” суперфункцию и, соответственно, “настоящую” нецелую итерацию. По этой причине, важно, чтобы изначально все суперфункции, абель-функции и нецелые итерации строились для комплексных значений аргумента.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:E1efig09abc1a150.png>

Рис. 17.4: $u + iv = \text{tet}_b(x + iy)$ для $b = 1.5$, $b = \exp(1/e)$ и $b = \sqrt{2}$

Алгоритмы вычисления функций использованных в этой Книге, запрограммированы на C++ как `complex double`: их можно использовать как для комплексных значений аргумента, так и для вещественных. Если для каких-либо приложений требуются лишь вещественные значения аргумента, то переделать комплексное представление в вещественное легче, чем обобщать вещественное на случай комплексного аргумента.

3 Зависимость тетрации от основания

Графики тетрации вещественного аргумента, показанные на рисунке (17.1), позволяют предположить, что зависимость тетрации от основания (при постоянном аргументе) непрерывна (а может быть, даже и голоморфна) как функция основания. Можно ожидать, что такая непрерывность имеет место не только для вещественных значений аргумента. Чтобы показать это, на рисунке 17.4 показаны карты тетрации tet_b для близких значений основания, а именно, для $b = 1.5$ слева, для $b = \exp(1/e) \approx 1.44$ в середине, и для $b = \sqrt{2} \approx 1.41$ справа.

Все три карты, показанные на рисунке 17.4, похожи, хотя совершенно разные алгоритмы использованы для вычисления тетрации при указанных значениях основания b . В принципе, тетрацию по основанию $b = \exp(1/e)$ для умеренных значений мнимой части аргумента можно были бы вычислять через тетрацию при чуть бóльших или при чуть мёньших значениях b как предел при $b \rightarrow \exp(1/e)$, ис-

пользуя соответствующие представления.

Читатели приглашаются рассчитать тетрацию при значениях основания $b \approx \exp(1/e)$ и оценить, сколько корректных значащих цифр для тетрации tet_b можно получить таким способом, при условии, что используется арифметика с конечной точностью, например, `complex double`. Заодно, читатели могут проверить, что малость невязки при подстановке приближения тетрации в передаточное уравнение обеспечивает близость к более аккуратному представлению через разложение (11.16).

При $b \rightarrow \exp(1/e)$, эффективность алгоритмов для вычисления тетрации (как через интеграл Коши, так и через регулярную итерацию) уменьшается. Поэтому Генрик Траппманн считал, что тетрация, рассмотренная как функция основания b , в точке $b = \eta = \exp(1/e)$ не является непрерывной, подобно тому, как это изображено на рисунке 17.5. Генрик хотел асимптотическое разложение именно для основания $\eta = \exp(1/e)$ ¹. Пришлось строить разложение (11.16) для $b = \eta$. Я надеюсь, Читатель уже понимает как можно угадывать разложения для экзотических итераций, и сможет написать аналогичное разложение суперфункций и для других передаточных функций, как только Читателю потребуется итерировать такие передаточные функции нецелое количество раз.

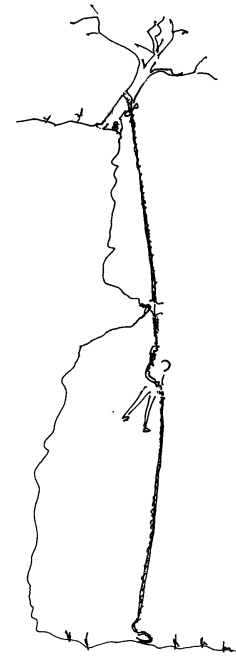


Рис. 17.5:
Неразрывность

Таким образом, я надеюсь, что у коллег не возникнет сложностей сосчитать не только i тую, но и it ую итерацию его или её передаточной функции.² Даже если в стационарной точке производная этой передаточной функции равна единице. Благодаря суперфункциям, такое вычисление становится вполне возможным и естественным.

¹ Это было уже после того, как статья про четыре вещественно-голоморфные суперэкспоненты по основанию $\sqrt{2}$ была направлена в *Mathematics of computation* [50]; как видно, аппетит приходит во время еды.

²Здесь i есть переменная, которая может принимать всякие (и, в частности, вещественные) значения. При этом $i = \sqrt{-1}$ есть константа, которая никаких иных значений принимать не может.

Глава 18

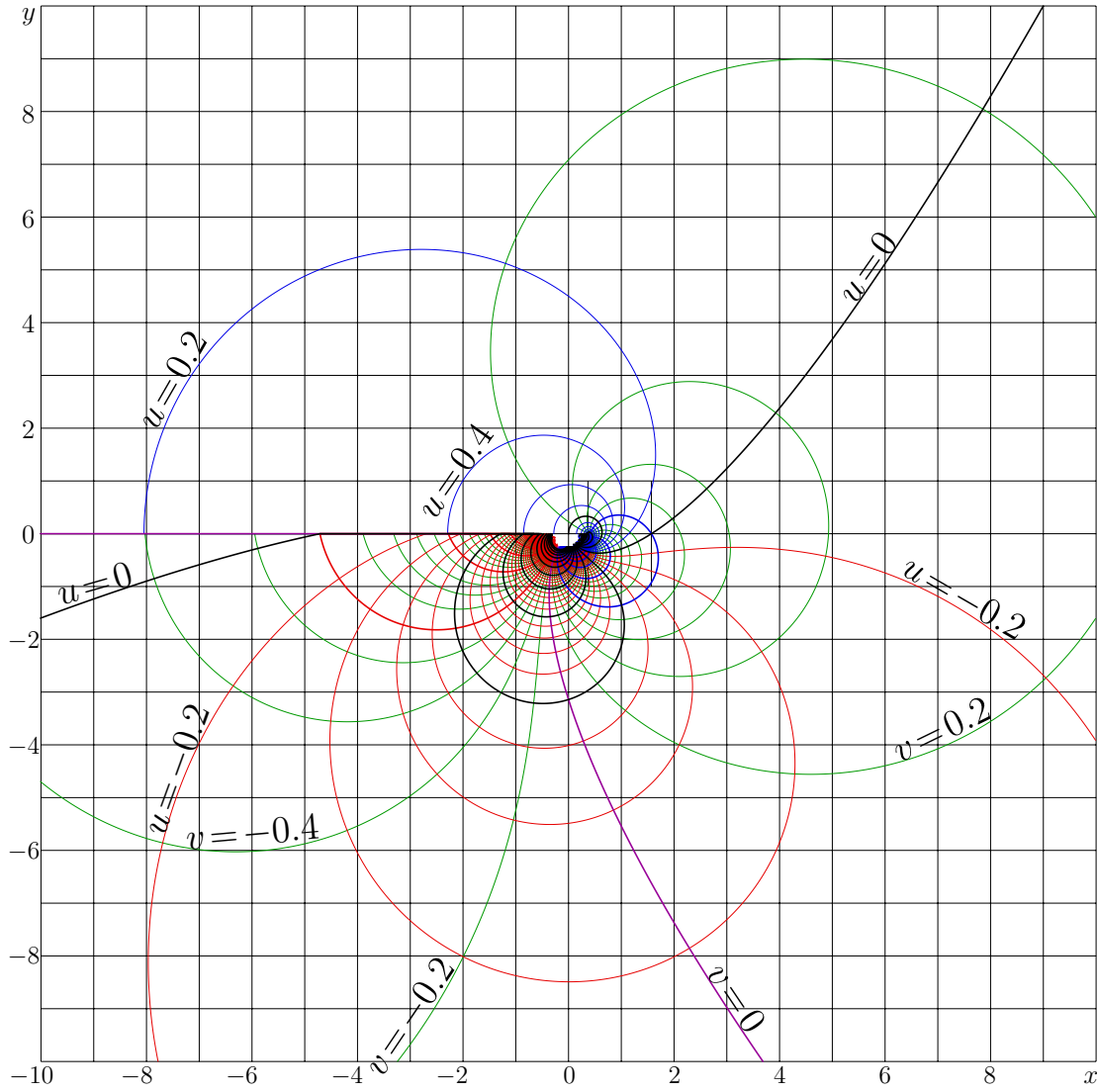
Комплексное основание

В этой главе рассмотрена тетрация по комплексному основанию. То есть для передаточной функции $T(z) = b^z$, где основание b является комплексным числом. В этой Книге основанием называется то, что возводится в степень аргумента при вычислении экспоненциальной передаточной функции.

В принципе, суперфункцию от экспоненты можно строить с помощью регулярной итерации, примерно так же, как в Главе 16 строится тетрация по основанию $\sqrt{2}$. При этом встает вопрос о том, около которой из стационарных точек итерации экспоненты должны быть регулярными. Кроме того, для некоторых значений основания, вещественная часть инкремента k равна нулю; тогда решение трудно строить по его асимптотике.

Ниже, я использую метод интеграла Коши. Этот метод может применяться и для невещественных значений основания. Разумеется, для построения суперфункции F , следует указать, к которым из стационарных точек экспоненты по данному основанию должна эта функция стремиться при стремлении аргумента к $i\infty$ и при стремлении аргумента к $-i\infty$. Из соображений простоты приходится потребовать, чтобы функция стремилась к стационарной точке экспоненты и, желательно, логарифма.

Для построения тетрации по комплексному основанию, следует выразить стационарные точки логарифма как функции этого основания. А ещё лучше - чтобы не возиться с множеством разрезов - как функции логарифма этого основания. Этому посвящена следующая секция.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Filogbigmap100.png>

Рис. 18.1: $u+iv = \text{flog}(x+iy)$, решение $L = \text{flog}(B)$ уравнения (18.1)

1 Стационарные точки логарифма

Пусть $L = \text{flog}(B)$ будет решением уравнения

$$\ln(L) = BL \quad (18.1)$$

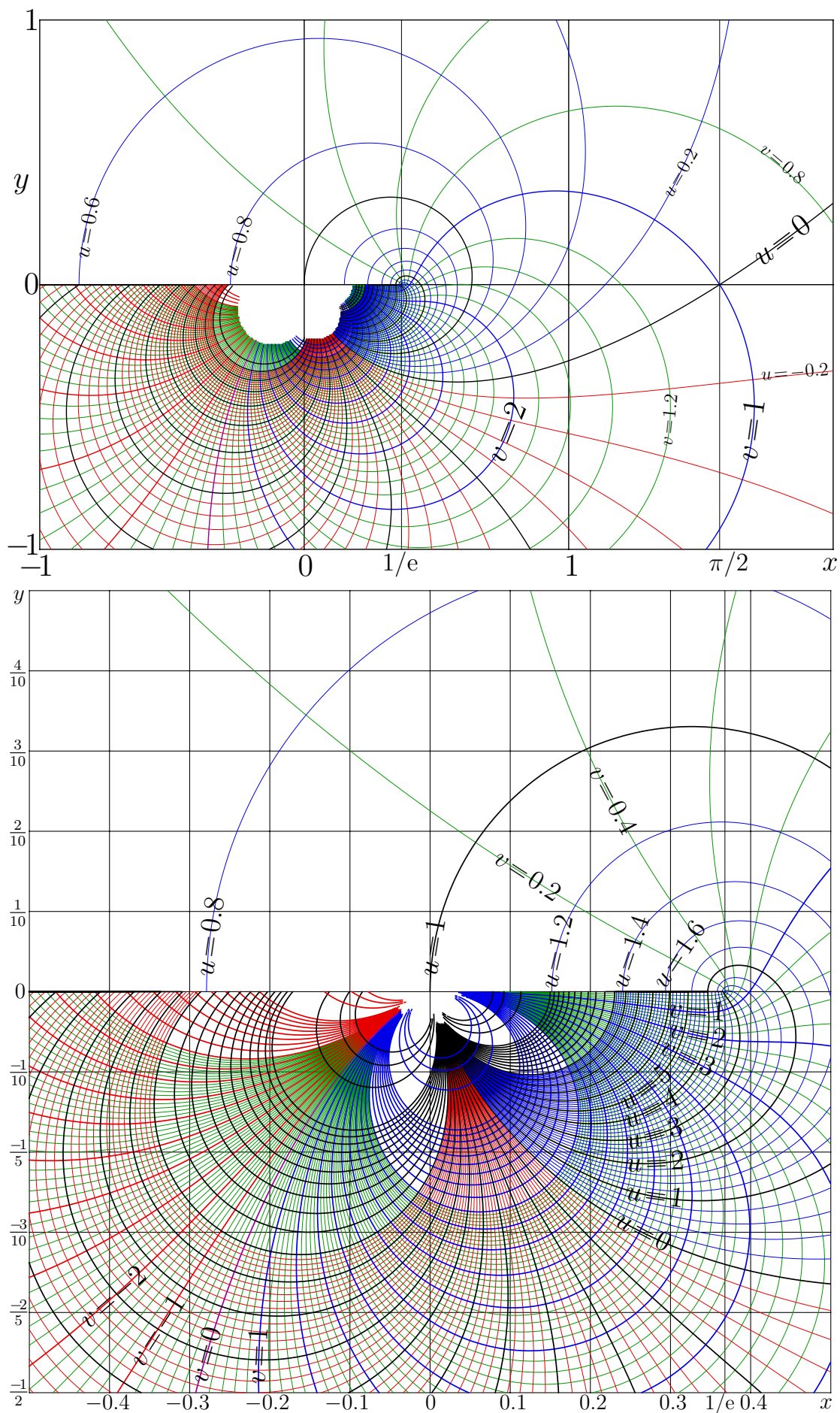
Комплексная карта функции flog показана на рисунке 18.1. Зумин этой карты показан на рисунке 18.2. Пусть

$$B = \ln(b) \quad (18.2)$$

тогда $\text{flog}(B)$ выражает стационарную точку L_1 логарифма по основанию b ; другая стационарная точка L_2 определяется комплексным сопряжением:

$$L_1 = \text{flog}(B) \quad (18.3)$$

$$L_2 = \text{flog}(B^*)^* \quad (18.4)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Figlogzo2t.jpg>

Рис. 18.2: $u + iv = \text{flog}(x + iy)$, зумины центральной части фигуры 18.1

Функцию flog можно выразить через функцию Tania

$$\text{flog}(z) = \frac{\text{Tania}(\ln(z) - 1 - \pi i)}{-z} \quad (18.5)$$

Для построения тетрадии по комплексному основанию, здесь указана именно Таня, по формуле (5.3), а не похожая на неё WrightOmega . Читатели приглашаются попробовать воспроизвести рисунки 18.1 и 18.2, используя ВрайтОмегу вместо Тани, и посмотреть, что получится вместо красивой карты.

Функция flog определяет стационарные точки логарифма по заданному основанию b :

$$L_1 = \text{flog}(\ln(b)) \quad (18.6)$$

$$L_2 = \text{flog}(\ln(b^*))^* \quad (18.7)$$

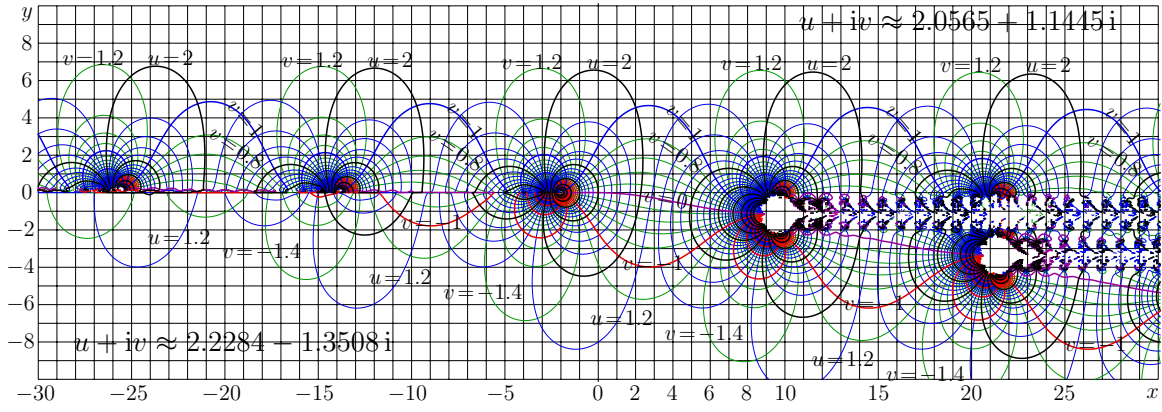
На $\pm i\infty$, тетрация должна стремиться к этим стационарным точкам. Требования (допущения) об асимптотическом поведении тетрации позволяют использовать интеграл Коши для её вычисления. В следующей секции предложен пример использования функции flog для детерминации асимптотического поведения тетрации по комплексному основанию.

2 Tetration to the Sheldon base

В этой секции рассмотрена тетрация по основанию Шелдона,

$$b = 1.52598338517 + 0.0178411853321i \quad (18.8)$$

Это название образовано от имени Шелдон Левенштейн (Sheldon Levenstein); в 2012 году Шелдон ожидал, что при вычислении тетрации по такому основанию возникнут сложности. Вероятно, он имел в виду, что для одной из стационарных точек экспоненты по такому основанию, регулярная итерация затруднительна, так как вещественная часть соответствующего инкремента k близка к нулю. Это был единственный запрос от коллег на вычисление тетрации по специфическому комплексному основанию и заявка Шелдона удовлетворена. Комплексная карта такой тетрации показана на рисунке 18.3.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Tetsheldonmap03.png>

Рис. 18.3: $u+iv = \text{tet}_b(x+iy)$ для $b \approx 1.52598 + 0.01784i$, см. (18.8)

Ниже, я, следуя традициям Советской Школы (рисунок 18.4), описываю тетрацию по основанию Шелдона. Комплексная карта тетрации по такому основанию представлена на рисунке 18.3; сейчас я расскажу, как она вычисляется.

В этой секции предполагается, что основание b определено формулой (18.8). Стационарные точки логарифма по основанию b , то есть решения L уравнения $\ln_b(L) = L$, выражаются через функцию filog :

$$L_1 = \text{filog}(B) \approx 2.0565398441043761 + 1.1445267140098765i \quad (18.9)$$

$$L_2 = \text{filog}(B^*)^* \approx 2.2284359658711805 - 1.3507994961102865i \quad (18.10)$$

$$B = \ln(b) \approx 0.4227073870410604 + 0.0116910660021443i \quad (18.11)$$

Решение F с асимптотиками

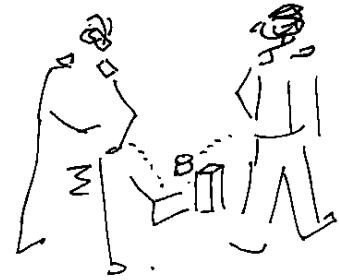
$$F(z) = L_1 + \exp(k_1 z + \phi_1) + \mathcal{O}(\exp(2k_1 z)) \quad \text{при } \Im(z) \rightarrow \infty \quad (18.12)$$

$$F(z) = L_2 + \exp(k_2 z + \phi_2) + \mathcal{O}(\exp(2k_2 z)) \quad \text{при } \Im(z) \rightarrow -\infty \quad (18.13)$$

строится так же, как и для тетрации по вещественному основанию, большему основания Генрика $\eta = \exp(1/e)$. Подстановка асимптотических решений в передаточное уравнение определяет инкременты

$$k_1 = \ln(L_1 b) \approx -0.0047589243931785 + 0.5354935770338939i \quad (18.14)$$

$$k_2 = \ln(L_2 b) \approx 0.0970758595007548 - 0.517289596155984i \quad (18.15)$$



Милиционеры
описывают
имущество

Рис. 18.4: Опись

Соответственно, решение имеет квазипериод

$$P_1 = \frac{2\pi i}{k_1} \approx -0.1042667514229599 i + 11.7325200133916496 \quad (18.16)$$

в верхней части комплексной плоскости и квазипериод

$$P_2 = \frac{2\pi i}{k_2} \approx -2.2018723603861230 i + 11.7331504449085493 \quad (18.17)$$

в нижней части комплексной плоскости.

Сформулированных выше свойств достаточно для того, чтобы через интеграл Коши выразить решение $F(z)$ передаточного уравнения

$$F(z+1) = \exp(B F(z)) \quad (18.18)$$

вдоль полосы $|\Re(z)| < 1$. Такое построение аналогично построению тетрации по основанию e , описанному в главе 14, поэтому я не повторяю описание контура интегрирования и детали итерационной процедуры, дающей аппроксимацию решения. Как и для вещественного основания, тетрация выражается через решение F :

$$\text{tet}_b(z) = F(z_1 + z) \quad (18.19)$$

где z_1 есть решение уравнения $F(z_1) = 1$. Используя передаточное уравнение (18.18), решение можно распространить по крайней мере на правую часть комплексной плоскости. Что касается левой части, то во Втором квадранте координатной плоскости (то есть при $x < 0, y > 0$) возникнут разрезы, неизбежные при использовании логарифмической функции. К сожалению, такие разрезы не уместились в области карты, показанной на рисунке 18.3, хоть я и делаю этот рисунок во всю ширину страницы. То, что такие разрезы (и точки ветвления) имеются, Читатель может видеть из асимптотики (18.12), поскольку для основания Шелдона мнимая часть периода P_1 отрицательна.

Каждый раз, когда тетрация принимает значение ноль, на единичку слева имеется точка ветвления и соответствующий разрез области голоморфизма. Такие разрезы типичны и для других тетраций, даже по вещественному основанию, когда применяется формула

$$F(z) = \log_b^m(F(z+m)) \quad (18.20)$$

для такого целого m , что значение $z+m$ попадает в полосу $|\Re(z)| \leq 1/2$, где формула Коши дает аккуратную первичную аппроксимацию. В этом смысле тетрация по основанию Шелдона аналогична тетрации по вещественному основанию.

3 Область тронной ракушки

При умеренных значениях аргумента z , тетрация $\text{tet}_b(z)$ выглядит гладкой функцией основания b . При больших значениях $\Re(z)$, в зависимости от основания, тетрация либо имеет сложное, квази-хаотическое поведение, либо стремится к одной из своих стационарных точек. На сайте Эретранде, область стремления к стационарному значению названа Shell-Thron region ¹. К сожалению, я не смог извлечь оттуда результатов, которые я бы счел подходящими для этой Книги. Можно образовать “кальку”, переведя английское название как “Область Тронной Ракушки”. Пока трудно судить о том, насколько такое название удобно.

В принципе, при итерировании экспоненты, можно говорить о шестимерном пространстве. Координатами такого пространства являются вещественная и мнимая части основания b , вещественная и мнимая части аргумента и вещественная и мнимая части номера итерации. В шестимерном пространстве могут быть спрятаны нетривиальные эффекты, заслуживающие исследования. Я надеюсь, что их рассмотрение не вызовет сложностей, и поэтому такие эффекты не рассмотрены в этой книге. Я стараюсь работать над такими проблемами, которые считаются неразрешимыми [14].

Я представил один-единственный пример вычисления тетрации по комплексному основанию. Предложенные в этой Книге инструменты позволяют вычислять тетрацию по такому основанию, по какому потребуется. И не только тетрацию. В следующей главе рассмотрен случай, когда тетрация выступает в роли передаточной функции, и вычисляется её суперфункция.

¹ Shell-Thron region:

http://math.eretrandre.org/hyperops_wiki/index.php?title=Shell-Thron_region.

Глава 19

Аскерманны

Old story, century 20:

— Abgam, did you hear, one of us sank “Titanic”.

— Wou! Who did that?

— One says, some Aisbegg!

Old story, century 21:

— Abgam, do you know, one of us asks hoggible questions!

— Who is that man?

— One says, some Askeg-man!

Перевод с Английского:

Старая история, 20й век:

— Абгам, слышал, наши “Титаник” потопили!

— Да ну! А кто?

— Я точно не знаю, но говорят, какой-то Айсбегг!

Старая история, 21й век:

— Абгам, ты слышал, один из наших задает ужасные вопгосы..

— Да ну! А кто?

— Говосят, какой-то Аскегманн!

Я надеюсь, что предложенный выше эпиграф не послужит причиной обвинения меня в антисемитизме. Среди моих соавторов есть и весьма германские арийцы, и столь же семитские евреи. Я вижу особенности каждой из указанных наций; я ценю как еврейскую “ментальность” (достаточно выраженную в так называемых “еврейских анекдотах”), так и арийскую педантичность (столь же выраженную в историях и шутках про “немцев”). Для эффективного научного исследования требуется и то, и другое. Примерно так, для забрасывания баскетбольного мяча в сетку, особенно эффективны качества высоченного бразильца, а для рекордов по спелеологии более важны качества тщедушного вьетнамца или африканского пигмея. Научные исследования отличаются тем, что трудно предсказать, что потребуется: мяч в сетку или пролезть в узкую щель. Одинаково глупо как настаивать на том, что нации “равны” (и запрещать об-

суждать очевидное различие), так и заявлять, что кто-то из них, вообще, “лучше” (и на этом основании требовать для кого-то из них каких-либо специальных прав и привилегий). Я считаю, что такое лирическое отступление помогает понять ментальность и идеологию аскерманнов, о которых идет речь в этой главе.

Для вещественного параметра $b > 1$, называемого базой, тетрацией называется решение $f = \text{tet}_b$ уравнений

$$f(z+1) = b^{f(z)} \quad , \quad f(0) = 1 \quad (19.1)$$

голоморфное по крайней мере в области

$$z \in \mathbb{C} : \Re(z) > -2 \quad (19.2)$$

и ограниченное в области

$$z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 1 \quad (19.3)$$

Уравнение (19.1) является частным случаем цепочки Аскерманна

$$A_1(z) = b + z \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad (19.4)$$

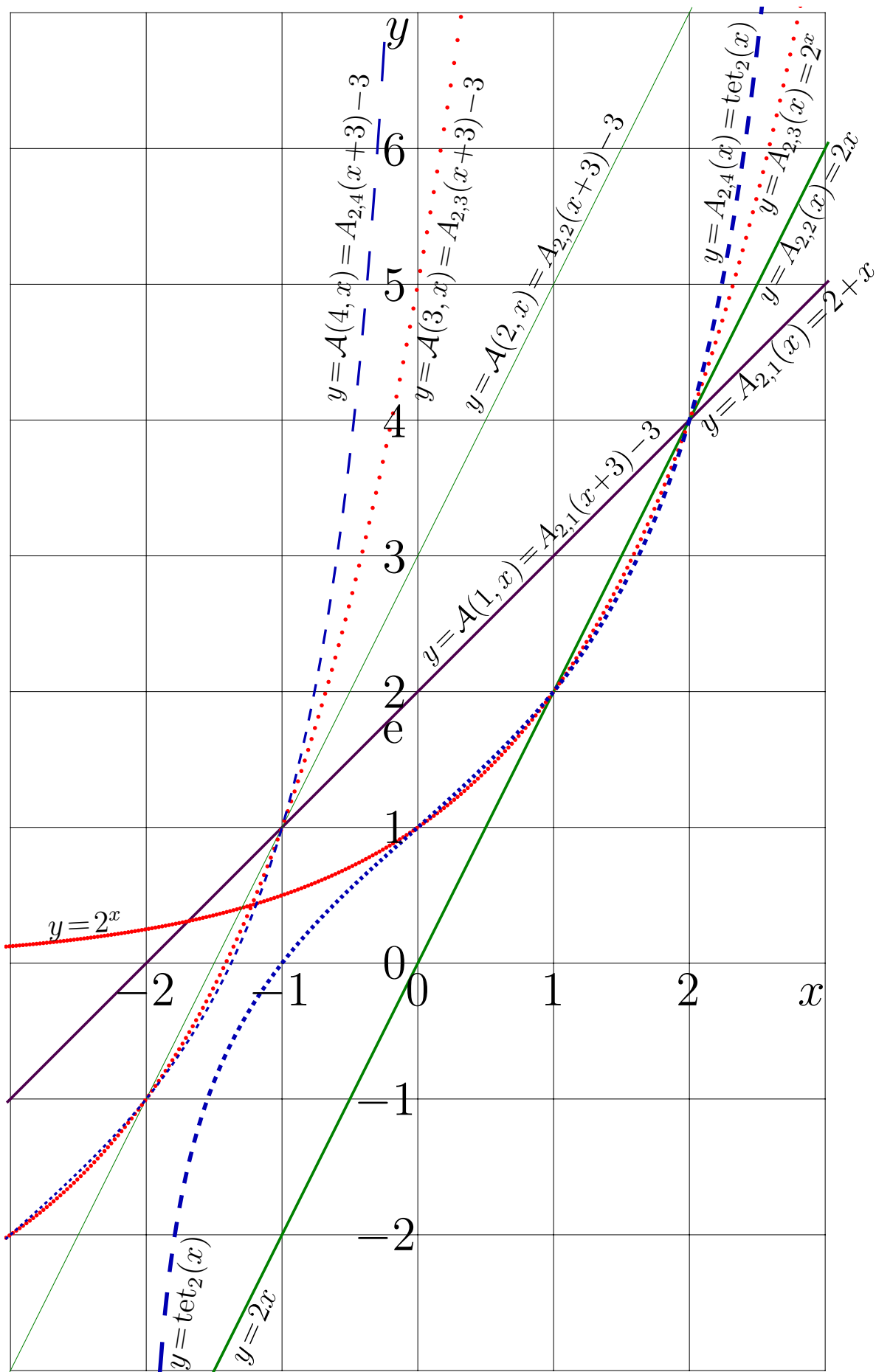
$$A_n(1) = b \quad , \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad (19.5)$$

$$A_n(z+1) = A_{n-1}(A_n(z)) \quad , \quad n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad (19.6)$$

Функции A здесь называются аскерманами (с маленькой буквы), чтобы не путать их с великим и могучим математиком Вильгельмом Аскерманном (Wilhelm Ackermann) [7]. Именно об аскерманнах идет речь в этой главе.

Первые три аскерманна являются элементарными функциями. Интерес представляет построение высших аскерманнов. Такое построение помогает, в частности, проверить, отточить общие методы построения суперфункций.

Для основания $b=2$, Графики первых четырех аскерманнов показаны на рисунке 19.1 жирными кривыми: сплошной, сплошной, точковой и пунктиром. Тонкие кривые относятся несколько иной системе обозначений, рассмотренной в следующей секции.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Acker2t400.jpg>

Рис. 19.1: Сравнение обозначений для двоичных аскерманнов

1 Двоичные аскерманны

Ранее, аскерманны рассматривались преимущественно по основанию $b=2$. Чтобы не путать их с аскерманными по другим основаниям, аскерманны по основанию 2 я называю бинарными, или классическими, или каноническими. Я не знаю, какой из этих терминов (и из этих ли) окажется более удобным.

Для бинарных аскерманнов используются специальные обозначения. Номер аскерманна записывается в виде дополнительного, первого аргумента, а значение основания b не указывается вовсе. В некотором смысле это оправдано: какой смысл указывать основание, если оно всегда константа, равная двум? Связь классических (и пока общепринятых) обозначений для $b=2$ с аскерманными по формулам (19.4) (19.5) (19.6) можно выразить простой формулой

$$\mathcal{A}(m, z) = A_{2,m}(z + 3) - 3 \quad (19.7)$$

В частности,

$$A_{2,1}(x) = 2 + x = \mathcal{A}(1, x+3) - 3 = \mathcal{A}(1, x) \quad (19.8)$$

$$A_{2,2}(x) = 2x = \mathcal{A}(2, x+3) - 3 \quad (19.9)$$

$$A_{2,3}(x) = \exp_2(x) = \mathcal{A}(3, x+3) - 3 = 2^x \quad (19.10)$$

$$A_{2,4}(x) = \text{tet}_2(x) = \mathcal{A}(3, x+3) - 3 \quad (19.11)$$

Чтобы показать связь между A с индексом и одним аргументом и \mathcal{A} без индекса, но с двумя аргументами, на рисунке 19.1 такие аскерманны построены как функции вещественного аргумента.

$y = A_{2,m}(x)$ для $m = 1, 2, 3, 4$ показаны толстыми линиями (сплошной, сплошной, точковой, и пунктиром);

$y = \mathcal{A}(m, x)$ для $m = 1, 2, 3, 4$ показаны тонкими линиями (сплошной, сплошной, точковой, и пунктиром).

Ввиду соотношения (19.7), толстые линии образуются из тонких смещением, трансляцией на 3 единицы вдоль оси x и настолько же по оси y . Лишь прямая для первого аскерманна при такой трансляции переходит сама в себя.

Специально для бинарных аскерманнов, система уравнений (19.4), (19.5), (19.6) может быть слегка расширена, чтобы включать “нулевой” аскерманн. Уравнения для \mathcal{A} могут быть записаны так:

$$\mathcal{A}(0, z) = z + 1 \quad (19.12)$$

$$\mathcal{A}(m+1, 0) = \mathcal{A}(m, 1) \quad (19.13)$$

$$\mathcal{A}(m+1, z+1) = \mathcal{A}\left(m, \mathcal{A}(m+1, z)\right) \quad (19.14)$$

Смещение и аргумента функции, и значения этой функции по формуле (19.7) соответствует преобразованию сопряжения. Поэтому передаточное уравнение (19.14) для бинарного аскерманна в “классических” обозначениях имеет такой же вид, как и передаточное уравнение (19.6).

Одним из применений аскерманнов является обозначение больших чисел (для вещественного аргумента). За счет смещения аргумента, канонические бинарные аскерманны могут создавать видимость несколько более быстрого роста, чем аскерманны по формулам (19.4), (19.5), (19.6). Однако, для приложений, такое “ускорение” навряд ли существенно; и обозначения в формулах (19.4), (19.5), (19.6) мне представляются более удобными, чем канонические. Потому как в обозначениях (19.4), (19.5), (19.6) третий аскерманн оказывается просто экспонентой, четвертый - просто тетрацией, и так далее. Кроме того, если рассматривать свойства голоморфизма и итерации по последнему аргументу, а остальные аргументы (основание b и номер аскерманна m) считать параметрами, то удобно записывать эти параметры в виде индекса. Я надеюсь, что у Читателя не возникнет проблем с использованием соотношения (19.7) для перехода из одной системы обозначений в другую.

2 Названия

В 20 веке, функции Аскерманна обычно рассматривались для основания $b = 2$ и только для целых значений z . Пока не видно принципиальных ограничений, которые препятствовали бы вычислению такой функции для комплексных значений b и z ; разумеется, подходящие требования на область голоморфизма должны быть сформули-

рованы. Есть надежда, что для всех аскерманов можно потребовать голоморфизма по крайней мере в некоторой окрестности вещественной оси. Решение передаточного уравнения не единственно, поэтому следует либо указывать способ построения каждого аскерманна, либо изобретать требования на поведение аскерманнов в комплексной плоскости.

Несколько первых аскерманнов имеют специальные названия:

$A_{b,1} = z \mapsto b+z$, добавление константы b ,

$A_{b,2} = z \mapsto bz$, умножение на константу b ,

$A_{b,3} = \exp_b = z \mapsto \text{pow}(b, z) = z \mapsto b^z$, экспонента по основанию b ,

$A_{b,4} = \text{tet}_b = z \mapsto \text{tet}_b(z)$, тетрация по основанию b ,

$A_{b,5} = \text{pen}_b = z \mapsto \text{pen}_b(z)$, пентация по основанию b .

Следующие функции могут обозначаться символами hex_b , hep_b , oct_b, \dots и называться, соответственно, терминами “гексация” (hexation), “гептация” (heptation), “октация” (octation) и т.д. Такие обозначения получаются при транслитерации латинских числительных и сокращении имен функций до трех букв.¹

Изначально, формализм суперфункций разрабатывался для тетрации, то есть суперфункции от экспоненты. Однако этот формализм может применяться и для других передаточных функций, и, в частности, для различных аскерманнов. Как пример, в следующей секции рассмотрена пентация.

3 Пентация

Если Математику дать чайник, газовую плиту, спички и кран с водой, и попросить вскипятить чай, то он нальет в чайник воду, зажжет газ и поставит чайник на огонь. Но если после этого Математика ещё раз попросят вскипятить чай, когда вода уже в чайнике,

¹Суперфункции расширяют возможности посылать на три буквы. В принципе, для гексации можно было бы использовать латинское слово *sextus* (“sixth”, шесть) и образовать термин “сексация”, обозначая соответствующую функцию sex_b . Однако, судя по тому, какие сайты предлагают базы данных при поиске с ключевым словом sex_b , человеческая цивилизация ещё не вполне созрела для сексации, и для суперфункции от пентации, то есть для шестого аскерманна, лучше использовать термин “гексация”.

а газ горит, то Математик выльет воду, погасит газ и произнесёт заклинание: “Задача сведена к предыдущей”.

Я надеюсь, что методами, описанными в выше, Читатель уже и сам может вычислять суперфункции и, в частности, тех аскерманов, какие ему понадобятся. Однако я больше физик, чем математик. Поэтому, вместо того, чтобы произнести заклинание “задача сведена к предыдущей”, я предлагаю пример вычисления ещё одного аскерманна, натуральной пентации, то есть $\text{pen} = \text{pen}_e = A_{e,5}$.

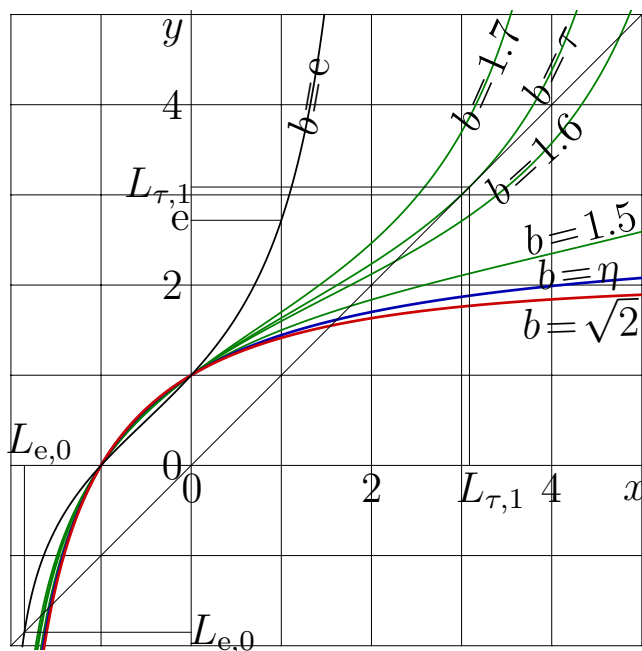


Рис. 19.2: $y = \text{tet}_b(x)$, фрагмент рисунка 17.1; добавлены прямая $y = x$ и график $y = \text{tet}_\tau(x)$

Ключевой вопрос при построении суперфункции - о стационарных точках передаточной функции. Для пентации передаточной функцией является тетрация tet , рассмотренная в главе 14. Вещественные стационарные точки тетрации показаны на рисунке 19.2. Это модификация рисунка 17.1: некоторые кривые убраны; добавлена кривая для тетрации по основанию $b = \tau \approx 1.63532$, где τ есть такое основание, что кривая $y = \text{tet}_\tau(x)$ касается прямой $y = x$. Точка касания имеет координаты $(L_{\tau,1}, L_{\tau,1})$, при этом $L_{\tau,1} \approx 3.087$. Для этого значения на рисунке 19.2 проведены дополнительные линии координатной сетки.

При значениях основания $b > \tau$, тетрация tet_b имеет только одну вещественную стационарную точку, и это, в частности, случай натуральной тетрации $\text{tet} = \text{tet}_e$. Для натуральной тетрации, эта стационарная точка $L_{e,0} \approx -1.85035452902718$, и для этого значения на рисунке 19.2 тоже проведены дополнительные координатные линии. Именно эта стационарная точка тетрации выбрана для построения натуральной пентации pen , то есть пятого аскерманна по основанию

$$e = \exp(1) \approx 2.71 .$$

Натуральной пентацией, или пятым аскерманом по основанию e , я называю суперфункцию от тетрации, построенную регулярной итерацией на стационарной точке $L_{e,0}$, и приближающуюся к этой стационарной точке на минус бесконечности.

Для передаточной функции tet , уравнение для суперфункции F записывается так:

$$F(z+1) = \text{tet}(F(z)) \quad (19.15)$$

Я строю растущее вдоль вещественной оси решение F этого уравнения методом регулярной итерации на стационарной точке тетрации $L = L_{e,5,0} \approx -1.85035452902718$; чтобы упростить выборочное чтение лишь некоторых глав этой книги, я привожу ниже ключевые формулы этого построения.

Для некоторого натурального числа M , я ищу асимптотическое решение F уравнения (19.15):

$$F(z) = f(z) + O(\varepsilon^M) \quad (19.16)$$

где

$$f(z) = L_{e,4,0} + \sum_{m=1}^{M-1} a_m \varepsilon^m \quad (19.17)$$

$$\varepsilon = \exp(kz) \quad (19.18)$$

Здесь положительная константа k имеет смысл инкремента роста суперфункции при больших отрицательных значениях аргумента, а a суть вещественные коэффициенты. Для простоты, удобно положить $a_1 = 1$. Подстановка представления (19.16), (19.17) в передаточное уравнение (19.15) и асимптотический анализ с малым параметром ε дают оценки инкремента $k \approx 1.86573322821$ и первых коэффициентов: $a_2 \approx -0.6263241$, $a_3 \approx 0.4827$. При $M=4$, эти значения для супертетрации определяют первичную аппроксимацию f по формуле (19.17). Такая аппроксимация хороша при больших отрицательных значениях вещественной части аргумента супертетрации. Затем, для целых n , я определяю

$$F_n(z) = \text{tet}^n(f(z-n)) \quad (19.19)$$

В соответствии с общим методом регулярной итерации, точное представление супертетрации F получается как предел

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) \quad (19.20)$$

Ввиду того, что f есть асимптотическое решение, этот предел не зависит от выбранного номера M ; разумеется, при больших значениях M , предел сходится быстрее, чем для малых.

Чтобы для пятого аскерманна получить требуемое значение e в единице, я определяю этого аскерманна как функцию F со смещенным аргументом,

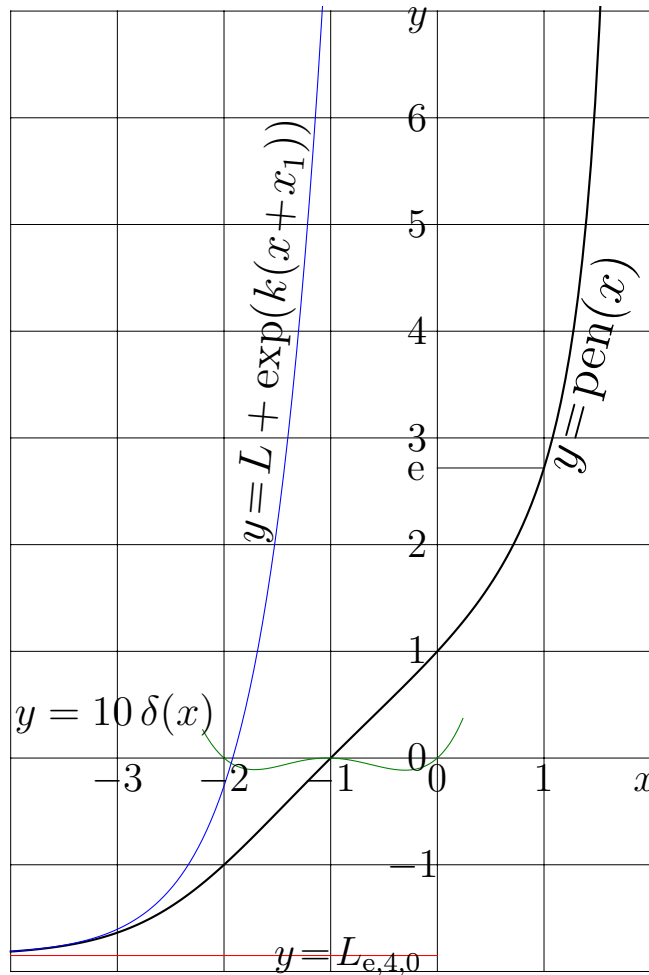


Рис. 19.3: $y = \text{rep}(x)$ по формуле (19.21), её асимптотика (19.22) и погрешность линейной аппроксимации по формуле (19.24)

$$\text{rep}(z) = F(x_1 + z) \quad (19.21)$$

где x_1 есть решение уравнения $F(x_1) = 1$. Такое построение я принимаю за определение пентации. Для вещественных значений аргумента, график пентации показан на рисунке 19.3 толстой линией.

Для построения чистовых рисунков, достаточно взять $M = 4$, и для аппроксимации предела в формуле (19.19) выбрать значение $n = 7$. Условие $\text{tet}(0) = 1$ эквивалентно уравнению $F(x_1) = 1$ и дает оценку $x_1 \approx 2.24817451898$; теперь алгоритм вычисления пентации готов к употреблению. Для более эффективной имплементации можно подсчитать ещё с десяток коэффициентов a и добавить в алгоритм автоматическую оценку количества итераций в формуле (19.19), необходимого для быстрой оценки предела с высокой аккуратностью.

На рисунке 19.3, дополнительная горизонтальная линия указывает предельное значение $L = L_{e,4,0}$, эта линия позаимствована с рисунка

19.2. Она указывает предельное значение пентации на минус бесконечности, это горизонтальная асимптота графика пентации. Кроме того, на рисунке более тонкой кривой показана экспоненциальная асимптотика пентации,

$$y = L_{e,4,0} + \exp(k(x+x_1)) \quad (19.22)$$

Эта асимптотика соответствует значению $M = 2$ в первичной аппроксимации пентации по формуле (19.17).

Пентация может быть аппроксимирована линейной функцией,

$$\text{pen}(x) \approx 1 + x \quad (19.23)$$

При $-2.1 < x < 0.1$, аппроксимация (19.23) дает около двух значащих цифр. Погрешность аппроксимации (19.23) может быть выражена функцией

$$\delta(x) = \text{pen}(x) - (1+x) \quad (19.24)$$

Тонкая кривая на рисунке 19.3 показывает эту погрешность. Чтобы она была видна, её пришлось умножить на 10; иначе она сливалась с осью абсцисс. Таким образом, построена кривая $y = 10\delta(x)$. Интересно, что линейная функция в правой части (19.23) аппроксимирует также и предыдущего аскерманна, то есть тетрацию, график которой показан на рисунке 14.1. Для тетрации функция в правой части формулы (19.23) тоже дает около двух значащих цифр, но область применимости линейной аппроксимации пентации шире, чем область применимости этой аппроксимации для тетрации.

Для комплексных значений аргумента, комплексная карта пентации по формуле (19.21) показана на рисунке 19.4. Пентация голоморфна в левой части карты. Когда вещественная часть аргумента стремится к минус бесконечности, пентация экспоненциально стремится к предельному значению $L = L_{e,4,0} \approx -1.850354529$, указанному на рисунке 19.2. Чтобы показать это более наглядно, на рисунке 19.4 толстой светлой полосой показан дополнительный уровень $u = L_{e,4,0}$.

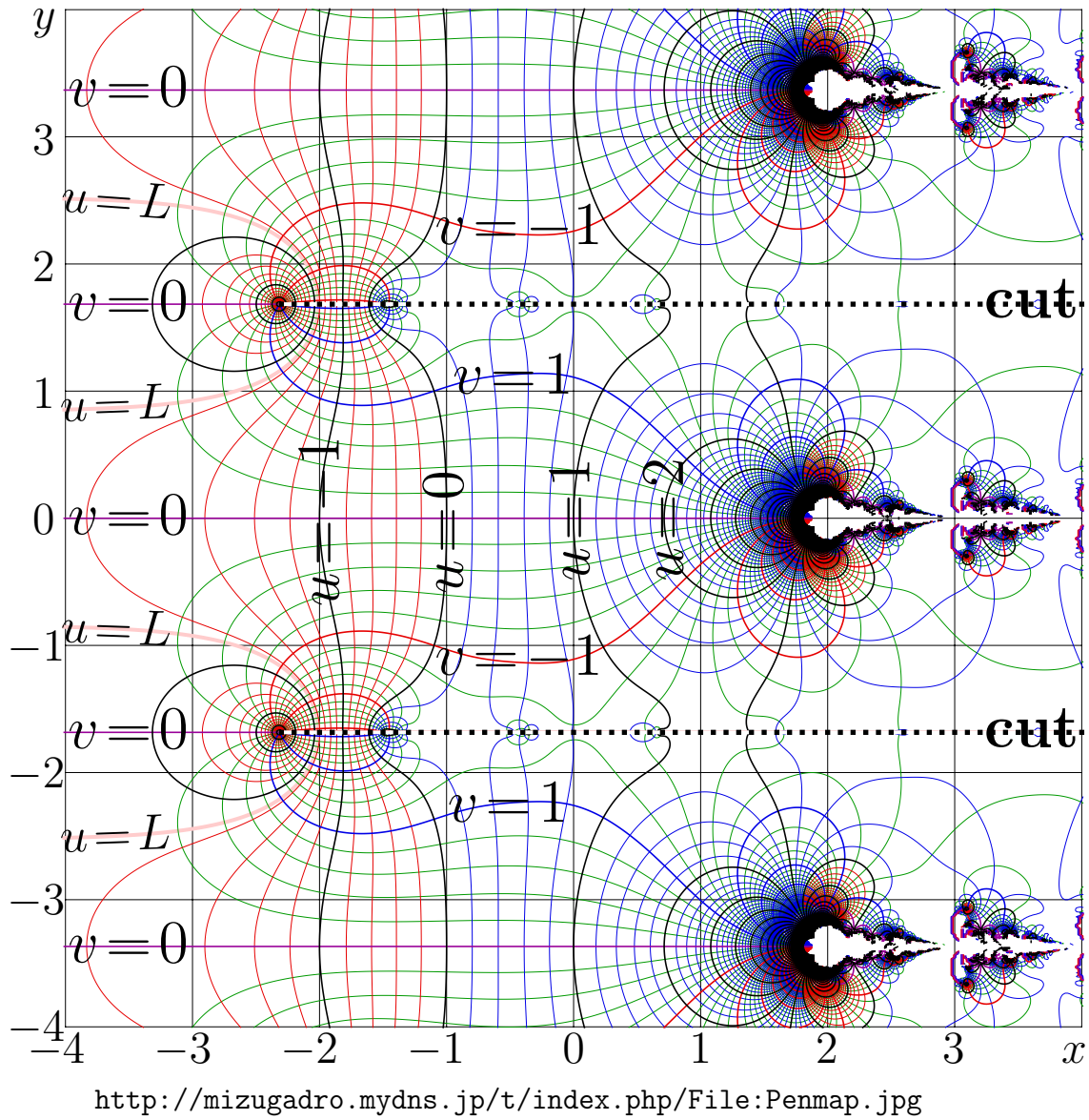


Рис. 19.4: $u+iv = \text{pen}(x+iy)$ по формуле (19.21)

Пентация периодична, её период P определяется инкрементом k , то есть, в конечном счете, производной тетрации в стационарной точке $L_{e,4,0}$. Этот период чисто мнимый,

$$P = \frac{2\pi i}{k} \approx 3.36767615657879i \quad (19.25)$$

На комплексной карте пентации, при трансляциях на целое число периодов, линии постоянной вещественной части функции и линии постоянной мнимой её части воспроизводятся. Воспроизводятся также и разрезы области голоморфизма.

Вдоль вещественной оси, пентация быстро растет (гораздо ещё по сравнению с тетрацией). Как и для других быстро растущих функций, карта пентации в окрестности положительной части веществен-

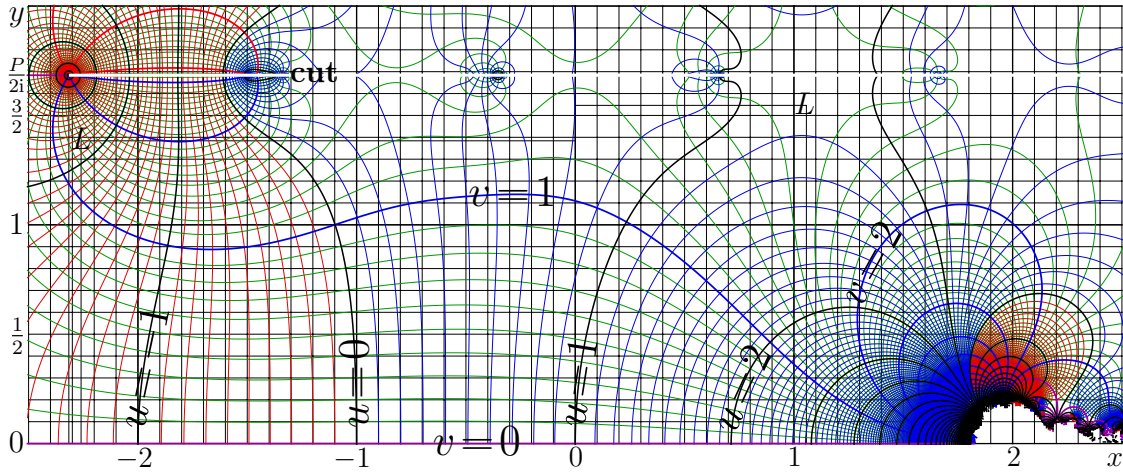


Рис. 19.5: $u+iv = \text{rep}(x+iy)$ по формуле (19.21), зумин рисунка 19.4

ной оси имеет сложную структуру; пентация изменяется с охренительными производными. Построитель карт `contourcin` не смог провести линии так часто, и эта область осталась пустой. Чтобы хоть как-то показать её структуру, на рисунке 19.5 показан зумин карты с рисунка 19.4. Рост аскерманнов, начиная даже с тетрации (а пентация и подавно) существенно опережает возможности зуммирования.

Методы построения суперфункций могут использоваться для построения более высоких аскерманнов. В частности, как только рост тетрации окажется недостаточно быстрым для каких-либо приложений, можно построить голоморфную пентацию. На минус бесконечности пентация стремится к стационарной точке $L = L_{e,4,0} \approx -1.850354529$ такой, что $L = \text{tet}(L)$. Более подробно стационарные точки пентации обсуждаются в следующей секции.

4 Стационарные точки пентации

Чтобы сделать следующего, шестого аскерманна (гексацию), следует построить аркпентацию $\text{are} = \text{rep}^{-1}$. Можно обратить асимптотическое разложение для пентации либо получить такое же разложение асимптотическим анализом соответствующего уравнения Абеля.

Для того, чтобы показать, что суперфункции пентации могут строиться обычным способом, по аналогии с тетрацией, на рисунке 19.5 указаны две стационарные точки пентации, они обозначены симво-

лом L и снабжены дополнительными координатными линиями. Их приближенные значения можно найти, считая пальцем координатные линии и линии уровня. Эти значения суть

$$L = L_{e,5,0} \approx -2.260 + 1.384i \quad (19.26)$$

$$L = L_{e,5,1} \approx 1.057 + 1.546i \quad (19.27)$$

Ещё имеются значения вблизи вещественной оси; в частности,

$$L = L_{e,5,2} \approx 3.43 + 0.07i \quad (19.28)$$

$$L = L_{e,5,3} \approx 4.39 + 0.11i \quad (19.29)$$

но они не поместились на странице. Пентация вещественно голоморфна, поэтому значения L^* также являются стационарными точками. Читатели приглашаются численно решить уравнение

$$\text{pen}(L) = L \quad (19.30)$$

и уточнить значения $L_{e,5,0}$ и $L_{e,5,1}$. Если тетрация и арктетрация сделаны с 14ю значащими цифрами, то можно надеяться получить хотя бы 12 значащих цифр для пентации, аркпентации и их стационарных точек.

Я ожидаю, что для пентации можно построить суперфункцию, гексацию hex, как вещественно-голоморфное решение F уравнения

$$F(z+1) = \text{pen}(F(z)) \quad (19.31)$$

с дополнительными условиями

$$F(0) = 1 \quad (19.32)$$

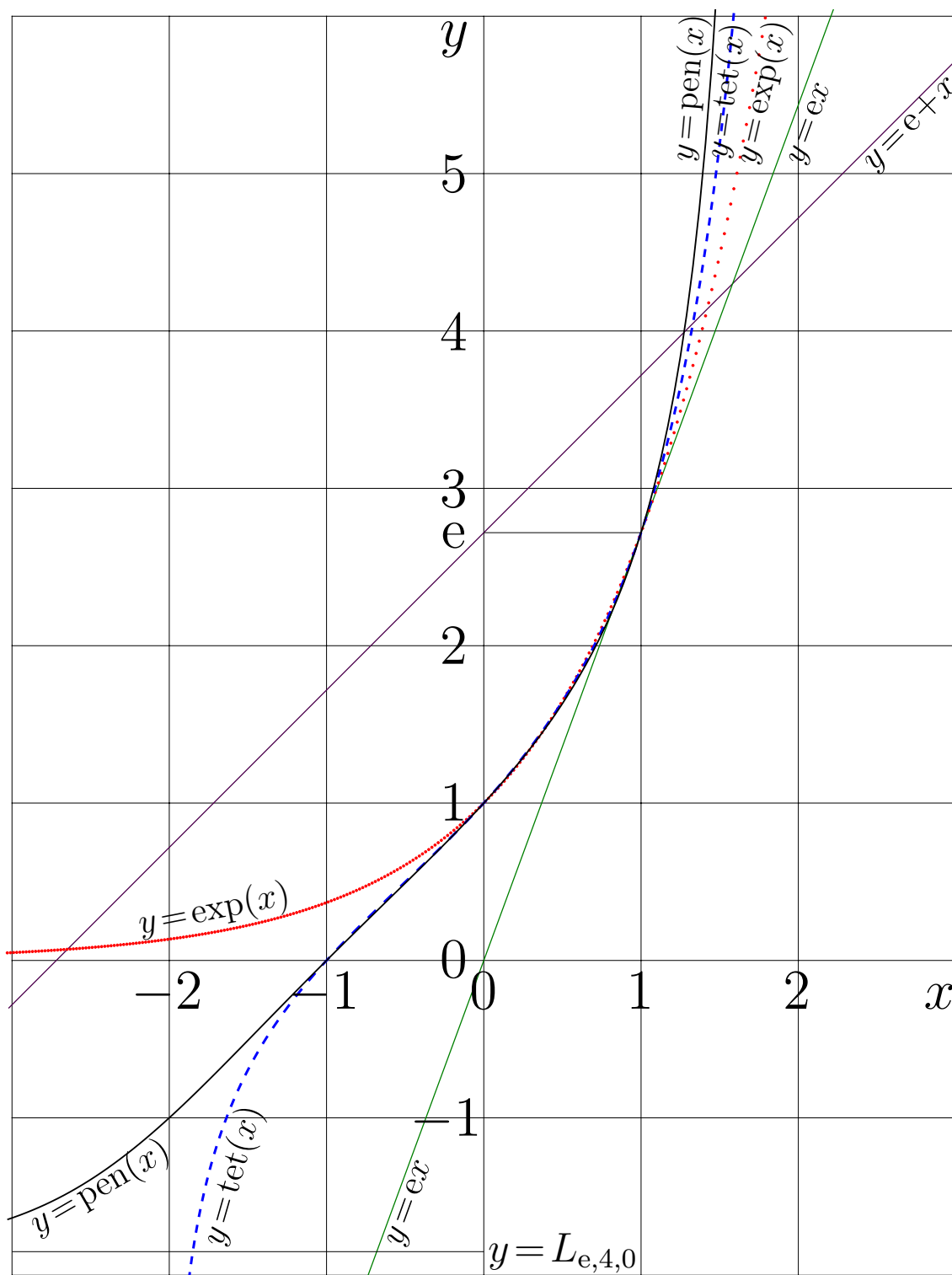
$$F(i\infty) = L_{e,5,0} \quad (19.33)$$

$$F(-i\infty) = L_{e,5,0}^* \quad (19.34)$$

Читатели приглашаются построить такую гексацию и, в частности, нарисовать для неё графики и комплексную карту. Стационарная точка гексации определяет асимптотическое поведение следующего, седьмого аскерманна; он может называться гептацией, и так далее. При этом предыдущий аскерманн используется как передаточная функция, и новый аскерманн получается как соответствующая суперфункция.

5 Сравнение натуральных аскерманнов

В этой секции сравниваются свойства первых пяти функций Аскерманна для натурального основания, $b = e$, и для вещественного аргумента. Графики этих функций показаны на рисунке 19.6.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Ackerplot400.jpg>

Рис. 19.6: $y = A_{e,n}(x)$ for $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Для случая натурального основания. $b=e$, я не указываю основание в индексе, то есть

$A_{e,1}(z) = e+z$, добавление константы e ,

$A_{e,2}(z) = e z$, умножение на константу e ,

$A_{e,3}(z) = \exp(z) = e^z$, натуральная экспонента,

$A_{e,4}(z) = \text{tet}(z)$, тетрация по основанию e ,

$A_{e,5}(z) = \text{pen}(z)$, пентация по основанию e .

Именно эти обозначения без индекса использованы для маркировки кривых $y = A_{e,n}(x)$ на рисунке 19.6.

Поведение тетрации и пентации на отрезке от -1 до 1 сходно. Однако, даже на этом отрезке, расстояние между кривыми достигает ширины линий и заметно на рисунке 19.6.

Возможно, для каких-либо приложений понадобится тетрация по комплексному основанию или даже более высокие аскерманны по комплексному основанию. Такие аскерманны могут вычисляться методами, представленными в этой Книге, и их вычисление не требует каких-либо специфических еврейских трюков, ни специфической германской педантичности. Я надеюсь, что Исследователь любой национальности сможет вычислить этих аскерманнов, и, в частности, тетрацию, и пентацию, как только они потребуются в каких-либо изысканиях или приложениях, или даже из спортивно-научного интереса, и с такой аккуратностью, которая ему потребуется.

6 Синдром последнего коэффициента

Я спрашиваю себя: “*почему бы не сделать гексацию так же, как уже сделана тетрация и пентация?*”. Для того, чтобы объяснить это, мне придется копирастнуть ещё одно лирическое отступление.

Допустим, исследователь придумал совершенно новую и безумно красивую функцию. Он строит график, ну, скажем, от -4 до 4 . Не все пышные округлости функции умещаются на графике, и исследователь строит её же от -10 до 10 . Но последняя осцилляция не видна, и он расширяет область значений до интервала $[-11, 11]$. И так далее. Наконец, когда график расширился настолько, что цен-

тральную часть уже видно только в лупу, исследователь начинает вычислять, ну, скажем, её разложение в ряд Тэйлора. Он считает первые 5 коэффициентов и вклеивает их в свою фундаментальную статью. Он смотрит на них, и ему кажется, что следующий коэффициент мог бы помочь пониманию. Он считает шестой коэффициент и расширяет таблицу. Но ему тут же кажется, что еще один (только один!) коэффициент сильно улучшит статью...

- Стоп, - оборвет меня Читатель, - Что за чушь? Он что, больной?.. Да, дорогой Читатель, да; именно так. Эта болезнь называется Синдром Последнего Коэффициента. Примерно так же в повести о Хадже Насреддине ростовщик Джафар каждый раз мечтает наполнить золотом еще один (только один!) горшок ². Примерно так же маньяк-убийца, получив высшую власть, каждый раз думает, что теперь достаточно “убрать” (так на чекистском жаргоне называется политическое убийство) пару кляузников (всего двух!), и стране настанет полный порядок. Или как алкоголик каждый раз хочет только одну (единственную!) рюмку водки.

Все упомянутые лица больны синдромом последнего коэффициента. Я тоже страдаю от этого недуга. В порядке лечения, я не включаю сюда гексацию, то есть шестого аскерманна, ни даже аркпентацию, которая нужна для построения шестого аскерманна методом Коши - тем же методом, которым строится натуральная (и не только) тетрация.

Сколько бы аскерманнов я не загрузил, всегда будет такой, для которого в Книге ещё нет ни одного рисунка. Есть и иная мотивация к тому, чтобы в какой-то момент остановиться с этой Книгой - чтобы

² <http://coollib.net/b/43714/read> Леонид Соловьев. Возмутитель спокойствия. (Повесть о Хадже Насреддине) ..во дворе собрались многочисленные родственники Джафара. Многие из них были должны ему и надеялись, что сегодня на радостях он простит долги. Напрасно они надеялись: ростовщик слышал через закрытую дверь голоса своих должников и злобно усмехался в душе. «Я скажу им сегодня, что прощаю долги, – думал он, – но расписок я им не верну, расписки останутся у меня. И они, успокоившись, начнут беспечную жизнь, а я ничего не скажу, я буду молчать, но втайне все время подсчитывать. И когда на каждую таньга долга нарастет еще десять таньга и сумма долга превысит стоимость домов, садов и виноградников, принадлежащих ныне моим должникам, я позову судью, откажусь от своего обещания, предъявлю расписки, продам все их имущество, оставлю их нищими и наполню золотом еще один горшок!»

все-таки закончить Книгу в этом веке. Эта мотивация показана на рисунке 19.7.

На этом я заканчиваю рассмотрение регулярных и не очень итраций, а также прочих интегралов Коши. Надеюсь, что читатель уже понял, чем Фудоки отличаются от Нибелунгов, и может самостоятельно построить всех аскерманнов, которые ему понадобятся.

Теперь гораздо важнее рассмотреть хотя бы один случай, когда методы, описанные выше, не работают. Такое очень даже может приключиться, если у трансцендентной передаточной функции вообще нет стационарных точек. Пример такой функции рассмотрен в следующей главе.

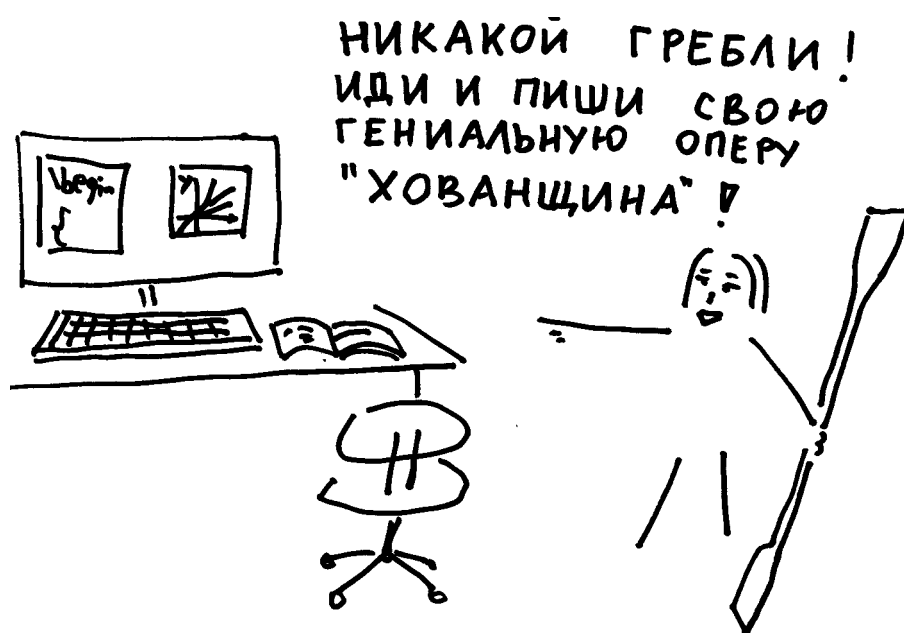


Рис. 19.7: Девушка с веслом [15]: Никакой гребли, пока не допишешь свою Книгу!

Глава 20

Без стационарных точек

В этой главе рассмотрен пример передаточной функции без стационарных точек. Для такой функции трудно применить метод регулярной итерации или метод Коши, использованные в предыдущих главах. Однако, тем не менее, даже для такой передаточной функции можно построить суперфункцию, абельфункцию и, соответственно, нецелые итерации. Ниже пересказывается содержание статьи [77].

1 Функция Траппманна

В этой Книге, функцией Траппманна называется элементарная функция

$$\text{tra}(z) = \exp(z) + z \quad (20.1)$$

Эта функция показана на рисунке 20.1 в сравнении с экспонентой.

Функция tra должна была стать ловушкой (“trap”), чтобы поймать меня на заявлении о том, что я могу построить суперфункцию (а также абельфункцию и соответствующие итерации) для какой ни попади передаточной функции.

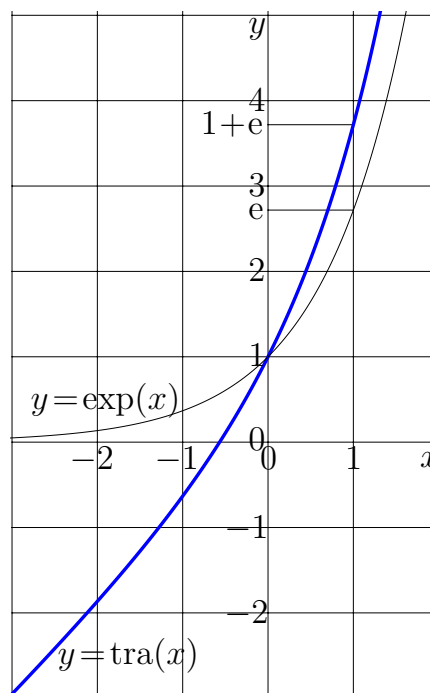


Рис. 20.1: $y = \text{tra}(x)$ и $y = \exp(x)$

Впрочем, английское слово “trap” можно интерпретировать также как трап, то есть путь к дальнейшим успехам в решениях передаточных уравнений и итерированиях всяческих функций. Таким образом, функция tra , хоть и является элементарой, чрезвычайно важна и заслуживает специального имени.

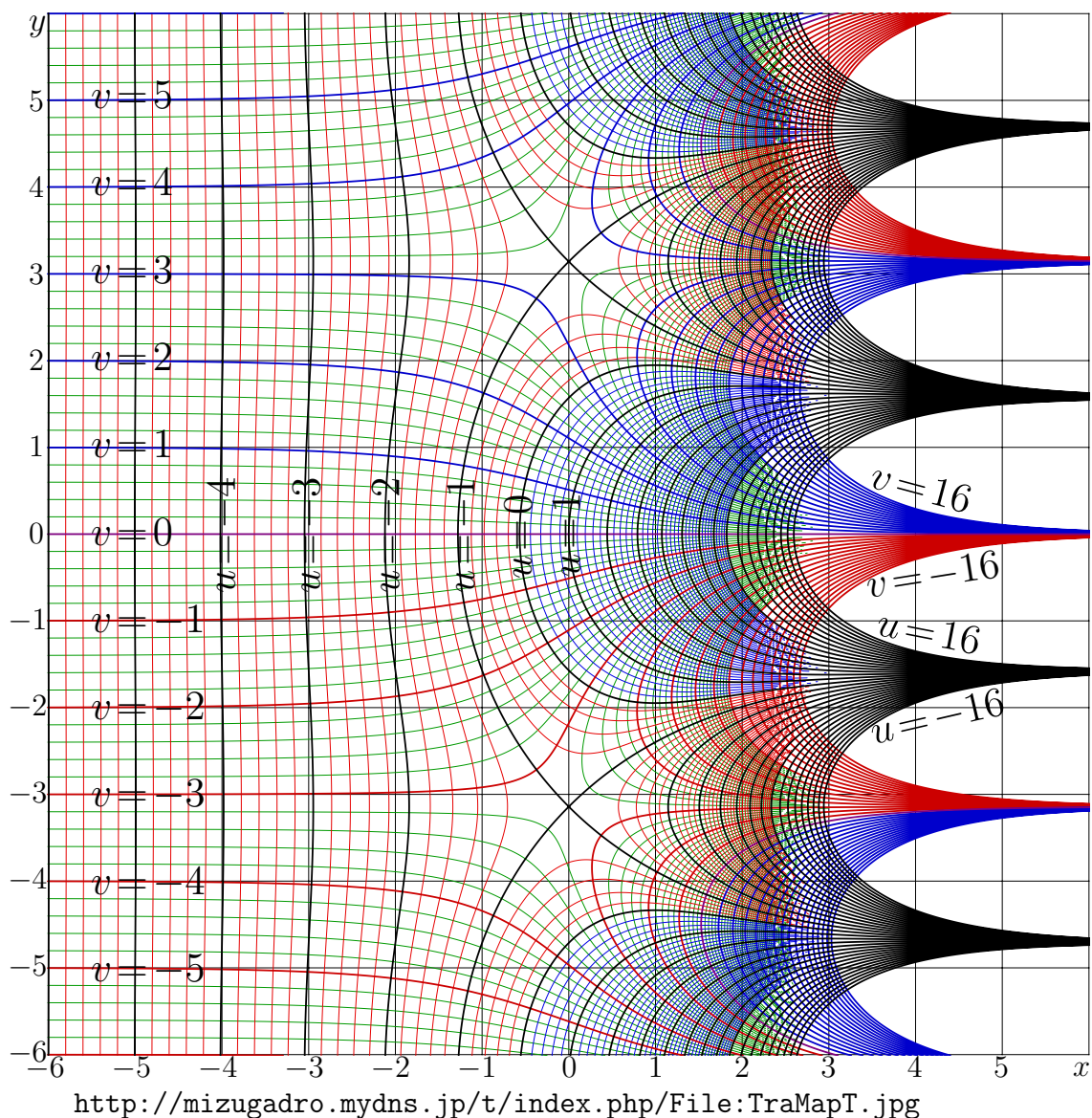


Рис. 20.2: $u+iv = \text{tra}(x+iy)$ по формуле (20.1)

Комплексная карта функции tra по формуле (20.1) показана на рисунке 20.2. В правой части рисунка, карта похожа на карту экспоненты, так как на фоне экспоненциального роста линейная добавка в формуле (20.1) смотрится бледно. В левой части рисунка карта похожа на карту тождественной функции; линии постоянной вещественной части и линии постоянной мнимой части образуют ровную сетку прямых, параллельных координатным осям.

Аналогичным свойством (почти тождественность) обладает обратная функция, то есть $\text{ArcTra} = \text{tra}^{-1}$; по крайней мере, в некоторой окрестности отрицательной части вещественной оси. Карта функции ArcTra показана на рисунке 20.3. В следующей секции я рассказываю, как вычисляется функция ArcTra .

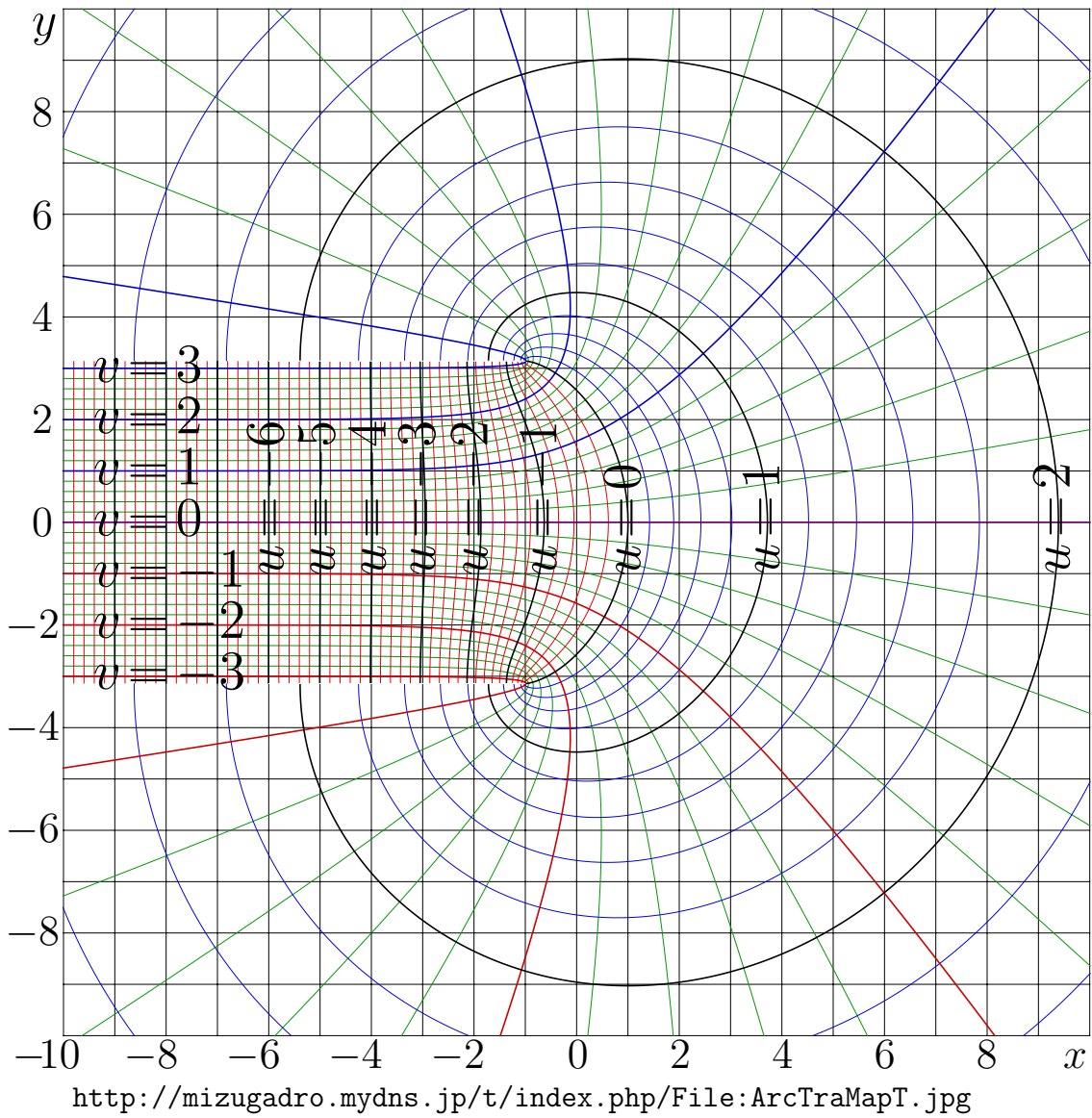


Рис. 20.3: $u+iv = \text{ArcTra}(x+iy)$

2 ArcTra, обратная функция от траппманна

Чтобы итерировать функцию Траппманна tra , я имею в виду нецелые итерации, следует сперва научиться вычислять её целые итерации. Для целых положительных значений номера итерации, вопросов с итерацией не возникает; просто применяем функцию tra столько раз, сколько нужно. Для вычисления целых отрицательных итераций, требуется алгоритм для обратной функции; примерно так же, как для вычисления нецелых итераций экспоненты требуется не только сама экспонента, но и её обратная функция, то есть логарифм. Пусть эта обратная функция от траппманна называется ArcTra , так что

$$\text{tra}(\text{ArcTra}(z)) = z \quad (20.2)$$

в некоторой широкой области значений z , включающей, по крайней мере, всю вещественную ось. Комплексная карта функции ArcTra показана на рисунке 20.3.

В этой секции я рассказываю, как строится функция ArcTra . А в этом параграфе объясню, почему я такое описание вклеиваю в Книгу. Ещё в прошлом веке мне приходилось объяснять студентам, интересовавшимся нелинейной оптикой (которая тогда была в моде), что за каждым так называемым “нелинейным” эффектом имеется довольно много вполне линейной науки. До того, как имеется понимание линейных оптических эффектов, говорить о нелинейной оптике бессмысленно, за исключением, разве, случая, показанного на рисунке 20.4. Аналогично, до того, как читатель свободно вычисляет целые отрицательные итерации передаточной функции, бессмысленно говорить о её нецелых итерациях.

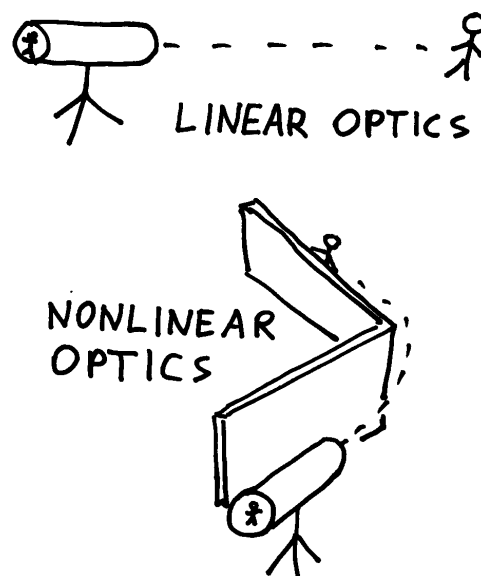


Рис. 20.4: Линейная оптика и нелинейная оптика

Во время СССР, в России была некоторая наука, и известными заведениями советской школы были Физфак и Физтех. Для того, чтобы объяснить разницу между этими заведениями, предлагали такой пример: Выпускник Физтеха, хотя и может чего-то рассчитать, совершенно не понимает смысла полученной формулы и поэтому не может ей пользоваться. Выпускник физфака, наоборот, всё понимает, хотя сам подсчитать ничего не может. Это я к тому, что Читатели, которых интересуют картинки суперфункции, но не интересуется, как они получились, могут пропустить эту секцию. Тогда про этих читателей, как про выпускников Физфака, можно будет сказать, что они всё понимают.

Как уже отмечено выше, функция tra является элементарной, и не составляет труда сосчитать её производную:

$$\text{tra}(z) = z + \exp(z) \quad , \quad \text{tra}'(z) = 1 + \exp(z) \quad (20.3)$$

Для построения функции ArcTra требуется решение f уравнения

$$\text{tra}(f) = z \quad (20.4)$$

Последовательность f_n аппроксимаций решения f можно строить методом Ньютона,

$$f_{n+1} = f_n + \frac{z - \text{tra}(f_n)}{\text{tra}'(f_n)} \quad (20.5)$$

при подходящем начальном значении f_0 . Я считаю, что начальное значение подходит, если в пределе

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (20.6)$$

решение f оказывается на том листе многолистной функции, который мне нравится. Как уже отмечено, мне нравится, когда линии разреза идут от точек ветвления прямо в направлении минус бесконечности, параллельно вещественной оси. Именно так идут разрезы на рисунке 20.3. Мелкая сетка, образованная изолиниями в полосе вдоль отрицательной части вещественной оси, то есть оси x на рисунке 20.3, достаточно четко указывает положение разрезов, так что я не стал отмечать их дополнительным пунктиром.

Для построения начального приближения, я использую различные разложения функции ArcTra, в зависимости от значения аргумента z в формуле (20.4). Сейчас я их перечислю.

Проще всего арктраппманн раскладывается вблизи отрицательной части вещественной оси. Такое разложение дает на первичную аппроксимацию

$$\text{ArcTra}(z) \approx \text{app}_4(z) = z - e^z + e^{2z} - \frac{1}{2}e^{3z} \quad (20.7)$$

Читателям предлагается построить карту функции согласия

$$\mathcal{A}_4(z) = -\lg \left(\frac{|\text{tra}(\text{app}_4(z)) - z|}{|\text{tra}(\text{app}_4(z))| + |z|} \right) \quad (20.8)$$

Логарифмический рост функции ArcTra при больших значениях вещественной части аргумента можно ухватить асимптотическим разложением. Такое разложение даёт аппроксимацию

$$\text{ArcTra}(z) \approx \text{app}_3(z) = \ln(z) \left(1 + \frac{1}{z} \sum_{m=0}^M \frac{P_m(\ln(z))}{z^m} \right) \quad (20.9)$$

где P_m есть полином степени m , В частности,

$$P_0(L) = -1 \quad (20.10)$$

$$P_1(L) = 1 - L/2 \quad (20.11)$$

$$P_2(L) = -1 + 3L/2 - L^2/3 \quad (20.12)$$

$$P_3(L) = 1 - 3L + 11L^2/6 - L^3/4 \quad (20.13)$$

$$P_4(L) = -1 + 5L - 35L^2/6 + 25L^3/12 - L^4/5 \quad (20.14)$$

Разложение Тэйлора в единице для арктраппманна дает приближение

$$\text{ArcTra}(z) \approx \text{app}_1(z) = \sum_{n=1}^M c_n (z-1)^n \quad (20.15)$$

Несколько десятков коэффициентов этого разложения легко получить, обращая ряд разложения функции tra в нуле; это дает асимптотическое разложение арктраппманна в таком виде:

$$\text{ArcTra}(1+z) = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{16} + \frac{z^3}{192} + \frac{z^4}{3072} - \frac{13z^5}{61440} + \frac{47z^6}{1474560} + \frac{73z^7}{41287680} - \frac{2447z^8}{1321205760} + \dots$$

При $M=21$, для $|z| < 1$, такая аппроксимация дает по крайней мере 12 значащих цифр.

Разложение арктраппманна в точке $-1 - i\pi$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \text{ArcTra}(z) &\approx \text{app}_2(z) = \sum_{m=1}^M c_m^* (z+1+i\pi)^{m/2} \\ &= -i\pi + i\sqrt{2}\sqrt{z+i\pi+1} + \frac{1}{3}(z+i\pi+1) \\ &\quad - \frac{i(z+i\pi+1)^{3/2}}{9\sqrt{2}} - \frac{2}{135}(z+i\pi+1)^2 + \dots \end{aligned} \quad (20.16)$$

В более компактном (и более удобном для численной имплементации) виде, это разложение записывается так:

$$\begin{aligned} \text{ArcTra}(-1-i\pi+2t^2) &= -i\pi + 2it + \frac{2t^2}{3} - \frac{2it^3}{9} - \frac{8t^4}{135} \\ &\quad + \frac{it^5}{135} - \frac{32t^6}{8505} + \frac{139it^7}{42525} + \dots \end{aligned} \quad (20.17)$$

и, соответственно, “сопряженное” разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \text{ArcTra}(-1+i\pi+2t^2) &= i\pi - 2it + \frac{2t^2}{3} + \frac{2it^3}{9} - \frac{8t^4}{135} \\ &\quad - \frac{it^5}{135} - \frac{32t^6}{8505} - \frac{139it^7}{42525} + \dots \end{aligned} \quad (20.18)$$

где t имеет смысл алгебраической функции от аргумента арктрапманна,

$$t = \sqrt{\frac{z + 1 - i\pi}{2}} \quad (20.19)$$

Разрез корневой функции в формуле (20.19) автоматически определяет линии разреза функции ArcTra, которые видны на рисунке 20.3. Я предлагаю Читателю в качестве упражнения построить карты функций согласия

$$\mathcal{A}_m(z) = -\lg \left(\frac{|\text{tra}(\text{app}_m(z)) - z|}{|\text{tra}(\text{app}_m(z))| + |z|} \right) \quad (20.20)$$

в комплексной плоскости, $z = x + iy$ для $m = 1, 2, 3, 4$, то есть для четырех первичных аппроксимаций, предлагаемых в этой секции.

Когда аппроксимации, описанные выше, запрограммированы и названы именами `arctra1`, `arctra2`, `arctra3`, `arctra4`, численная имплементация функции ArcTra, имеющая разрезы, как это показано на рисунке 20.3 осуществлена с помощью алгоритма, копия которого ниже:

```
z_type arctran(z_type z) { DB x=Re(z), y=Im(z);
if( x>2.) return arctra3(z);
DB Y=fabs(y);
if(Y<M_PI){ if(x<-1.5) return arctra4(z);
              if(Y<2.) return arctra1(z); }
if( Y>5. || x<-4. ) return arctra3(z);
if( y>0. ) return arctra2(z);
return conj( arctra2(conj(z)) );
}
```

Кроме быстрого и аккуратного представления через разложения, представленные выше, арктрапманн можно выразить через функцию Таня, определенную в главе 5:

$$\text{ArcTra}(z) = z - \text{Tania}(z-1) \quad (20.21)$$

Таким образом, в этой Книге, мы имеем Таню уже трижды, причем тремя разными способами: сперва в простой модели лазерного усилителя, затем, как представление функции `fllog`, и теперь, как

способ имплементации арктраппманна. Я надеюсь, что при написании этой книги, ни одна Таня не пострадала. Представление через функцию Таня может использоваться для сравнения, проверки различных представлений.

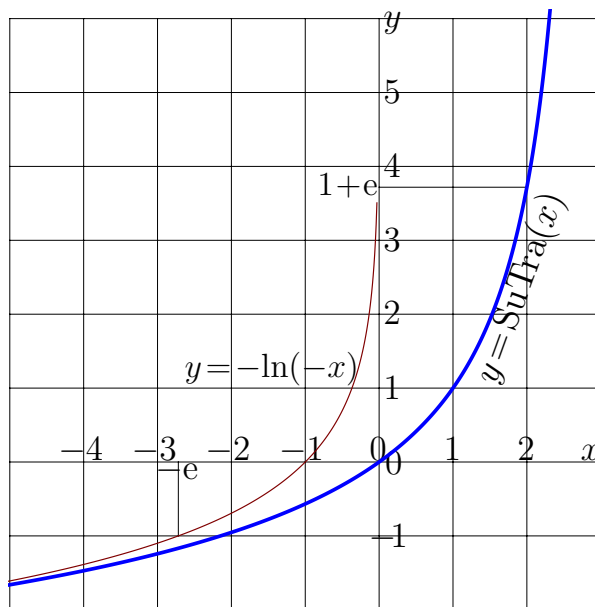
По крайней мере в некоторой окрестности вещественной оси, арктраппманн можно представить также через специальные функции LambertW и WrightOmega , см. (5.2). Однако для численных проверок вблизи предела точности вычислений, первичные представления, описанные в этой секции, дают более аккуратные результаты. Читателям предлагается сравнить различные представления арктраппманна и оценить их аккуратность.

Кроме передаточной функции $T = \text{tra}$ и обратной функции $T^{-1} = \text{ArcTra}$, описанной в этой секции, для нецелых итераций функции Траппманна требуются её суперфункция, которую я назову SuTra , и абельфункция, которую я назову $\text{AuTra} = \text{SuTra}^{-1}$. Функция SuTra строится в следующей секции.

3 Супертраппманн

Как указано выше, функция Траппманна не имеет стационарных точек. В отсутствие стационарных точек, нельзя применять “как есть” методы построения суперфункций, рассмотренные в предыдущих главах. В связи с этим, Генрик Траппманн ожидал, что для передаточной функции (20.1) будет трудно построить суперфункцию. Вопреки ожиданиям, для суперфункции от Функции Траппманна (20.1)

существует простое представление (и даже не одно). Для такой суперфункции здесь использовано имя SuTra , и она показана на рисунке 20.5. Ниже я рассказываю, как строится эта функция.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:SuTraPl03T.jpg>

Рис. 20.5: $y = \text{SuTra}(x)$ и $y = -\ln(-x)$

Сперва я расскажу про хинт (hint, или, более по-русски, финт), с помощью которого можно угадать поведение суперфункции F . Для функции Траппманна, передаточное уравнение можно записать так:

$$F(z+1) = \text{tra}(F(z)) = F(z) + \exp(F(z)) \quad (20.22)$$

Или даже так:

$$F(z+1) - F(z) = \exp(F(z)) \quad (20.23)$$

В левой части уравнения (20.23) имеется что-то, напоминающее производную функции F . Уравнение

$$\frac{dF}{dz} \approx \frac{1}{\exp(-F)} \quad (20.24)$$

дает

$$\int \exp(-F) dF \approx \int dz \quad (20.25)$$

$$\exp(-F) \approx -z \quad (20.26)$$

Таким образом, разложение функции F может начинаться с логарифмического термина. Подстановка такого эвристического решения в передаточное уравнение (20.22) дает невязку, и эта невязка указывает следующий терм разложения. Угадав таким образом форму асимптотики, я ищу асимптотическое представление для решения F в таком виде:

$$F(z) = F_M(z) + O\left(\frac{\ln(-z)}{z}\right)^{M+1} \quad (20.27)$$

где M есть натуральное число, а

$$F_M(z) = -\ln(-z) + \sum_{m=1}^M P_m(\ln(-z)) z^{-m} \quad (20.28)$$

где

$$P_m(z) = \sum_{n=1}^m a_{m,n} z^n \quad (20.29)$$

Подставляя представление (20.22) в передаточное уравнение (20.22) и собирая слагаемые с одинаковыми степенями z и $\ln(-z)$, я получаю цепочку уравнений для коэффициентов a . Первые из этих коэффициентов показаны в таблице 20.1.

Таблица 20.1: Коэффициенты a в разложении (20.27),(20.28)

0	$-\frac{1}{2}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$	$a_{2,8}$
$\frac{7}{48}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{24}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	$a_{3,7}$	$a_{3,8}$
$\frac{647}{4320}$	$-\frac{35}{96}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{11}{96}$	$\frac{1}{64}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$	$a_{4,7}$	$a_{4,8}$
$\frac{1427}{8640}$	$-\frac{4163}{8640}$	$\frac{25}{48}$	$-\frac{17}{64}$	$\frac{25}{384}$	$-\frac{1}{160}$	$a_{5,6}$	$a_{5,7}$	$a_{5,8}$
$\frac{1380863}{7257600}$	$-\frac{1883}{2880}$	$\frac{5963}{6912}$	$-\frac{653}{1152}$	$\frac{305}{1536}$	$-\frac{137}{3840}$	$\frac{1}{384}$	$a_{6,7}$	$a_{6,8}$
$\frac{3278773}{14515200}$	$-\frac{2171723}{2419200}$	$\frac{97603}{69120}$	$-\frac{3961}{3456}$	$\frac{537}{1024}$	$-\frac{263}{1920}$	$\frac{49}{2560}$	$-\frac{1}{896}$	$a_{7,8}$
$\frac{251790467}{914457600}$	$-\frac{35981749}{29030400}$	$\frac{1049251}{460800}$	$-\frac{920881}{414720}$	$\frac{69953}{55296}$	$-\frac{13381}{30720}$	$\frac{4123}{46080}$	$-\frac{363}{35840}$	$\frac{1}{2048}$

На Математике, коэффициенты a можно находить с помощью такой программы:

```

T[z_] = z + Exp[z];
Clear [n, m, M];
P[m_, L_] := Sum[a[m, n] L^n, {n, 0, m}]; P[m, L];
F[z_] = -Log[-z] + a[1, 1] Log[-z]/z + Sum[P[m, Log[-z]]/z^m, {m, 2, M}]
M = 12;
F1x = F[-1/x + 1];
Ftx = T[F[-1/x]];
s[1] = Series[F1x - Ftx, {x, 0, 2}];
t[1] = Extract[Solve[Coefficient[s[1], x^2] == 0, {a[1, 1]}], 1]
A[1, 1] = ReplaceAll[a[1, 1], t[1]];
su[1] = t[1]

m = 2; s[m] = ReplaceAll[Series[F1x - Ftx, {x, 0, m + 1}], su[m]];
t[m] = Coefficient[ReplaceAll[s[m], Log[x] -> L], x^(m + 1)];
u[m] = Collect[t[m], L];
v[m] = Table[Coefficient[u[m] L, L^(n + 1)] == 0, {n, 0, m}];
w[m] = Table[a[m, n], {n, 0, m}];
ad[m] = Extract[Solve[v[m], w[m]], 1];
su[m + 1] = Join[su[m], ad[m]];
ReplaceAll[ReplaceAll[F[x], su[m + 1]], Log[-x] -> L]

m = 3; s[m] = ReplaceAll[Series[F1x - Ftx, {x, 0, m + 1}], su[m]];
t[m] = Coefficient[ReplaceAll[s[m], Log[x] -> L], x^(m + 1)];
u[m] = Collect[t[m], L];
v[m] = Table[Coefficient[u[m] L, L^(n + 1)] == 0, {n, 0, m}];
w[m] = Table[a[m, n], {n, 0, m}];
ad[m] = Extract[Solve[v[m], w[m]], 1];
su[m + 1] = Join[su[m], ad[m]];
ReplaceAll[ReplaceAll[F[x], su[m + 1]], Log[-x] -> L]

```

и так далее для $m=4$, $m=5$, etc.

Выражение (20.28) определяет асимптотику суперфункции для передаточной функции (20.1). Точное решение F передаточного уравнения (20.22) записывается так:

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tra}^k(F_M(z-k)) \quad (20.30)$$

Чтобы получить суперфункцию SuTra, которая удовлетворяет ещё дополнительному условию

$$\text{SuTra}(0) = 0 \quad (20.31)$$

я определяю

$$\text{SuTra}(z) = F(z + x_0) \quad (20.32)$$

где $x_0 \approx -1.1259817765745026$ есть вещественное решение уравнения

$$F(x_0) = 0 \quad (20.33)$$

Рисунок 20.5 показывает $y = \text{SuTra}(x)$ как функцию x . Для сравнения, тонкой курвой показан также лидирующий терм асимптотики функции SuTra при больших отрицательных значениях аргумента, то есть $y = -\ln(-x)$. В левой части рисунка функция приближается к её асимптотике.

Комплексная карта функции SuTra показана на рисунке 20.6. Вдали от начала координат и вдали от положительной части вещественной оси, SuTra похожа на функцию $z \rightarrow -\ln(-z)$, как это предлагается её асимптотическим представлением. При этом линии постоянной вещественной части SuTra похожи на окружности, а линии постоянной мнимой части похожи на прямые линии. Сходства нет вблизи нуля (где логарифм имеет особенность), и вблизи положительной части вещественной оси. Этого можно было ожидать: по построению, функция SuTra голоморфна и не имеет особых точек, то есть это целая функция. Целая функция не может хорошо аппроксимировать сингулярную функцию вблизи её сингулярностей и разрывов.

В правой части рисунка 20.6, в окрестности положительной части вещественной оси, функция SuTra остается голоморфной, но она очень быстро растёт (быстрее любой экспоненты), и даже самый хороший

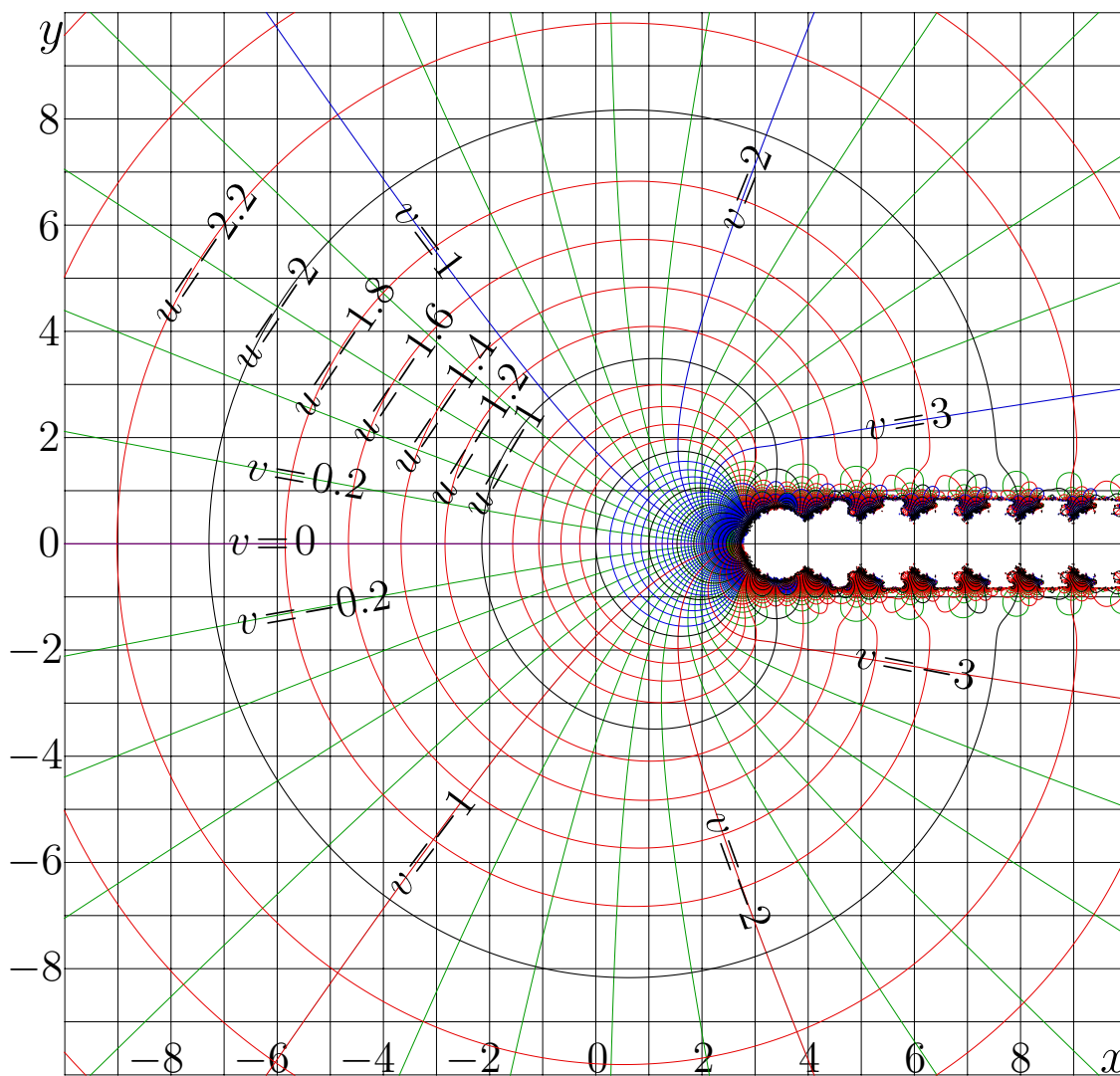


Рис. 20.6: $u+iv = \text{SuTra}(x+iy)$ по формуле (20.32)

графопостроитель не может провести соответствующие линии уровня. (И даже если бы он смог такое сделать, получающийся файл не поместился бы ни в один компьютер.) Поэтому эта часть рисунка осталась пустой, эта пустота выгладит как ручка, на которой держится голоморфная иммитация сингулярности в нуле, и, в некотором, смысле, вся ТФКП. Потому как если кто построит целую голоморфную функцию с логарифмической асимптотикой, но без такой “ручки”, то вся ТФКП (с аксиомами Арифметики вместе) посыпется. Такая “ручка” неизбежна при аппроксимации сингулярной функции целой функцией.

Чтобы показать, как логарифмическая функция $z \rightarrow -\ln(-z)$ аппроксимируется целой функцией, на рисунке 20.7 изображены карты

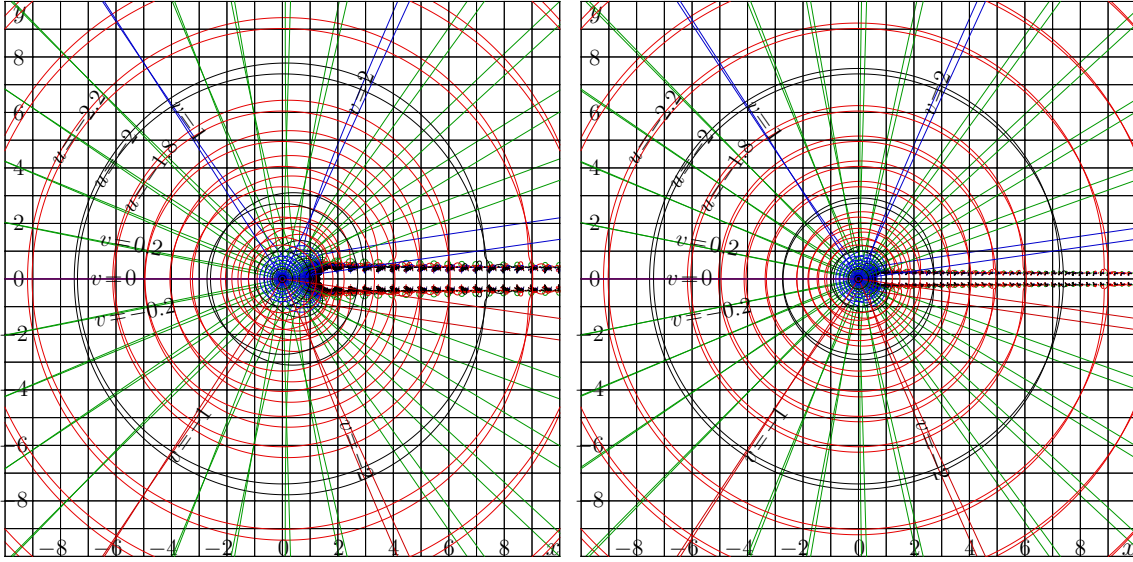


Рис. 20.7: Карты функций (20.34) и (20.35), наложенные на карту функции (20.36)

целых функций

$$f_2(z) = \text{SuTra}(2z) + \ln(2) \quad (20.34)$$

$$f_4(z) = \text{SuTra}(4z) + \ln(4) \quad (20.35)$$

Для сравнения, эти карты наложены на карту функции

$$f_\infty(z) = -\ln(-z) \quad (20.36)$$

На правой картинке рисунка (20.7), уровни двух функций настолько близки, что трудно сразу понять, к какой из функций относится каждый уровень. Последовательность целых функций

$$\Phi_n(z) = -\left(\text{SuTra}(-nz) + \ln(n)\right) \quad (20.37)$$

при больших значениях n асимптотически аппроксимирует $\ln(z)$ при любых значениях z , за исключением нуля и отрицательной части вещественной оси.¹ Насколько мне известно, выражение (20.37) имеет самую широкую область аппроксимации логарифма целой функцией среди всех, предложенных по крайней мере до публикации [77].

¹В окрестности положительной части вещественной оси, при конечном n , функция Φ_n сильно дергается; по сравнению с ней, даже выживший из ума диктатор, оказывающий всем соседям “братскую помощь”, выглядит образцом постоянства и здравомыслия.

4 Связь с другими функциями

Функция AuTra может быть выражена через функцию AuZex, рассмотренную в главе 12

$$\text{AuTra}(z) = \exp(\text{AuZex}) \quad (20.38)$$

Аналогично, функция SuTra может быть выражена через функцию SuZex

$$\text{SuTra}(z) = \text{SuZex}(\ln(z)) \quad (20.39)$$

Ввиду того, что логарифм - довольно медленная функция, численные имплементации через представления (20.38) и (20.39) несколько менее эффективны для итерации функции Траппманна, чем алгоритмы, представленные в этой главе. Кроме того, первичная аппроксимация арктраппманна легче позволяет увидеть, что эта функция целая, то есть не имеет особых точек. Попросту говоря, голоморфна везде, куда ни попади.

Рассказывают, что один Портной сошёл с ума. А случилось это так: одноногий приятель Портного попросил его сшить портки с одной штаниной. Приятель хорошо заплатил за эти портки, но ему потребовались еще портки с тремя штанинами для его собаки, которая, как и он, была калекой. А потом Знакомый приятеля попросил такие же портки для своей собаки, которая была вполне нормальной (разве что мерзла зимой) и штанин потребовалось четыре. Потом Портной стал шить портки с шестью штанинами, на тот случай, если кто выведет новую породу собаки с бю лапами, а заодно - сюртуки для птиц с двумя головами, показанными на рисунке 10.1. (Ожидалось, что они станут популярны в России после Чернобыльской катастрофы; это обстоятельство учтено на гербе РФ.) Наконец, Портной сшил портки с произвольным количеством штанин. И если завтра Землю посетит инопланетянин, у которого n конечностей, то у Портного для этого инопланетянина уже есть готовые портки.

Я рассказал историю про Портного для того, чтобы лучше объяснить Читателю, что такое математика и чем занимаются математики. Я сейчас не могу себе представить ситуацию, в которой кому-либо потребуется аппроксимировать элементарную функцию \ln целыми функциями. Но если кому-то вдруг такое потребуется, то у меня такая аппроксимация уже есть, это функция Φ_n по формуле (20.37).

5 SuTra, имплементация супертраппманна

В заголовке секции, фамилия “Траппманн” написана с маленькой буквы, чтобы показать, что речь идет не о самом Генрике Траппманне, а о суперфункции для функции tra, которую я назвал его фамилией. В этой секции рассмотрена численная имплементация супертраппманна

Ключевые вопросы для любой аппроксимации - в какой области эта аппроксимация работает, сколько значащих цифр она дает и сколько операций требуется выполнить, чтобы с этой аппроксимацией получить требуемую величину. Если область применимости охватывает все мыслимые приложения, погрешность приближается к имманентной погрешности округления чисел при их представлении в компьютере, а все комплексные карты для этой функции строятся в реальном времени, то я условно называю решение точным. При этом подразумевается, что когда получаемой точности не хватит, с помощью точного решения алгоритм можно уточнить, чтобы получить ещё более точный алгоритм, который даст точно такую точность, которая требуется. Такой фразой я хочу хотя бы приблизительно показать многообразие значений, которые может иметь термин “точный”.

Если для функции есть определение, известны её свойства, и уже есть эффективный алгоритм для её вычисления, эта функция должна рассматриваться как специальная. Если решение какой-либо задачи просто и явно выражено через такую функцию, то это решение должно квалифицироваться как “точное”.

Ниже я рассматриваю область значений z , при которых $F_M(z+x_0)$ по формуле (20.28) является хорошим приближением для выражения $\text{SuTra}(z)$. Из практических соображений (чтобы получить complex double численную имплементацию), оказалось удобным взять 12 слагаемых в разложении, то есть $M = 12$. Для дюжины терминов, исследовалась функция согласия

$$\mathcal{A}(z) = -\lg\left(\frac{|F_M(z+x_0) - \text{SuTra}(z)|}{|F_M(z+x_0)| + |\text{SuTra}(z)|}\right) \quad (20.40)$$

Уровни этой функции показаны на рисунке 20.8.

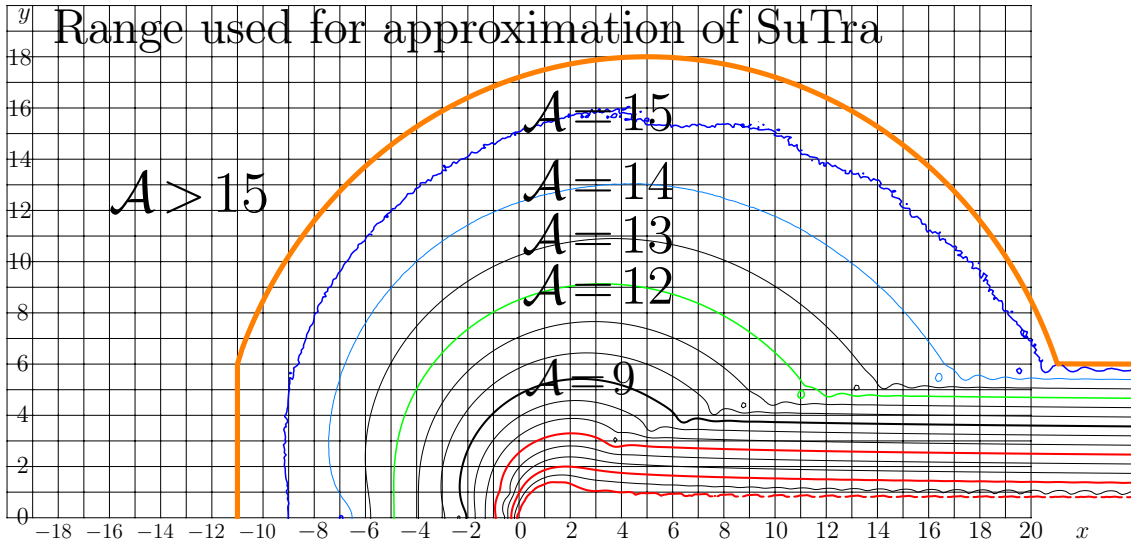


Рис. 20.8: Карта функции согласия $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x+iy)$ по формуле (20.40)

Для точности complex double, то есть с пятнадцатью значащими цифрами, значения вне контура, показанного толстой кривой, могут быть использованы (и используются в алгоритме) “как есть”. Для иных значений требуется формула

$$\text{SuTra}(z) = \text{tra}^k(\text{SuTra}(z-k)) \quad (20.41)$$

с таким целым значением k , чтобы самый внутренний аргумент оказался вне толстого контура на рисунке 20.8. Этот “толстый контур” не является частью карты, он образован отрезком прямой вдоль $x = -11$, окружностью с центром в точке $(5, 0)$ и полупрямой вдоль линии $y = 6$. Вне этого контура, погрешность вычисления супертраппманна определяется не несовершенством аппроксимирующей функции, а ошибками округления при использовании переменных complex double.

При построении остальных рисунков этой главы, при каждом вычислении функции SuTra, функцию tra приходится оценивать порядка десятка раз. Таким образом, представление функции SuTra всего лишь на порядок величины более медленно, чем вычисление таких общепризнанных специальных функций как exp, erfc или BesselJ. Это одна из причин, по которым я квалифицирую функцию SuTra как специальную.

6 AuTra, абельфункция траппманна

В этой секции строится обратная функция к функции SuTra; для неё предлагается имя AuTra. График этой функции показан на рисунке 20.9. Для сравнения, тонкими линиями показаны две оборванные серии асимптотического разложения этой функции при больших отрицательных значениях аргумента. Комплексная карта функции AuTra показана на рисунке 20.11. Её вычисление описано ниже.

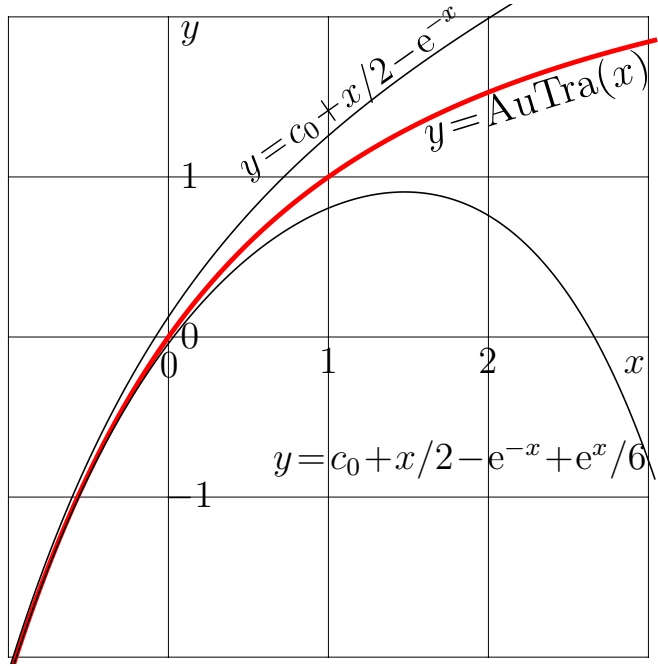


Рис. 20.9: $y = \text{AuTra}(x)$ по формуле (20.48) и две асимптотики от (20.45)

Для передаточной функции Траппманна, абельфункция G удовлетворяет уравнению Абеля

$$G(\text{tra}(z)) = G(z) + 1 \quad (20.42)$$

Асимптотическое поведение решения можно угадать, переписав это уравнение в таком виде:

$$G(z + e^z) - G(z) = 1 \quad (20.43)$$

Выражение в левой части похоже на производную,

$$G'(z)e^z + G''(z)e^{2z}/2 + \dots \approx 1 \quad (20.44)$$

Из такой аналогии можно угадать асимптотическое разложение функции G :

$$G(z) \approx \frac{z}{2} - e^{-z} - \frac{e^z}{6} + \frac{e^{2z}}{16} - \frac{19e^{3z}}{540} + \frac{e^{4z}}{48} - \frac{41e^{5z}}{4200} + \mathcal{O}(e^{6z}) \quad (20.45)$$

Коэффициенты разложения (20.45) получены с помощью Математики, использована вот такая программа:

```

tra[z_] = z + Exp[z]
g0[z_] = z/2 - Exp[-z] + Sum[c[n] Exp[n z], {n, 1, 20}]
n = 1; s[n] = Series[g0[Log[t]] + 1 - g0[tra[Log[t]]], {t, 0, n+1}]
u[n] = Extract[Solve[Coefficient[s[n], t^(n+1)] == 0, c[n]], 1]
g[n, z_] = ReplaceAll[g0[z], u[n]]
For[n = 1, n < 20, n++,
  s[n] = Series[ g[n-1, Log[t]] + 1 - g[n-1, tra[Log[t]]], {t, 0, n+1}];
  u[n] = Extract[Solve[Coefficient[s[n], t^(n+1)] == 0, c[n]], 1];
  g[n, z_] = ReplaceAll[g[n-1, z], u[n]];
]
g[n, z]
Table[Coefficient[g[n, z], Exp[n z]], {n, 1, 20}]
N[Table[Coefficient[g[n, z], Exp[n z]], {n, 1, 20}], 18]

```

Те же коэффициенты могут быть получены и обращением асимптотического разложения функции SuTra. Отмечу, что и асимптотика функции AuTra, и код для её вычисления проще, чем асимптотика (20.28) и аналогичный код для функции SuTra по формуле (20.32).

Для некоторого натурального числа M , я определяю функцию G_M как оборванную сумму для разложения (20.45); пусть

$$G_M(z) = \frac{z}{2} - e^{-z} + \sum_{m=1}^M c_m e^{mz} \quad (20.46)$$

В этой секции, я определяю функцию G как предел

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G_M(\text{ArcTra}^n(z)) + n) \quad (20.47)$$

Функцию AuTra можно выразить через G по формуле

$$\text{AuTra}(z) = G(z) - G(0) \approx G(z) + 1.1259817765745026 \quad (20.48)$$

Константу $G(0)$ можно интерпретировать как коэффициент $-c_0$, то есть $c_0 = -G(0)$.

Для численной имплементации, следует выбрать подходящее число M в формуле (20.46), а также номер n для аппроксимации предела в формуле (20.46). Я выбрал $M=9$; тогда первичное приближение

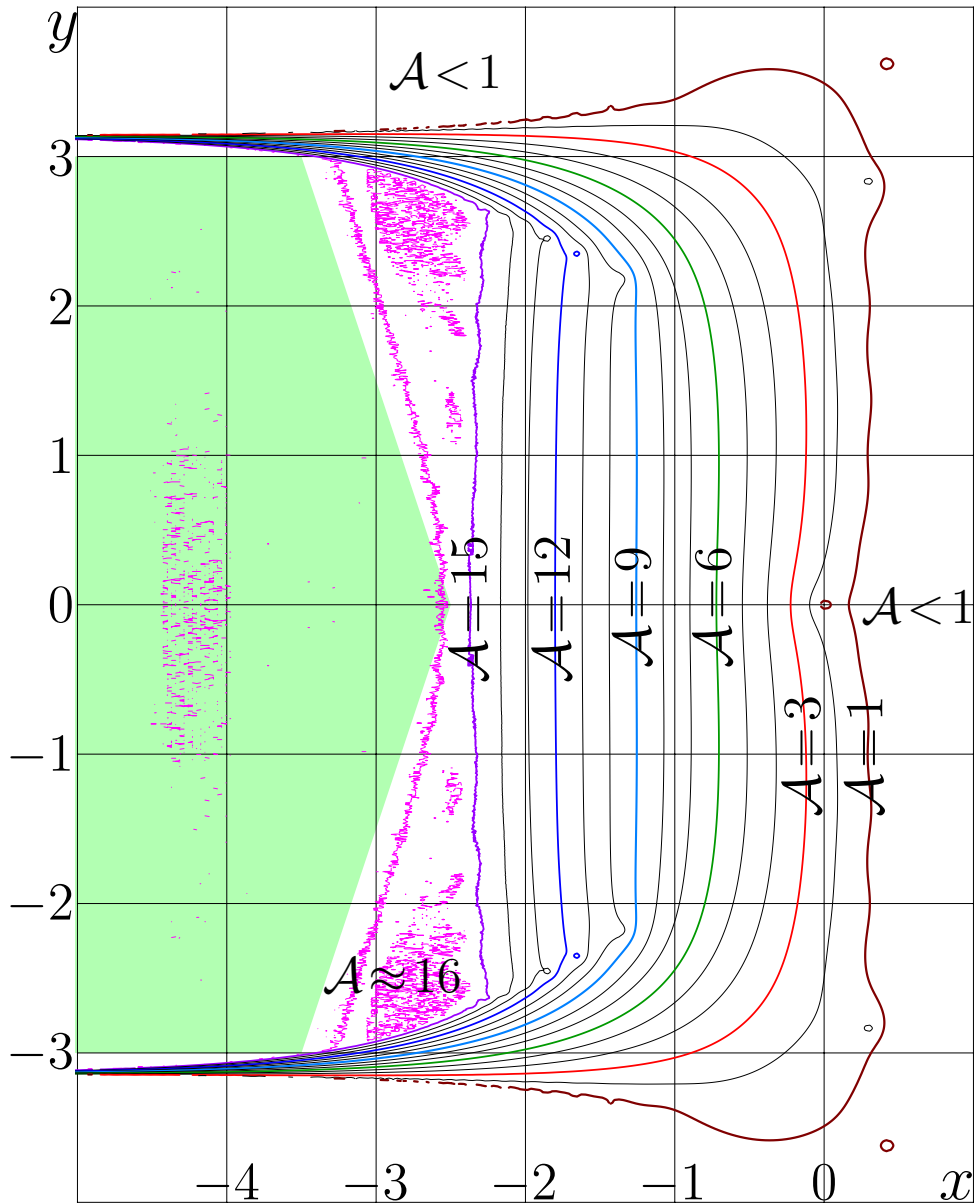
$$\text{SuTra}(x + iy) \approx g_9(x + iy) \quad (20.49)$$

можно использовать в области

$$|y| < 3 \text{ and } |y|/3 + x < 3.5 \quad (20.50)$$

Эта область на рисунке 20.10 затенена. На том же рисунке показана карта согласия

$$\mathcal{A}(z) = -\lg\left(\frac{|\text{SuTra}(g_M(z)) - z|}{|\text{SuTra}(g_M(z))| + |z|}\right) \quad (20.51)$$



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Autran0m9tes64t.jpg>

Рис. 20.10: $\mathcal{A} = A(x+iy)$ по формуле (20.51)

Рисунок (20.10) можно рассматривать также как численное подтверждение соотношения

$$\text{SuTra}(\text{AuTra}(z)) = z \quad (20.52)$$

В затененной области, для численной имплементации, соотношение (20.52) держится по крайней мере с 15 знаками. Собственно, так и должно быть, пока AuTra есть абельфункция, соответствующая суперфункции SuTra от передаточной функции tra.

Область, где используется первичное приближение, можно расширить, приближая её на рисунке 20.10 к уровню $\mathcal{A} = 15$ и оптимизируя алгоритм. Я оставляю это Читателю в качестве упражнения и

надеюсь, что Читатель не забудет протестировать улучшенный алгоритм.

Первичное приближение (20.49) используется “как есть” лишь для значений $x+iy$ удовлетворяющих соотношению (20.50) (затененная область на рисунке (20.10)). Если аргумент $z = x+iy$ оказывается вне этой области, то функция $\text{ArcTra} = \text{Tra}^{-1}$ применяется к аргументу n раз, столько раз, сколько нужно, чтобы результат попадал в затененную область. Затем используется формула

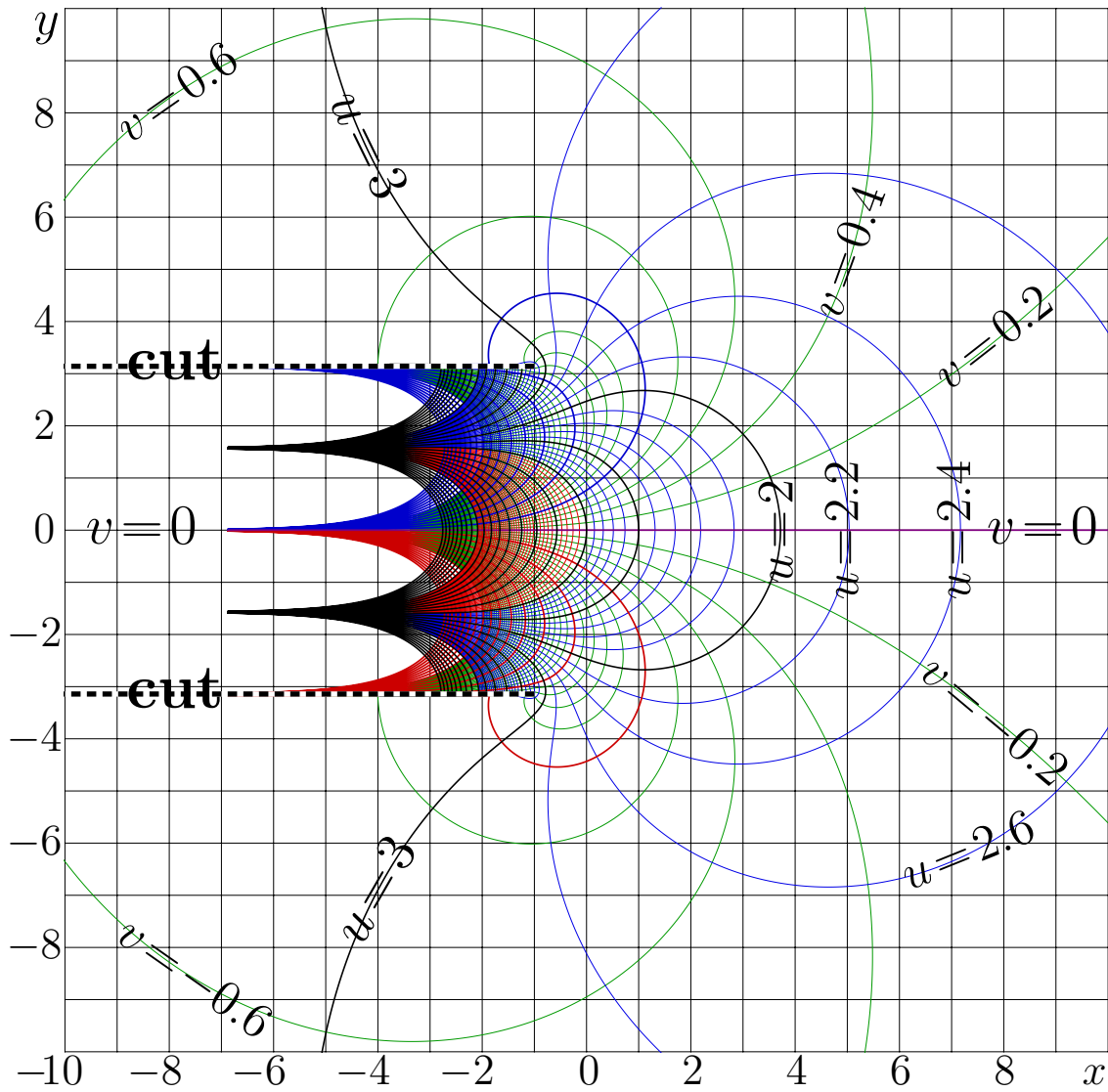
$$\text{AuTra}(z) \approx g_9(\text{ArcTra}^n(z)) + n \quad (20.53)$$

Форму “затененной” области можно оптимизировать, но тогда алгоритм станет чуть сложнее. Такая оптимизация может иметь смысл непосредственно перед тем, как встраивать в имплементацию функции AuTra в какой-либо софтвер.

Разрезы области голоморфизма функции ArcTra определяют и разрезы функции AuTra . Эти разрезы видны на рисунках 20.3 и 20.11. При больших значениях $|z|$, функция $\text{AuTra}(z)$ медленно растет, за исключением полу-полосы $\Re(z) < 0, |\Im(z)| < \pi$. В этой полуполосе, при больших отрицательных значениях $\Re(z)$, функция $|\text{AuTra}(z)|$ растёт экспоненциально. В частности, это относится к поведению функции при вещественных значениях аргумента. Такое поведение согласуется со свойствами функции SuTra , график которой показан на рисунке 20.5.

В этой секции, в порядке численной проверки имплементации функции AuTra , используется функция функция SuTra . Читатель приглашается стащить имплементации этих функций и оценить невязки при подстановке таких приближений в уравнение Абеля (20.42) и передаточное уравнение (20.22). Мне кажется, что я сделал эти имплементации близко к той точности, какую только можно получить для переменных `complex double`.

С функциями SuTra и AuTra , потроенными в этой главе, нетрудно считать нецелые итерации функции Траппманна. Этому посвящена следующая секция.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:AuTraMapT.jpg>

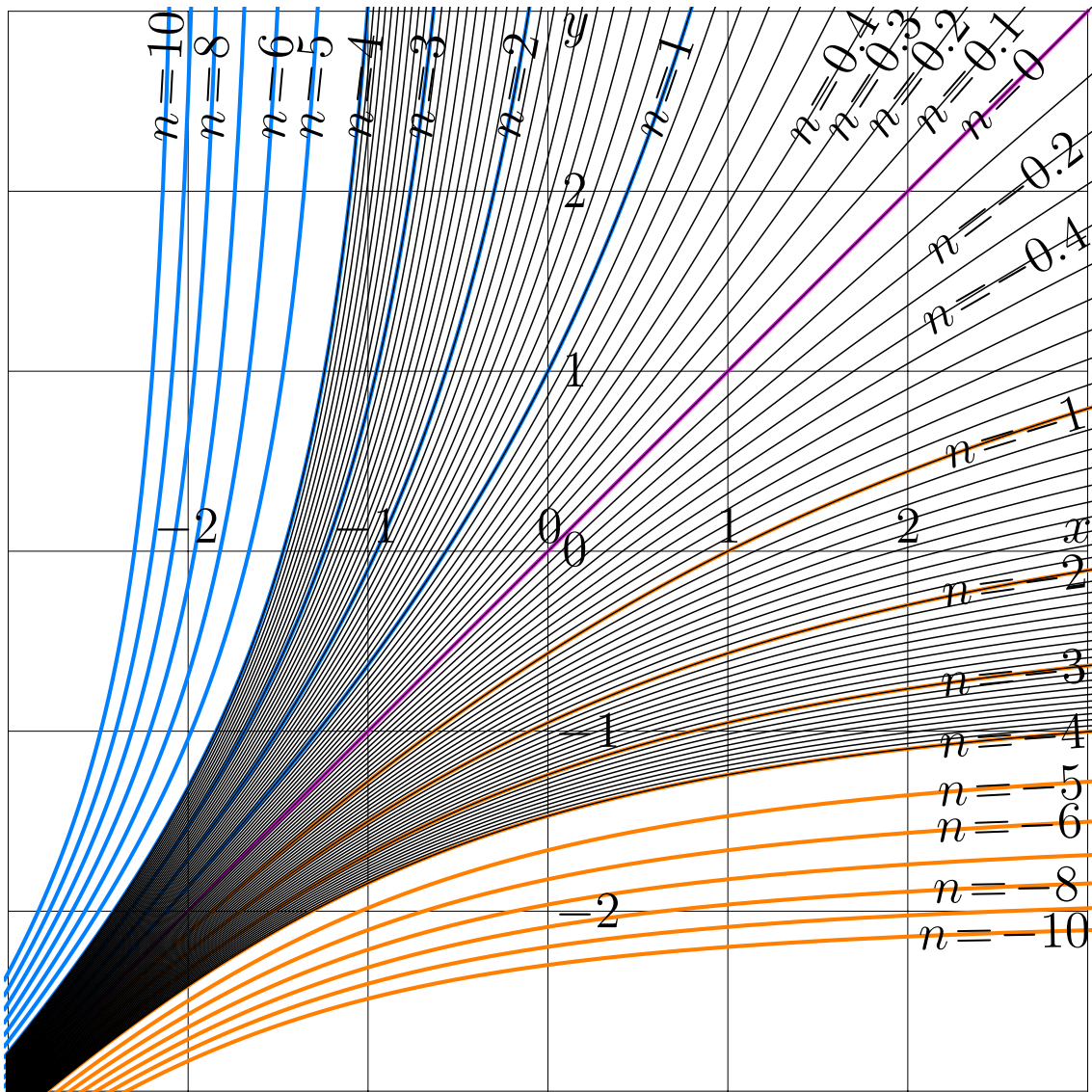
Рис. 20.11: $u+iv = \text{AuTra}(x+iy)$

7 Итерации траппманна

В этой секции итерируется не сам Генрик Траппманн, а функция Траппманна $\text{tra}(z) = z + e^z$. Как и для других передаточных функций, итерации выражаются через суперфункцию и абельфункцию; то есть, в данном случае, через SuTra и AuTra , построенные в этой главе:

$$\text{tra}^n(z) = \text{SuTra}\left(n + \text{AuTra}(z)\right) \quad (20.54)$$

Как и при итерациях других передаточных функций, номер итерации функции Траппманна не имеет надобности быть целым, ни даже вещественным. Но может быть и вещественным. Для нескольких вещественных значений n , графики $y = \text{tra}(x)$ по формуле (20.54) показаны на рисунке 20.12.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:TraitT.jpg>

Рис. 20.12: $y = \text{tra}^n(x)$ versus x for various number n of iterate by (20.54)

Итерации функции $\text{tra}(z) = z + e^z$ на рисунке 20.12 смотрятся схоже с итерациями других голоморфных передаточных функций. Рисунок показывает постепенный, голоморфный переход от функции Траппманна tra к арктраппманну $\text{ArcTra} = \text{tra}^{-1}$. Отсутствие и функции стационарных точек не препятствует её итерированию.

На этом я заканчиваю рассмотрение функции Траппманна. И вообще заканчиваю рассмотрение примеров всяческих суперфункций, абельфункций и нецелых итераций. Если Вы дочитали досюда, то Вы и сами можете строить супрфункции, абельфункции и нецелые итерации для всевозможных передаточных функций. Для таких передаточных функций, у которых есть вещественные стационарные точки и для таких, у которых вещественных стационарных точек нет. И даже для таких, у которых вовсе нет стационарных точек.

Глава 21

Заключение

Эта глава обсуждает то же, что и Введение. Отличие этой главы от Введения в том, что здесь я предполагаю, что Читатель уже хотя бы просмотрел некоторые из глав Книги (рис. 21.1). Чтобы пояснить смысл этого Заключения, напомним притчу.

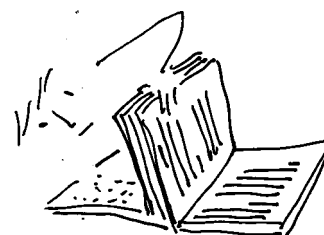


Рис. 21.1:

Один император решил изучить историю. Он поручил министерству науки разработать полный курс истории. Министры работали над таким учебником много лет. Наконец, во дворец приехал грузовик с заказанным тысячетомником. Император понял, что он за всю жизнь не сможет прочесть такой курс, и попросил его сократить. Ведущие историки работали над вторым изданием ещё несколько лет, и вот, в большом чемодане, императору был доставлен десятитомник. Но император к тому времени стал слаб глазами, и не мог осилить даже десятитомник. Историкам пришлось опять перерабатывать учебник, и через год к императору пришёл главный Историк и торжественно вручил ему брошюру "Краткий курс истории императорского двора". Император к тому времени уже заболел, и не мог прочесть даже эту брошюру. Он спросил Историка, можно ли этот курс переработать и сократить. Историк ответил: *"Нового издания не надо. Я расскажу Вам прямо сейчас: Люди рождались, страдали и умирали."*

Как Историк в притче, я предвосхищаю желание Читателя и стараюсь изложить тему суперфункций короче. Ниже, основные результаты Книги представлены в одной секции.

1 Основные результаты

Голоморфные функции можно итерировать. Какую попало голоморфную функцию T можно обозвать "передаточной функцией". Для передаточной функции T можно построить суперфункцию как решение F передаточного уравнения

$$F(z+1) = T(F(z))$$

Обратную функцию, то есть $G = F^{-1}$ я называю соответствующей функцией Абеля, или абельфункцией. Абельфункция удовлетворяет уравнению Абеля

$$G(T(z)) = G(z) + 1$$

Когда суперфункция F и абельфункция G установлены, итерации функции T выражаются в виде

$$T^n(z) = F(n + G(z))$$

где номер итерации n не имеет надобности быть целым числом; передаточную функцию можно итерировать также нецелое, дробное и даже комплексное количество “разов”. При этом, для целого n ,

$$T^n(z) = \underbrace{T(T(..T(z)..<))}_{n \text{ evaluations of function } T}$$

Решение передаточного уравнения не единственно. Если какое-нибудь решение F найдено, то еще одно решение f может быть построено модификацией аргумента,

$$f(z) = F(z + \theta(z))$$

где θ есть голоморфная периодическая функция с периодом единица. Соответственно может строиться и новая абельфункция g . При этом новая суперфункция и соответствующая абельфункция могут давать иные итерации передаточной функции.

Произвол в выборе суперфункции может быть уменьшен, если зафиксировать асимптотическое поведение этой функции в комплексной плоскости. Суперфункции с несложным поведением я считаю основными. Остальные можно получать периодической модификацией аргумента. Голоморфная периодическая функция растет по крайней мере экспоненциально (как это делают в направлении мнимой оси синус и косинус), и даже малая такая модификация легко проявляется в комплексной плоскости. Поэтому для нецелых итераций следует рассматривать функции в комплексной плоскости; даже если они будут применяться для вещественных значений аргумента.

Критерий голоморфизма указывает, которая из суперфункций имеет физический смысл и должна рассматриваться как “настоящая”.

Для многих суперфункций и абельфункций есть специальные имена. Такие функции собраны в Таблице 1. Некоторые из них общеизвестны, и для их использования не требуется знать, что они являются суперфункциями.

В принципе, для любой голоморфной функции F можно построить обратную функцию G и определить $T(z) = F(1+G(z))$. Тогда такую T можно считать передаточной функцией, для которой известны суперфункция F , абельфункция G и нецелые итерации T^n .

Обратная задача, то есть построение суперфункции F для заданной передаточной функции T , рассмотрена в этой Книге. При этом построении ключевым является вопрос о стационарных точках передаточной функции, то есть о решениях L уравнения

$$L = T(L)$$

Как физик, я интересуюсь прежде всего вещественно-голоморфными функциями, для которых $T(z^*) = T(z)^*$. Я сформулировал нахальный тезис, что я могу построить суперфункцию F , абельфункцию G и нецелые итерации для какой попало передаточной функции T . В поддержку этого тезиса, в Книге рассмотрены примеры, когда функция имеет хотя бы одну вещественную стационарную точку, $L^* = L$; примеры, когда функция таковой точки не имеет, но имеет комплексные стационарные точки; а также пример передаточной функции, у которой вообще ни одной стационарной точки нет.

Для разных функций, предложены методы построения асимптотического разложения суперфункции, которое приближается к стационарной точке L на бесконечности. С помощью передаточного уравнения, из асимптотического разложения, суперфункция может вычисляться с любой аккуратностью; в этом смысле построено точное решение. Для вещественно-голоморфной передаточной функции физической системы с вещественной стационарной точкой, метод регулярной итерации дает решение, имеющее физический смысл.

Может случиться, что все стационарные точки L передаточной функ-

ции T являются комплексными, как это имеет место для натуральной экспоненты. При этом суперфункцию можно выразить через интеграл Коши и решение соответствующего интегрального уравнения. Исторически, первая комплексная карта суперфункции от экспоненты, а именно - натуральная тетрация, была построена с помощью такого представления. В верхней части комплексной плоскости такая тетрация стремится к одной из стационарных точек, а в нижней - к её комплексному сопряжению (которое также является стационарной точкой экспоненты). Комплексная карта натуральной тетрации показана на рисунке 14.13 и на первой странице обложки. Может статься, что передаточная функция T вовсе не имеет стационарных точек. Примером такой функции является функция Траппманна

$$T(z) = \text{tra}(z) = z + \exp(z)$$

Однако и для такой передаточной функции можно угадать асимптотическое поведение суперфункции и восстановить эту суперфункцию. Карта супертраппманна показана на рисунке 20.6. Эта целая функция с логарифмической асимптотикой; похоже, что до публикации [77], ни одной такой функции представлено не было.

Важным видом суперфункции я считаю тетрацию, то есть решение tet_b передаточного уравнений

$$\text{tet}_b(z+1) = e^{\text{tet}_b(z)}, \quad \text{tet}_b(0) = 1$$

такое, что $\text{tet}_b(z)$ ограничена в полосе $|\Re(z)| \leq 1$. Для вещественных $b > 1$ и вещественных x , зависимость $y = \text{tet}_b(x)$ показана на рисунке 17.1. Тетрацию можно строить даже для комплексного основания; карта тетрации по основанию $b = 1.52598338517 + 0.0178411853321 i$ показана на рисунке 18.3.

Многие из приведенных в Книге примеров предложены в попытках придумать передаточную функцию, для которой трудно построить суперфункцию. Пока все примеры получаются; возможность построения суперфункций является научным фактом.

Выше я перечислил, что сделано. Но ещё много можно сделать по поводу суперфункций. Этому посвящена следующая секция.

2 Будущая работа

Я постарался изложить в Книге то, что известно про суперфункции и итерации. Но всегда остаются фантазии о том, что ещё было бы интересно посчитать и нарисовать. Эти фантазии собраны ниже.

Будущей работы могут потребовать более строгие доказательства существования и единственности суперфункций, а также уточнения дополнительных условий, требуемых для этой единственности.

Будущей работой может быть применение предлагаемых функций в физике, и, в частности, в лазерной науке, где физический смысл суперфункций и нецелых итераций особенно нагляден.

Будущей работой может быть исследование специального случая суперфункций, а именно - аскерманнов. На рисунке 19.6, для основания e , построены графики первых пяти аскерманнов - добавления константы, умножения на константу, экспоненты, тетрации и пен- тации. Думаю, что такие графики (и комплексные карты) можно строить и для более высоких аскерманнов.

Трудность может быть связана с появлением у высших аскерманнов множественных точек ветвления и соответствующих разрезов. Такие разрезы ограничивают область голоморфизма, и, таким образом, область применимости предложенных в Книге методов построения суперфункций. Возможно, для высших аскерманнов придется работать с многолиственными функциями.

Будущей работой может быть автоматизация построения суперфункций. Я имею в виду алгоритм, который найдет у передаточной функции подходящие стационарные точки (если они есть), выберет подходящую асимптотику для суперфункции, построит соответствующее разложение суперфункции и абельфункции и вычислит требуемую итерацию (даже не целую, даже комплексную) для такой функции. В языке “Mathematica” уже даже есть название для такой процедуры, она называется Nest. Но пока её можно использовать лишь в тех случаях, когда количество итераций выражается целым числом.

Фантазии и любопытство являются основным стимулом любой серьезной научной работы. Я собираю инструменты, с помощью которых это любопытство может удовлетворяться. Я надеюсь, что эта Книга будет полезна в такой работе.

3 Обозначения

Я стараюсь использовать обозначения, единые для всей Книги. Для этого пришлось отойти от систем обозначений, использованных в оригинальных журнальных публикациях. Чтобы не запутаться, некоторые обозначения представлены в виде таблиц 21.1, 21.2, 21.3.

Не все обозначения уместились в таблицах. Я стараюсь указывать самые важные, и, особенно, те, которые часто вызывают конфузии.

Таблица 21.1: Обозначения, Русский алфавит

Абель Нильс Генрик	Изобретатель функции Абеля и уравнения Абеля
абель	приставка к имени функции для обозначения абельфункции
абельфункция	решение уравнения Абеля, обратная функция к суперфункции
Аскерманн	Изобретатель функций Аскерманна
аскерманн	функция Аскерманна
Генрик Траппманн	(Henryk Trappmann) мой критик, оппонент и соавтор
Итерация номер n	решение f^n уравнений $f^{n+1}(z) = f(f^n(z))$, $f^1 = f$
Кнезер Хельмут	Изобретатель половинной итерации экспоненты
Комплексная карта	представление голоморфной функции изолиниями её вещественной и мнимой частей (или изолиниями её модуля и фазы)
Корень из факториала	$\text{Factorial}^{1/2}(z)$, решение h уравнения $h(h(z)) = z!$
Обращение (функции)	нахождение обратной функции, InverseFunction
Передаточная функция	зависимость выхода усилителя от входа, функция T в передаточном уравнении
Передаточное уравнение	$F(z+1) = T(F(z))$
Супер	приставка для обозначения её суперфункции
Суперфункция	решение F передаточного уравнения $F(z+1) = T(F(z))$
Тетрация	решение tet уравнений $\text{tet}(z+1) = \exp(\text{tet}(z))$, $\text{tet}(0) = 1$
Тетрация по основанию b	решение уравнений $\text{tet}_b(z+1) = b^{\text{tet}_b(z)}$, $\text{tet}(0) = 1$
Траппманн Генрик	(Henryk Trappmann) мой критик, оппонент и соавтор
Уравнение Абеля	$G(T(z)) = G(z) + 1$
Усилитель	фильтр, в котором выход может быть больше входа
Функция Абеля	абельфункция. Обратная функция от суперфункции
Функция Дойя	$\text{Doya}(z) = \text{LambertW}(ze^{z+1})$, см. также формулу (5.12)
Функция Келлера	$\text{Keller}(z) = z + \ln(e - e^{-z}(e-1))$, см. формулу (5.15)
Функция Таня	Решение уравнения $\text{Tania}'(z) = \frac{\text{Tania}(z)}{1+\text{Tania}(z)}$
Функция Шока	$\text{Shoka}(z) = z + \ln(e^{-z} + e - 1)$, см. формулу (5.19)
Фильтр	физическая имплементация передаточной функции

Таблица 21.2: Обозначения, латинский алфавит

$\mathcal{A}(m, z) = \mathcal{A}(m-1, \mathcal{A}(m, z-1))$	канонический аскерманн, (19.14)
A_n	аскерманн порядка n , (19.7)
a_n	Коэффициенты в асимптотических разложениях
$\text{AuExp}_b = \text{SuExp}_b^{-1}$	абельэкспонента по основанию b
AuTra	абельтраппманн
AuSin	абельсинус
Arc	приставка, указывающая на обратную функцию
b	основание для натуральной тетрации
c_n	Коэффициенты в разложении
C_n	Коэффициенты в разложении
$e = \exp(1) \approx 2.7$	основание натуральных логарифмов
\exp	экспонента по основанию e
\exp_b	экспонента по основанию b
F	Имя, используемое для различных суперфункций
$\text{Factorial}(z) = z!$	голоморфное решение уравнения $z! = z(z-1)!$
f	имя, используемое для каких попало функций
$G = F^{-1}$	имя, используемое для обозначения абельфункций
$h = T^{1/2}$	Имя, используемое для обозначения половинной итерации
$i = \sqrt{-1}$	мнимая единица, $i^2 = -1$
i	переменная, принимающая целые значения
K	затычка для контурного интеграла (14.24)
k	инкремент асимптотического представления суперфункции
L	стационарная точка суперфункции, так что $T(L) = L$
\ln	Логарифм по основанию e
\log_b	Логарифм по основанию b
M	количество термов в оборванных сериях
O	функция, которая растет не быстрее своего аргумента
P	период или асимптотический период; функция, обратная к Q
Q	Используется как функция, обратная к P
Super	приставка, указывающая на её суперфункцию
s	Параметр логистического оператора (7.1)
T	Передаточная функция
tet	натуральная тетрация (14.28), [44]
tet_b	решение f уравнения $f(z+1) = b^{f(z)}$, см. рисунок 17.1
u	вещественная часть функции на комплексных картах
v	мнимая часть функции на комплексных картах
x	используется в качестве немого аргумента как вещественное число
y	используется в качестве немого аргумента
z	используется в качестве немого аргумента как комплексное число

Таблица 21.3: Обозначения, греческий алфавит

α, β, γ	используются как коэффициенты в разложениях
$\eta = \exp(1/e) \approx 1.444667861$	основание Генрика
$\varepsilon = \exp(kz)$	малый параметр в разложении суперфункции
θ	голоморфная периодичная функция с периодом единица
ζ	$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, Функция Римана (8.8), [13, 18]
Ω	Контур интегрирования в формуле Коши, (14.21)

4 Послесловие

Книга получилась толще, чем я ожидал. И могла бы быть ещё толще. Потому как всегда кажется, что если добавить одну мааленькую формулу, то Читателю станет ещё понятнее. Почти к каждой формуле в этой Книге можно построить ещё несколько рисунков. Однако я думаю, что для Читателя будет полезнее построить их самостоятельно, чем увидеть галерею однотипных рисунков.

Я старался сделать книгу покороче. Я не включил исследование того, что творится с построенными функциями за линиями разрезов области аналитичности. Я не включил примеров итерации экспоненты по комплексному основанию. И ещё много других примеров. Это те примеры, которые не вызвали интереса у коллег и по которым не ожидается вопросов. Такие примеры могут быть представлены по специальным запросам от коллег. “Доказательства” (желательно опубликованные), что чего-то “сделать невозможно” будут рассмотрены как важная причина, чтобы сделать это самое [14].

Я изложил основные формулы и методы, туллы, “Теоретические основы”, инструменты, с которыми получены формулы и рисунки. Я надеюсь, что выведение новых формул такого типа и построение соответствующих рисунков не вызовет сложностей.



Рис. 21.2: Близкие родственники, без которых эта Книга не была бы написана

5 Acknowledgement

Я благодарен родственникам (рисунок 21.2), которые отнеслись с пониманием к этой Книге и к тому, что её написание потребовало намного больше времени и усилий, чем ожидалось.

Я благодарен коллегам, которые помогли подобрать литературу по суперфункциям (рис. 21.3) и установить сервер, базу данных и медиавики: без них я бы запутался в сотнях файлов, нужных для этой Книги. Теперь я могу на вопросы про суперфункции отвечать или “*Этого не знает никто*”, или “*Это есть в моей Книге*”, см. рис. 21.4.



Рис. 21.3: by Carl Spitzweg



Рис. 21.4: Es ist in meinem Buch!

Глава 22

Приложения

1 Про обложку

На обложке - карта

от <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Tetma.jpg>

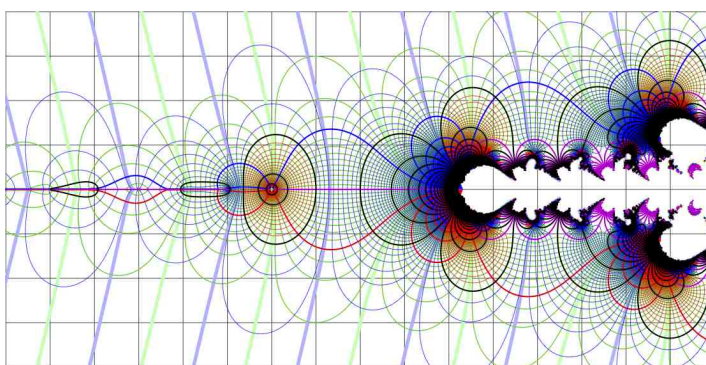
Это один из вариантов рисунка 14.13; с карты убраны некоторые детали, а область, накрываемая картой, расширена так, чтобы использовать всю ширину рамки, предложенной редакцией.

В первоначальной версии, для обложки использовались графики тетрации по различным основаниям, то есть рисунок 17.1, а затем - комплексная карта абельсинуса с рисунка 13.4. Однако, отношение высота/ширина этих рисунков плохо подходит для установленного прототипа обложки. Поэтому в качестве главного изображения обложки Книги использована карта функции tet. Обложка загружена как <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Covervi.jpg>

На последней странице обложки использована фотография

http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:IMG_0712dima.JPG
от Zilberberg Kosty, сделанная 4 марта 2012 года, когда я только начал писать эту Книгу.

Для форзацев я хотел использовать таблицы линков и таблицы английских ключевых слов. Однако, Редакция не предоставляет такой возможности; и эти таблицы перенесены в Заключение.



2 Ошмётки

В этой секции собираются кусочки, которые выкинуты из основного текста; в частности, рисунки. Думаю, что эти рисунки дополняют основной текст Книги и могут помочь его и её пониманию. Некоторые из таких прибаамбасов собраны в этой секции.

О путанице ¹

Много неясного там, где матан
Можно запутаться и заблудиться:
Даже мурашки залазят в карман,
Чтобы при случае нам пригориться
Даже коллега германский узнал
Как обеспечить единственность функций,
Что нам дает здесь Коши интеграл
И применье дизъюнкций - конъюнкций.
Вдруг сингулярность, и нужен разрез -
Струсишь ли сразу? Взрежешь ли смело?
Раз уж в комплексный анализ залез -
В точках ветвления - все дело!



Рис. 22.1: Если Читатель запутался, пусть не упорствует, пока крыша не съедет, а спрашивает

О терме

В этой книге, слагаемые функционального ряда называются термами. Терм - это англицизм, транслитерация английского слова term. Оно означает слагаемое в представлении функции в виде ряда.

Русофилы вместо слова “терм” используют слово “член”. Это слово имеет и иные значения, например, в сочетании “Член-корреспондент” (рис. 22.2).

Профессор матана мог воскликнуть: “*Посмотрите, какой у меня тут член стоит!*”, чтобы студенты проснулись, посмотрели на доску и увидели, какое интересное слагаемое получилось в сумме. В ответ на партах писали стишки:

*Где бы член найти нам впору,
Чтоб поставить в зад Тэйлору?
Оба члена хороши,
И Лагранжа, и Коши!*

Чтобы избежать инсинуаций, я использую термин “терм”, а не “член”.

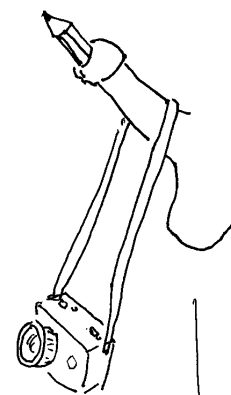


Рис. 22.2: Член-корреспондент

¹ <http://www.youtube.com/watch?v=xFmXDo8LT5k> В.С.Высоцкий. Много неясного в странной стране.

3 Рациональная функция, более общий случай

Для многих других случаев, итерации функции по формуле (4.13) могут быть выражены через формулы предыдущей секции с помощью линейного сопряжения. Я повторю формулу (4.13):

$$T(z) = \frac{U + Vz}{W + z}$$

Теперь пусть

$$r = \sqrt{U + \left(\frac{U-V}{2}\right)^2} \quad (22.1)$$

$$A = \frac{V-W}{2} - r \quad (22.2)$$

$$B = \frac{V+W}{2} + r \quad (22.3)$$

$$c = \frac{2U + V^2 + W^2 - 2(V+W)r}{2(VW - U)} \quad (22.4)$$

$$P(z) = A + Bz \quad (22.5)$$

$$Q(z) = (z - A)/B \quad (22.6)$$

Тогда функция T по формуле (4.13) может быть выражена как сопряжение функции t по формуле (4.14):

$$T(z) = P(t(Q(z))) \quad (22.7)$$

Ввиду того, что $P(Q(z)) = z$, итерации функции T выражаются через итерации функции t :

$$T^n(z) = P(t^n(Q(z))) \quad (22.8)$$

Функции P , t^n и Q определены выше, и t^n выражена через формулу (4.19) таким образом, который не требует, что число итераций n было целым.

В порядке упражнения, читателям предлагается проверить, что для итераций, определенных по формуле (22.8),

$$T^{m+n}(z) = T^m(T^n(z)) \quad (22.9)$$

Ленивые читатели при этом могут пользоваться Математикой (то есть которая Mathematica), Кленом (который Maple) или ещё каким-либо подходящим софтвером. Это нужно хотя бы для того, чтобы указать мне на опечатку, если я ошибся.

Я надеюсь, что все формулы этой Книги могут использоваться даже без того, чтобы проследивать, как они получаются. Однако какие-либо тесты, в соответствии с определением термина “наука”, для нужной Вам формулы прогнать всё-таки рекомендуется.

Итерация функции T могут быть выражена так, чтобы показать, что она тоже рациональная функция:

$$T^n(z) = \frac{U_n + V_n z}{w_n + z} \quad (22.10)$$

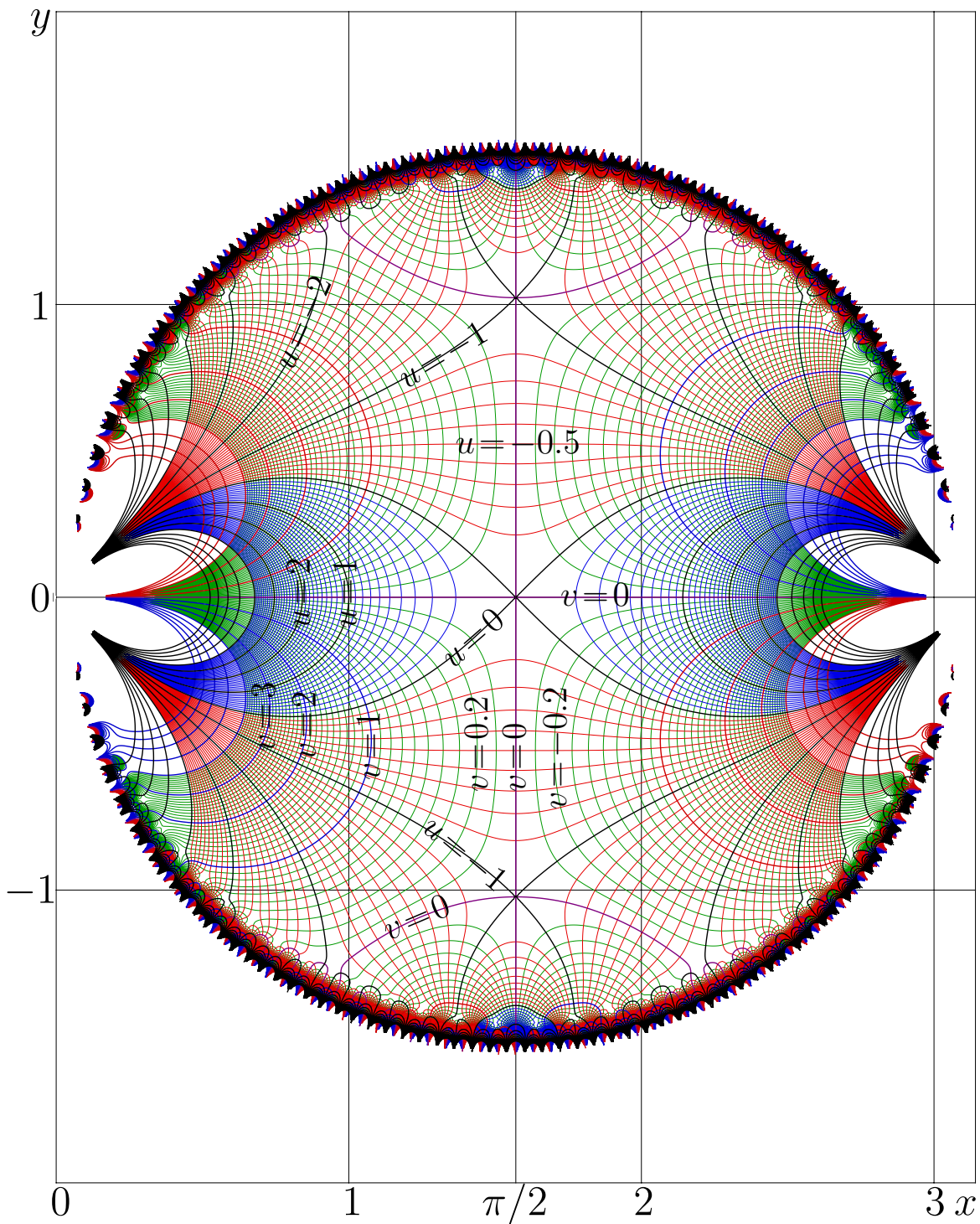
Здесь $U_n = U$ и от n не зависит; остальные параметры таковы:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{2} \left(r \left(\frac{2^{n+2}}{2^n - \left(-\frac{-2r(V+W)+2U+V^2+W^2}{U-VW} \right)^n} - 2 \right) + V - W \right) \\ &= r \left(\frac{2^{n+1}}{2^n - \left(-\frac{-2r(V+W)+2U+V^2+W^2}{U-VW} \right)^n} - 1 \right) + \frac{V - W}{2} \end{aligned} \quad (22.11)$$

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{2} \left(r \left(\frac{2^{n+2}}{2^n - \left(\frac{-2r(V+W)+2U+V^2+W^2}{VW-U} \right)^n} - 2 \right) - V + W \right) \\ &= r \left(\frac{2^{n+1}}{2^n - \left(\frac{-2r(V+W)+2U+V^2+W^2}{VW-U} \right)^n} - 1 \right) + \frac{-V + W}{2} \\ &= V_n + W - V \end{aligned} \quad (22.12)$$

Для представления (22.10) итерации дробно-линейной функции T через дробно-линейную функцию, групповое соотношение (22.9) так же может быть проверено; со всеми предлагаемыми выше спекуляциями насчет того, как, с моей точки зрения, можно и нужно изучать и делать Науку.

Выражения этого параграфа получены с помощью софтвера Mathematica. Вероятно, Читателю проще получить их самостоятельно (с помощью того же пакета), чем проследивать этот вывод. Поэтому такой случай попал в Приложения, а не в основной текст Книги.



<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/File:Ausintay40t50.jpg>

Рис. 22.3: Карта разложения Тэйлора функции AuSin с 40 термами

Разложение Тэйлора для функции AuSin

В главе 13 упоминается разложение Тэйлора в точке $\pi/2$ функции AuSin, (13.24). На рисунке 22.3 представлена карта частичной суммы этого разложения с 40 термами. Эту карту полезно сравнить с рисунком 13.4. Коэффициенты этого разложения можно использовать для вычисления коэффициентов разложения суперсинуса в нуле.

О тетрации по основанию $b < \eta$

В этом приложении я ещё раз объясняю, почему я включил в Книгу специальную главу о тетрации по основанию $\sqrt{2}$. Такое объяснение восходит к классикам Русской литературы ².

Грустно надулись мои оппоненты,
Критику выдали мне на "ура":
В книге, хоть есть ключевые моменты,
Но матанализа тоже гора!

Видом нелепым Коши-интеграла
Души студентов негоже смущать.
Если бы Книга теперь показала
Лучшую сторону.. - Рад покзать.

При основании меньше, чем η
Есть для тетраций простой алгоритм;
Каждый, кто здесь прочитает про это,
Схватит резерча научного ритм.

Кто увидал красоту итераций
Тот поимел размодернейший tool;
Для курсовых, да и для диссертаций
И голоморфнейших фитов разгул!

² http://literatura5.narod.ru/nekrasov_doroga.html Некрасов Николай Алексеевич (1821 – 1878). Железная дорога. (1864)

О фонтах

Про то, когда какой следует употреблять шрифт (шрифт), написано в каждом серьезном журнале. Однако во многих случаях, авторы статей, которые приходят на рецензию, как будто нарочно используют какие попало шрифты. Особенно в индексе. Поставят, например, в индексе какую-либо букву, италиксом (кривым шрифтом), что бы читатель гадал, какие значения может принимать эта переменная. А потом выясняется, что эта буква - лишь метка, потому что авторы выучили лишь часть латинского алфавита и им не хватает букв, чтобы обозначить разные переменные разными буквами, и индекс используется, чтобы все-таки как-то отличать эти переменные; но авторы поленились переключить шрифт, чтобы такой индекс был прямым шрифтом. Я старался, чтобы такая критика не относилась к этой Книге.

Я верю, что Читатель отличает i от i . Прямой шрифтом обозначаются имена функций (если в имени больше одного символа) и абсолютные математические константы, например, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, .., e , i ; а кривым шрифтом обозначаются переменные a , b , c , d , f , g , h , i , j , .. z , A , ..

Имеется сложный вопрос о том, что делать, если автор пишет, например, что c (или C) является константой. Думаю, что подходящим ответом является декларация, что такое c является относительной константой, которая у разных авторов (и даже в разных статьях одного автора) может иметь разный смысл.

Имеется плохой тон, обозначать переменные цифрами. Например, в советских школах, безграмотные инспекторы РОНО могли спрашивать учеников, на сколько увеличивается 2 при умножении на 3.³ Я надеюсь, что обозначения этой Книги более понятны.

³http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/lessonsrono.shtml Инспекция из Роно

4 Сайты

Цель Книги - не привлечь внимание Читателя к перечисленным ниже сайтам, но дать читателям самосогласованный формализм суперфункций, избавив их от надобности лазить по таким сайтам.

<http://allmybase.com/dropbox/tetration.pdf>
<http://cdn.bitbucket.org/bo198214/bunch/downloads/main.pdf> H.Trappmann, D.Kouznetsov. 5+ methods for real analytic tetration. June 28, 2010.
http://en.citizendium.org/wiki/Cauchy-Riemann_equations
<http://en.citizendium.org/wiki/Superfunction>
<http://en.citizendium.org/wiki/Tetrational>
http://en.citizendium.org/wiki/Holomorphic_function
http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_equation
http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_function
http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy's_integral_formula
http://en.wikipedia.org/wiki/Hellmuth_Kneser
http://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel
<http://en.wikipedia.org/wiki/Superfunction>
<http://en.wikipedia.org/wiki/Tetration>
<http://math.eretrandre.org/tetrationforum/index.php>
<http://math.stackexchange.com/tags/tetration>
<http://mathworld.wolfram.com/Tetration.html>
<http://oeis.org/wiki/Tetration>
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Abel_function
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/ArcShoka>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/AuSin>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/AuTra>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/AuZex>
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Complex_map
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Doya_function
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Factorial>
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Holomorphic_extension_of_Collatz_Subsequence
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Keller_function
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/LambertW>
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Logistic_sequence
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Regular_iteration
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Shoka_function
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Superfunction>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Superfactorial>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/SuSin>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/SuTra>
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/SuTra>
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Table_of_superfunctions
http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Tania_function
<http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Tetration>
<http://www.proofwiki.org/wiki/Definition:Superfunction>
<http://www.proofwiki.org/wiki/Definition:Tetration>
<http://www.tetration.org/Tetration/index.html> D.Geisler. What lies beyond exponentiation?
<http://www.youtube.com/watch?v=z-mfxP1Tmfw> Kasane Teto. Tetration ↑↑. 2012.

5 Новые термины

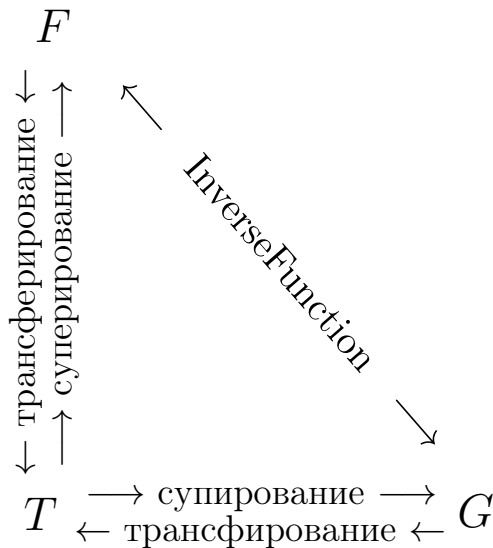
Могут потребоваться обозначения, не упомянутые в Книге:

Трансферирование (transeration). Для данной функции f , построение передаточной функции $T(z) = f(1 + f^{-1}(z))$. Для такой передаточной функции T , функция f является суперфункцией.

Трансфирование (transation). Для данной функции f , построение передаточной функции $T(z) = f^{-1}(1 + f(z))$. Для такой передаточной функции T , функция f является абельфункцией.

Суперирирование (superation). Для данной функции f , построение суперфункции F как решения уравнения $F(z+1) = f(F(z))$. При этом f выступает как передаточная функция.

Супирование (supation). Для данной функции f , построение абельфункции G как решения уравнения Абеля $G(f(z)) = G(z) + 1$.



Трансферирование есть обратная операция по отношению к суперированию. Трансфирование есть обратная операция по отношению к супированию. Это показано на рисунке 22.4 для передаточной функции T , суперфункции F и абельфункции G .

Эта Книга посвящена суперированию и супированию, а также требованиям, которые надо добавлять, чтобы эти операции были однозначными.

Рис. 22.4: Связь T , F и $G = F^{-1}$

В этой Книге я не использую показанные на рисунке 22.4 новые слова; пока в них нет большой нужды. Примерно так же не требовалось специальных слов для дифференцирования и интегрирования, пока эти операции не стали рутинами. Однако предложенные тут термины (или их эквиваленты) понадобятся при реализации автоматического построения суперфункций и абельфункций. В языке “Mathematica” для суперирования уже есть имя “Nest”; пока такая процедура поддерживается лишь для натуральных значений числа итераций.

Уже пора для предложенных операций выработать удобные обозначения, допускающие естественный перевод по крайней мере на английский язык. Некоторые английские термины собраны ниже.

6 English abstract: Superfunctions

The Book is dedicated to construction of superfunction F and abelfunction G for given transfer function T . The formalism of superfunctions is considered with examples, that are presented in ready-to-use form. The reader is supposed to know something about the complex numbers and elementary functions.

The superfunction is solution of the transfer equation

$$F(z+1) = T(F(z))$$

The abelfunction $G = F^{-1}$ satisfies the Abel equation

$$G(T(z)) = G(z) + 1$$

In order to provide the uniqueness of solution, the additional requirements on F are applied, referring to its behaviour in the complex plane.

The n th iterate of function T is denoted with superscript:

$$T^n(z) = \underbrace{T\left(T\left(\dots T(z)\dots\right)\right)}_{n \text{ evaluations of function } T}$$

With superfunction F and abelfunction G , the iterate is expressed as $T^n(z) = F(n+G(z))$. In this representation, the number n of iterate has no need to be integer.

Examples of superfunctions are considered and collected as Table 3.1. Superfunctions are constructed for sin, factorial, exponential, tetration and other functions.

Many explicit plots and complex maps for these functions, superfunctions, and iterates are included. The figures are loaded also to TORI together with their generators at <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Category:Book>

The formalism of superfunctions greatly extends the set of functions available for applications in the scientific research.

7 English keywords

T Transfer function

$T(F(z)) = F(z+1)$ Transfer equation, superfunction

$G(T(z)) = G(z) + 1$ Abel equation, abelfunction

$F(G(z)) = z$ Identity function

$T^n(z) = F(n + G(z))$ n th iterate

$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(t) dt}{t - z}$ Cauchy integral

$\text{tet}_b(z+1) = b^{\text{tet}_b(z)}$ tetration to base b

$\text{tet}_b(0) = 1$, $\text{tet}_b(\text{ate}_b(z)) = z$

$\text{ate}_b(b^z) = \text{ate}_b(z) + 1$ arctetration to base b

$\exp_b^n(z) = \text{tet}_b(n + \text{ate}_b(z))$ n th iterate of function $z \mapsto b^z$

$\text{Tania}'(z) = \frac{\text{Tania}(z)}{\text{Tania}(z)+1}$ Tania function, $\text{Tania}(0)=1$

$\text{Doya}(z) = \text{Tania}(1 + \text{ArcTania}(z))$ Doya function

$\text{Shoka}(z) = z + \ln(e^{-z} + e - 1)$ Shoka function

$\text{Keller}(z) = \text{Shoka}(1 + \text{ArcShoka}(z))$ Keller function

$\text{tra}(z) = z + \exp(z)$ Trappmann function

$\text{zex}(z) = z \exp(z)$ Zex function

Литература

- [1] http://royallib.ru/read/rable_fransua/gargantyua_i_pantagryuel__II.html#0
Франсуа Рабле. Гаргантюа и Пантагрюэль. (1564, 2013)
- [2] <http://www.lib.ru/MOLIER/meshanin.txt> Жан-Батист Мольер. Мещанин во дворянстве. (1670) Перевод Н. Любимова.
Mon, 02 Feb 1998 16:34:53 GMT. .. *Честное слово, я и не подозревал, что вот уже более сорока лет говорю прозой.* ..
- [3] <https://eudml.org/doc/183045> N.H.Abel. "Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dafs $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function vom z, x und y ist.. Journal für die reine und angewandte Mathematik, V.1 (1826) Z.11–15.
- [4] <http://ilibrary.ru/text/1088/p.1/index.html>
Н.В.Гоголь. Вечера на хуторе близ Диканьки. (1832, 1996, 2013)
- [5] <http://www.klassika.ru/read.html?proza/gogol/dushi.txt&page=25> Н.В.Гоголь. Мертвые души. Глава 7. (1842)
- [6] http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__161_0
P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. Bulletin de la Société Mathématique de France, 47 (1919), p. 161-271.
- [7] <http://www.springerlink.com/content/px2g58k5j3q45535/>
Wilhelm Ackermann. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Mathematische Annalen **99**, Number 1(1928), Z.118-133.
- [8] <http://vehi.net/mbulgakov/master/24.html>
Михаил Булгаков. Мастер и Маргарита. Глава 24. Извлечение Мастера. .. *Рукописи не горят.* .. (1928, 1940, 1967).
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Boy_on_snow_sled,_1945.jpg Father of JG Klein. Boy on snow sled, 1945.

- [10] <http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002175851> <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/Relle.pdf> Hellmuth Kneser. Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\phi(\phi(x)) = e^x$. *Equationes Mathematicae, Journal für die reine und angewandte Mathematik* **187** 56–67 (1950)
- [11] <http://link.springer.com/article/10.1007%2F02559539> G.Szekeres. Regular iteration of real and complex functions. *Acta Mathematica* 1958, Volume 100, Issue 3-4, pp 203-258.
- [12] http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.bams/1183523043 E.M.Wright. Solution of the equation $ze^z = a$. *Bulletin of the American Mathematical Society* **65**, p.89-93 (1959).
- [13] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — 4-е издание. — М.: Наука, 1963.
- [14] http://litvinovs.net/pantry/migunov_monday_begins_on_saturday/ Евгений Мигунов. «Понедельник начинается в субботу» в иллюстрациях. 1965, 1979. .. *Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть. Речь идёт о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет.* ..
- [15] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Petushki> В.Ерофеев. Москва-Петушки. 1967. *Почему-то в России никто не знает, отчего умер Пушкин.. Вставай! Иди умойся и садись дописывать свою божественную оперу «Хованщина»..*
- [16] <http://www.rusf.ru/abs/books/sot-201.htm> А.Н.Стругацкий, Б.Н.Стругацкий. Сказка о тройке - 2. 1968 *Лифт должен выдерживать прямое попадание в кабину самого необученного академика.*
- [17] http://mathdoc.emath.fr/PM0/PDF/E_ECALLE_67_74_09.pdf Jean Ecalle. *Teorie des Invariants Holomorphes*. Universite Paris XI U.E.R. Mathematique 91405 ORSAY France (1974)
- [18] http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_803.htm М.Абрамовиц, И.Стегун. Справочник по специальным функциям. М., Наука, 1979. (Английская версия доступна онлайн.)
- [19] <http://link.springer.com/article/10.1007/BF01197757#page-1> Y.Pomeau, P.Manneville. Intermittent Transition to

Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. Communications in Mathematical Physics, 1980, v.74, p.189.

- [20] <http://users-phys.au.dk/fogedby/chaos/Eckmann81.pdf>
http://rmp.aps.org/abstract/RMP/v53/i4/p643_1
 J.-P. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. Rev. Mod. Phys. 53, 643–654 (1981).
- [21] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003040188590330X> Hnilo A. A. Chaotic (as the logistic map) laser cavity. Optics Communications **53**. (1985). P.194-196.
- [22] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X06540108> Illing L., Gauthier D.J., Roy R. Controlling optical chaos, spatio-temporal dynamics, and patterns. Advances in atomic, molecular and optical physics. **54**, (1987). P. 616-797.
- [23] http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/klavanur.shtml
 Д.Кузнецов. Клава и Ньюра. (1989)
- [24] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X9190029Y> Peter L Walker, On the solutions of an abelian functional equation, Journal of mathematical analysis and applications 155 (1991), 93–110.
- [25] *Tufillaro N., Tyler A., Jeremiah R.* An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos. 1992. NY.
- [26] <http://www.ams.org/journals/bull/1993-29-02/S0273-0979-1993-00432-4/S0273-0979-1993-00432-4.pdf>
 W.Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. Bulletin (New Series) of the American Mathematical society, v.29, No.2 (1993) p.151-188.
- [27] <http://www.math.msu.edu/~shapiro/Pubvit/Downloads/RieszExpo/RieszExpo.pdf> Joel H. Shapiro. Composition Operators and Schröder's Functional Equation. Contemporary Mathematics 213 (1998), 213–228.
- [28] *Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. NY, 2000.
- [29] https://edit.ethz.ch/ulp/publications/paper/2001/152__APB_73__653__2001_.pdf

- R.Paschotta, U.Keller. Passive mode locking with slow saturable absorbers. Appl. Phys. B 73, 653–662 (2001)
- [30] *Sprott J. C.* Chaos and Time-Series Analysis. Oxford 2003.
- [31] <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1278604> <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/ieee3.pdf> D.Kouznetsov, J.V.Moloney. Highly efficient, high gain, short wavelenght and power scalable incoherent diode slab-pumped fiber laser amplifier. – IEEE Journal of Quantum Electronics, v.39, No.11, p.1452-1461 (2003).
- [32] <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/01278604.pdf> D.Kouznetsov, J.V.Moloney. Slab delivery of incoherent pump light to double-clad fiber amplifiers: An analytic approach. – IEEE Journal of Quantum Electronics, 2004, v.40, Issue 4, p.378-383.
- [33] <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/ieee3.pdf> P.Kano, D.Kouznetsov, J.V.Moloney, M.Brio. Slab delivery of incoherent pump light to double-clad fiber amplifiers: Numerical simulations. – IEEE Journal of Quantum Electronics, 2004, v.40, No.9, p.1301-1305.
- [34] http://www.ulp.ethz.ch/publications/paper/2004/200__APB_79__331__2004_.pdf M.Haiml, R.Grange, U.Keller. Optical characterization of semiconductcor saturable absorbers. Appl.Phys. B 79, 331-339 (2004)
- [35] <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/CoupledOptRev.pdf> <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/CoupledOptRev.pdf> D.Kouznetsov, J.-F.Bisson, A.Shirakawa, K.Ueda. Limits of coherent addition of lasers: simple estimate. – Optical Review, 2005, v.12, No.6 (2005) 445-447.
- [36] <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2005josab.pdf> D.Kouznetsov, J.-F.Bisson, K.Takaichi, K.Ueda. High-power single mode solid state laser with short unstable cavity. JOSA B, v.22, Issue 8, p.1605-1619 (2005).
- [37] <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2005josaber.pdf> Ibid: Erratum.
- [38] <http://www.nature.com/nphoton/journal/vsample/nsample/full/nphoton.2006.6.html> Hamamatsu Photonics K.K. Laser

- group. The Fiber Disk Laser explained. Nature Photonics sample, - pp14 - 15 (2006).
- [39] <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10652460500422247> M.H.Hooshmand, (2006). Ultra power and ultra exponential functions. Integral Transforms and Special Functions 17 (8): 549–558.
- [40] http://apl.aip.org/resource/1/applab/v90/i20/p201901_s1
http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/ApplPhysLett_90_201901.pdf
 J.-F.Bisson, D.Kouznetsov, K.Ueda, T.Fredrich-Thornton, K.Petermann, G.Huber. Switching of emissivity and photoconductivity in highly doped Yb³⁺:Y₂O₃ and Lu₂O₃ ceramics. – Applied Physics Letters, 90, 201901 (2007).
- [41] http://en.wikisource.org/wiki/Maple_and_Tea
http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/maple.shtml
 D.Kouznetsov. Maple and Tea. (2007)
- [42] http://ofvp.phys.msu.ru/pdf/Kandidov_70.pdf
 В.М.Гордиенко, В.К.Новик. О времени и факультете, о кафедре и о себе... 70-ти ление профессора В.П.Кандидова. (2007.12.05)
- [43] http://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:39069239 J.M.Gac, J.J.Zebrowski. Giant suppression of the activation rate in dynamical systems with chaotic transitions. Acta Physica Polonica B, 2008, v.39, p.1019.
- [44] <http://www.ams.org/mcom/2009-78-267/S0025-5718-09-02188-7/home.html>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2009analuxpRepri.pdf>
 D.Kouznetsov. Analytic solution of $F(z+1)=\exp(F(z))$ in complex z -plane. Mathematics of Computation **78** (2009), 1647-1670.
- [45] <http://link.springer.com/article/10.3103/S1068335609050054#page-1> Gorbuklov M.V., Maslova Yu.Ya., Chaban O.I., Shabalin Yu.V. Period doubling cascade and deterministic chaos in a laser self-mode-locked by the combination of inertial negative and positive feedbacks. Bulletin of the Lebedev Physics Institute, **36**. No.5. (2009). P.150-156. Русский оригинал: Горбунков М.В., Маслова Ю.Я., Чабан О.И., Шабалин Ю.В. Краткие Сообщения по физике, **36**. N.5. (2009). P.150-156.

- [46] <http://www.springerlink.com/content/d73u67714013j826/>
Bjerklov K. SNA's in the Quasi-Periodic Quadratic Family
Communications in Mathematical Physics. **286**. 2009. P.137–161
- [47] http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/lessontopo.shtml
Д.Кузнецов. Урок квантовой топологии. 2009.
- [48] *Елютин П. В.* Думаю, задача, понятая как “КОНТИНУАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ”, будет стоить Ваших усилий и времени, если удастся выявить модель, порождением которой является закон движения $X(t)$ - или определить континуальные характеристики $X(t)$ (например, границы значений производных по времени). Частное сообщение, Oct 9, 2009 5:32 PM.
- [49] http://iopscience.iop.org/1742-6596/237/1/012016/pdf/1742-6596_237_1_012016.pdf
P.G.L.Leach and M.C.Nucci. Point and counterpoint between Mathematical Physics and Physical Mathematics. Journal of Physics: Conference Series **237** (2010) 012016.
- [50] <http://www.jointmathematicsmeetings.org/journals/mcom/2010-79-271/S0025-5718-10-02342-2/S0025-5718-10-02342-2.pdf> <http://www.ams.org/journals/mcom/2010-79-271/S0025-5718-10-02342-2/home.html>
http://eretrandre.org/rb/files/Kouznetsov2009_215.pdf
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2010q2.pdf>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2010q2.pdf>
D.Kouznetsov, H.Trappmann. Portrait of the four regular super-exponentials to base $\sqrt{2}$. Mathematics of Computation, 2010, v.79, p.1727-1756.
- [51] <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2010superfar.pdf>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2010superfar.pdf>
Д.Ю.Кузнецов, Г.Траппманн. Суперфункции и корень из факториала. Вестник Московского Университета, серия 3 , No.1 (2010), стр.1-14.
- [52] http://www.emis.ams.org/journals/VMJ/articles/2010_2_4.pdf <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2009vladir.pdf>
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009vladir.pdf>

- Д.Кузнецов. Тетрация как специальная функция. Владикавказский математический журнал, 2010, т.12, вып. 2, стр.31-45.
- [53] <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2010vladie.pdf>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2010vladie.pdf>
 D.Kouznetsov. Tetration as special function. Vladikavkaz Mathematical Journal, 2010, v.12, issue 2, p.31-45.
- [54] <http://www.springerlink.com/content/qt31671237421111/fulltext.pdf?page=1> Д.Ю.Кузнецов, Г.Траппманн. Суперфункции и корень из факториала. Вестник Московского Университета, серия 3 (2010) No.1, стр.8-14.
- [55] <http://ufn.ru/tribune/trib120111>
 Д.Кузнецов. Место науки и физики в человеческом знании. УФН, т.181 “Трибуна”, стр.1-9 (2010).
- [56] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Mestor>
 Д.Кузнецов. Место науки в человеческом знании. (2010-2011)
- [57] <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2010logistir.pdf>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2010logistir.pdf>
 Д.Ю.Кузнецов. Континуальное обобщение логистического отображения. Вестник Московского Университета, серия 3 (2010) No.2, стр.23-30.
- [58] http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/mizugadro.shtml
 Д.Кузнецов. Число Мизугадро. (2010)
- [59] H.Yoneda. Recovery of intensity inside the amplifier from its transfer function is impossible. Private communication, 2010.
- [60] А.Каминский. Нет смысла анализировать передаточную функцию усилителя, не указав конкретную модель для активной среды. Частное сообщение, 2011.
- [61] http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/smile.shtml
 Д.Кузнецов. Улыбка. 07/10/2011.
- [62] http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/lomodrev.shtml.
 Д.Кузнецов. Директорство Ломодрева. 2011.
- [63] <http://www.springerlink.com/content/u7327836m2850246/>
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2011uniabel.pdf>

- <http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2011uniabel.pdf>
H.Trappmann, D.Kouznetsov. Uniqueness of Analytic Abel Functions in Absence of a Real Fixed Point. *Aequationes Mathematicae*, v.81, p.65-76 (2011)
- [64] A.Shirakawa. It is not possible to reconstruct the intensity inside the amplified just from its transfer function. Private communication, 2011.
- [65] A.Shirakawa. The formalism of superfunctions is too complicated and therefore cannot be used. Private communication, 2012.10.09.
- [66] <http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/dynsyst>
Kursernas Hemsidor. Introduction to Dynamical Systems. 2012. Derivation of Niclas Carlsson's formula. Let function $f(x)$ be $\sin(x)$. We want to evaluate, approximately .the value of the n -th iterate of $f(x)$. Niclas Carlsson obtained empirically the following formula $f^n(x) \approx \sqrt{\frac{3}{n}}$, $x \approx 1$, n large .. If the formula is correct it will take $3 \cdot 10^{10}$.. steps to reach 0.00001 starting from 1. ..After 60000 iterations the value is 0.0071 and the discrepancy -4.7323e-007.
- [67] <http://www.physics.miami.edu/~curtright/Schroeder.html>
Thomas Curtright. Continuous iterates continue to be interesting, after 150 years of study. (2011-2013) As a first illustration, we display the continuous iterates of the sine function, $\sin_{[t]}(x)$. Note that the maximum values at $x = \pi/2$ are approximately given by $\exp[(1 - \sqrt{t}) \ln(\pi/2)]$.
- [68] <http://www.nsu.ru/classics/schole/6/6-2-sych.pdf>
Л.С.Сычева. Физическая математика Архимеда, формирование интегрального исчисления и механизмы новаций в математике. Школа, том 6, номер 2 (2012).
- [69] <http://www.ams.org/journals/mcom/0000-000-00/S0025-5718-2012-02590-7/S0025-5718-2012-02590-7.pdf>
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2012e1eMcom2590.pdf>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2012e1eMcom2590.pdf>
H.Trappmann, D.Kouznetsov. Computation of the Two Regular Super-Exponentials to base $\exp(1/e)$. *Mathematics of Computation*, 2012, **81**, p.2207-2227.

- [70] <http://mmmf.msu.ru/lect/kvashenko.html> Квашенко Андрей Николаевич. Драконы. (2007-2013)
- [71] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php?title=Destruscir> Д.Кузнецов. Уничтожение науки в РФ. (2013)
- [72] <http://www.scirp.org/journal/PaperInformation.aspx?PaperID=36560>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2013jmp.pdf>
 D.Kouznetsov. TORI axioms and the applications in physics. Journal of Modern Physics, 2013, v.4, p.1151-1156.
- [73] <http://www.ingentaconnect.com/content/asp/asl/2013/00000019/00000003/art00071>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2012thaiSuper.pdf>
 D.Kouznetsov. Recovery of Properties of a Material from Transfer Function of a Bulk Sample (Theory). Advanced Science Letters, Volume 19, Number 3, March 2013, pp. 1035-1038(4).
- [74] <http://link.springer.com/article/10.1007/s10043-013-0058-6> D.Kouznetsov. Superfunctions for amplifiers. Optical Review, July 2013, Volume 20, Issue 4, pp 321-326.
- [75] <http://arxiv.org/abs/1008.1409v2> Henryk Trappmann. The Intuitive Logarithm. October 14, 2013.
- [76] Michael Moldenhauer. Question about tetration method. Private communication, Sat, 9 Nov 2013 01:11:53 -0800 (PST). *..how did you come up with the high-quality initial approximation fit_3 mentioned in your paper about the tetrational function?*
- [77] <http://www.m-hikari.com/ams/ams-2013/ams-129-132-2013/kouznetsovAMS129-132-2013.pdf>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2013hikari.pdf>
 D.Kouznetsov. Entire function with logarithmic asymptotic. Applied Mathematical Sciences, 2013, v.7, No.131, p.6527-6541.
- [78] <http://www.pphmj.com/references/8246.htm>
<http://mizugadro.mydns.jp/PAPERS/2014susin.pdf>
 D.Kouznetsov. Super sin. Far East Journal of Mathematical Science, v.85, No.2, 2014, pages 219-238.
- [79] http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_equation

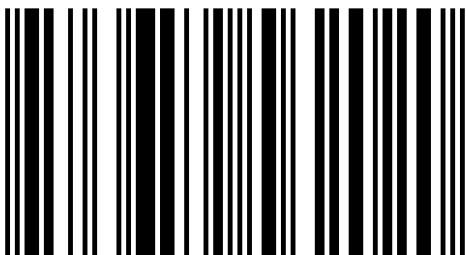
- [80] <http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Nest.html>
- [81] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Conto.cin>
- [82] <http://en.citizendium.org/wiki/Conto.cin>
- [83] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Science>
- [84] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Hayka> Hayka
- [85] http://samlib.ru/k/kuznecow_d_j/hayka.shtml Hayka
- [86] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Koshir> Интегральная формула Коши
- [87] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Tetration>
- [88] <http://en.citizendium.org/wiki/Tetration>
- [89] http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Tania_function
D.Kouznetsov. Tania function.
- [90] http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Doya_function
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/e/Doya>
- [91] http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Keller_function
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/e/Keller>
- [92] http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Shoka_function
<http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/e/Shoka>
- [93] http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/Holomorphic_extension_of_the_Collatz_subsequence
- [94] <http://mizugadro.mydns.jp/t/index.php/LambertW>
- [95] <http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>
- [96] http://en.citizendium.org/wiki/Lambert_W_function
- [97] http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function
- [98] <http://www.orcca.on.ca/TechReports/TechReports/2000/TR-00-12.pdf>
Robert M. Corless, David J. Jeffrey. On the Wright ω function.
- [99] http://valerie.doya.free.fr/Doya_CV.html Valérie DOYA.
Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, Parc Valrose,
06108 Nice Cedex2, France. (2014)

Собраны результаты по вычислению суперфункций, абельфункций и нецелых итераций. Для заданной голоморфной передаточной функции T , речь идет о решениях F передаточного уравнения $F(z+1)=T(F(z))$. В частности, рассмотрены суперфункции от факториала, экспоненты, синуса; предложены голоморфные обобщения логистической последовательности и функций Аскерманна. Из аскерманнов представлены тетрация (в основном, по вещественному основанию, большему единицы) и пентация (по основанию e). Предложены эффективные алгоритмы вычисления суперфункций и абельфункций. Построены графики и комплексные карты. Обсуждаются приложения. Суперфункции, абельфункции и нецелые итерации существенно расширяют класс функций, которые можно использовать в научных исследованиях и техническом дизайне. Генераторы рисунков на C++ загружены на сайт TORI, то есть <http://mizugadro.mydns.jp/t> и доступны для скачивания. С этими генераторами читатели могут воспроизводить (и модифицировать) рисунки из Книги. Книга задумана как прикладная и популярная. Я стараюсь избегать сложных формул, но знание комплексной арифметики, интеграла Коши и принципов асимптотического анализа желательно.



Дмитрий Кузнецов

Окончил Физфак МГУ (1980). Работа: СССР, Мексика, США, Япония. В 20 веке доказал квантовую стабильность оптического солитона, предложил нижнюю границу квантового шума нелинейного усилителя и указал предел одномодового приближения в Квантовой Оптике. В 21 веке построил теорию ребристых атомных зеркал, формализм суперфункций и аксиомы ТОРИ.



978-3-659-56202-0